



UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROPUESTA DE SECUENCIACIÓN DE ACTIVIDADES PARA LA ENSEÑANZA DE
CONTENIDOS A PARTIR DE LA ACTUALIZACIÓN DE LAS BASES
CURRICULARES 2020 PARA EL EJE DE DATOS Y AZAR EN LOS NIVELES DE
TERCERO Y CUARTO AÑO MEDIO PARA LA FORMACIÓN GENERAL

TESINA PARA OPTAR AL GRADO DE
LICENCIADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTORES:

VALESKA FRANCISCA ARACENA HUERTA
CARMEN GLORIA PALMA SÁNCHEZ
MAYCOL SEBASTIÁN SANDOVAL CARRASCO

PROFESORA GUÍA:

GIOVANNA VICENZA TICCHIONE TRONCOSO

SANTIAGO DE CHILE, MAYO DE 2020



UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROPUESTA DE SECUENCIACIÓN DE ACTIVIDADES PARA LA ENSEÑANZA DE
CONTENIDOS A PARTIR DE LA ACTUALIZACIÓN DE LAS BASES
CURRICULARES 2020 PARA EL EJE DE DATOS Y AZAR EN LOS NIVELES DE
TERCERO Y CUARTO AÑO MEDIO PARA LA FORMACIÓN GENERAL

TESINA PARA OPTAR AL GRADO DE
LICENCIADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTORES:

VALESKA FRANCISCA ARACENA HUERTA
CARMEN GLORIA PALMA SÁNCHEZ
MAYCOL SEBASTIÁN SANDOVAL CARRASCO

PROFESORA GUÍA:

GIOVANNA VICENZA TICCHIONE TRONCOSO

SANTIAGO DE CHILE, MAYO DE 2020

2020, Valeska Aracena Huerta, Carmen Palma Sánchez y Maycol Sandoval Carrasco.

Se autoriza la reproducción total o parcial de este material, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, siempre que se haga referencia bibliográfica que acredite el presente trabajo y sus autores.

Dedicatoria

Dedicamos esta tesina especialmente a nuestras madres, padres, y familia, por acompañarnos a emprender el camino de la educación y pedagogía, por ayudarnos a forjar el cimiento que nos acompañará en nuestra vida personal y profesional.

A nuestros amigos y compañeros del Pedagógico, con quienes compartimos días, semanas y años completos de risas y estudio.

Por ustedes nos encontramos aquí ahora, listos para convertirnos en los profesores que tanto esperamos ser.

Agradecimientos

A mi madre y mi padre por el apoyo incondicional desde el comienzo de mi carrera, a mi hermana y mi hermano por estar presente siempre, y a toda mi familia.

A la Profe Giovanna Ticchionne por el acompañamiento dentro de la carrera, los consejos para ser una mejor profesora y por mostrarme lo linda que es la estadística

Y agradecer a mi equipo Carmen y Maycol por la amistad, empatía, cariño y paciencia durante todo el proceso de la tesina y de universidad.

Finalmente, a todos mis amigos que conocí dentro de la universidad, quienes me ayudaron a descubrir que la matemática no sería solo cálculos, sino también amor por la enseñanza.

Valeska Aracena Huerta

A mi Mamá, Papá y hermanos por el apoyo y contención a pesar de la distancia. A mi Chica Leo por acompañarme días completos en el proceso que significó mi formación inicial y momentos de ocio. A mis primas por su amor y motivación incondicional en cada etapa. A la Profe Giovanna Ticchionne por enseñarme con hechos como ser una buena profesora.

A mi amiga Feña por ser mi amiga. A Bad Bunny por acompañarnos tardes y noches completas motivando la creación. Y por supuesto a los mejores compañeros de carrera y tesina que podría haber elegido, por su paciencia y empatía en todo el proceso formativo.

Carmen Palma Sánchez

Agradezco a la profesora Giovanna Ticchione por acompañarnos y guiarnos en esta Tesina, por nutrirme de conocimientos y darle un significado a la enseñanza de la estadística.

A Valeska y a Carmen por tener paciencia infinita conmigo, por formar el mejor equipo de trabajo y crear este lazo de amistad que espero dure por muchos años.

A mis queridos compañeros, más bien amigos, quienes aportaron en mí conocimientos, valores y fortaleza en esta larga estadía en el Pedagógico, aprendí mucho de ellos.

Agradecido totalmente de mis padres, sin duda que por ellos estoy donde estoy.

Maycol Sandoval Carrasco

Tabla de Contenidos

Introducción	1
Capítulo I: Antecedentes y Problemática	4
1.1 Problemática	4
1.2 Planteamiento del Problema	5
1.3 Objetivo de la Investigación	6
1.3.1 Objetivo General	6
1.3.2 Objetivos Específicos	6
1.4 Justificación	6
1.4.1 Nuevos Programas de Estudios	6
1.4.2 Formación Estadística de los Profesores de Matemática	8
1.4.3 Organización Curricular de las Habilidades para la Enseñanza de la Matemática	9
Capítulo II: Marco Teórico	11
2.1 Obstáculos del Aprendizaje Probabilístico	11
2.2 Resolución de Problemas Estadísticos a partir de la Matemática	15
2.3 Desarrollo del Pensamiento Estadístico a partir del Ciclo Investigativo PPDAC	18
2.4 Contenidos a tratar en los Niveles de 3° y 4° Medio en el eje de Datos y Azar	20
2.4.1 Contenidos a tratar en los Niveles de 3° Medio	20
2.4.2 Contenidos a tratar en los Niveles de 4° Medio	27
2.5 Descripción de Texto de Estudio	36

Capítulo III: Marco Metodológico	46
3.1 Caracterización de la muestra	48
3.2 Instrumento	51
3.3 Procedimiento	52
3.4 Análisis de Datos	52
3.5 Retroalimentación de los Docentes	53
Capítulo IV: Representación de Resultados y Discusión	54
4.1 Resultados de la Encuesta	54
4.2 Material de Actividades	61
4.3 Revisión de las Actividades por parte de los Docentes de Matemática	71
Capítulo V: Conclusiones y Proyecciones	74
Referencias Bibliográficas	80
Anexos	85
Anexo 1. Encuesta para el análisis de la percepción que poseen las y los Profesores de matemática sobre el manejo de los contenidos y habilidades en el eje de Datos y Azar a tratar en los niveles de 3° y 4° Medio, según actualización curricular para el año 2020	86
Anexo 2. Justificaciones y reflexiones más representativas recopiladas a través de lo manifestado por los docentes en la encuesta	93
Anexo 2.1 Justificación por falta de tiempo para la enseñanza de contenidos	93
Anexo 2.2 Reflexiones Finales de la Encuesta	95
Anexo 3. Secuenciación de actividades para la enseñanza de contenidos del Eje Datos y Azar para los niveles de 3° y 4° Medio	99

Anexo 3.1 Actividades Nivel 3° Medio	99
Anexo 3.2 Actividades Nivel 4° Medio	112
Anexo 4. Lista de Cotejo para Retroalimentar Actividades	185
Anexo 4.1 Lista de Cotejo	185
Anexo 4.2 Observación y Comentarios	187

Importante: En la presente investigación se utilizan de manera inclusiva términos como “el docente”, “el profesor”, “el estudiante”, “el alumno”, “el compañero” y sus respectivos plurales junto a sinónimos equivalentes en el contexto educativo para referirse a hombres, mujeres u otros géneros.

Esta opción obedece a que no existe acuerdo universal respecto de cómo aludir conjuntamente a todos los géneros en el idioma español, salvo usando “o/a”, “los/las” y otras similares, y ese tipo de fórmulas supone una saturación gráfica que puede dificultar la comprensión de la lectura.

Resumen

A partir del año 2020 entra en vigencia la última actualización del Currículum Nacional para los niveles de 3° y 4° Medio, para el Plan Común de Formación General en la modalidad Científico-Humanista, Técnico Profesional y Artística, conforme al ajuste durante el año 2009. Particularmente los contenidos a tratar en esta investigación se relacionan a los del eje de Datos y Azar para dichos niveles en la formación general según Marco Curricular. Al considerar las Bases Curriculares para 3° y 4° Medio y que los nuevos contenidos declarados por el Ministerio de Educación no presentan antecedentes sobre su enseñanza, a partir de un estudio realizado a una muestra de profesores de Matemática titulados de diferentes universidades del país, se aplicó una encuesta como herramienta de recopilación de datos, se propone un diseño de actividades para dirigir la enseñanza de los contenidos. A partir de los resultados arrojados por el instrumento, que fueron determinados de acuerdo con la percepción y manejo de los contenidos que los docentes declaran como deficientes. Dicho diseño de actividades está destinado a profesores de matemática quienes puedan implementar y adaptarlas en los colegios con la finalidad de acompañar y complementar el ejercicio docente y el proceso de conducción de la educación Estadística. Particularmente las actividades responden a (1) los contenidos y habilidades propuestos por el Ministerio de Educación en la actualización de las Bases Curriculares para 3° y 4° Medio, considerando en lo manifestado por una muestra de docentes de la asignatura a lo largo del país, (2) diferentes elementos didácticos y (3) el Ciclo Investigativo PPDAC propuesto por Wild y Pfannkuch. Dicho estudio concluye la necesidad de la actualización didáctica de los docentes, específicamente de la educación estadística y probabilidad, y un plano general de cómo los docentes se encuentran preparados para llevar a la enseñanza de los contenidos de esta área.

Palabras Claves: <i>Bases Curriculares, Datos y Azar, Ciclo Investigativo PPDAC, Probabilidad Condicional, Variable Aleatoria Discreta, Variable Aleatoria Continua</i>

Introducción

La educación chilena ha estado sometida a múltiples cambios curriculares conforme las diferentes reformas educativas que han legislado la educación nacional, actualización que hasta ahora ha producido diversos comentarios y apreciaciones sobre los contenidos presentes y la enseñanza de estos mismos por parte de las y los docentes y el resto de la comunidad educativa.

Entre los años 1996 y 1997 se implementó y aprobó la primera reforma curricular y marco curricular en educación básica y media (Decreto 40), posteriormente en el año 2002 se pusieron en funcionamiento los nuevos programas de estudios de 8° básico. Para la educación media, los nuevos cambios ocurrieron durante los años 1998 y 2002, aprobando el nuevo marco curricular de esos niveles educacionales (Decreto 220). El año 2009 se promulga la Ley General de Educación (LGE) que cumple un papel fundamental en el currículum educacional actual pues dicta los requisitos mínimos obligatorios por nivel en cada asignatura a lo largo de todo el proceso educativo formal, el Ministerio de Educación (Mineduc, 2019) señala en las Bases Curriculares para 3° y 4° Medio que el currículum focaliza su objetivo en la búsqueda de la equidad y calidad de la educación para todas y todos los niños de Chile. Además, señala que el enfoque en el currículum se modifica, dando mayor importancia a las habilidades y actitudes que debe desarrollar la y el estudiante a lo largo de su formación primaria y secundaria (Mineduc, 2019).

Los docentes en ejercicio deben mantenerse informados sobre los cambios y modificaciones que va sufriendo el currículum nacional, ya que deben ser capaces de adaptarse y educarse para lograr preparar e implementar una enseñanza acorde a los mínimos obligatorios ya mencionados. La Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación plantea cuatro grandes unidades para la enseñanza de la Matemática a lo largo del proceso escolar: Números, Álgebra, Geometría y Datos y Azar. Esta última unidad comenzó a generar mayor aceptación e interés por la alfabetización estadística como parte importante de la educación matemática gracias a los *Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM, 2000)* que plantea el Concilio Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM por sus siglas en inglés), este documento revela que debe existir un énfasis consistente en los estándares relacionados al análisis de datos, la probabilidad y la estadística en cada curso de la educación

primaria y secundaria. De esta forma, el marco curricular tiene la responsabilidad de entregar de manera coherente, articulada y global una visión estructural de la Educación Estadística que permita a los docentes realizar un completo proceso de enseñanza y aprendizaje.

Como indica Del Pino (2012), la educación estadística en los programas de estudio: “Permite consolidar la alfabetización estadística de los futuros ciudadanos y construir las bases para desarrollar el razonamiento y el pensamiento estadístico de los alumnos” (p.2). Es por esto que Araneda, A. et al. (2011) a través de la Sociedad Chilena de Estadística promueven que la educación estadística debe ser vista como un proceso de desarrollo progresivo cuya finalidad sea la formación de un ciudadano alfabetizado estadísticamente, es por esto que los docentes necesitan comprender cómo proporcionar un desarrollo secuencial de experiencias de aprendizaje, viendo este proceso como una inversión en el bienestar individual de los ciudadanos.

A partir de lo anterior, trabajar en el eje de Datos y Azar en niveles de 3° y 4° Medio para lograr los objetivos que proponen el marco curricular es un gran desafío, pues, además de considerar las recomendaciones establecidas por Araneda, A. et al. (2011) a través de la Sociedad Chilena de Estadística que señalan que es necesario considerar a la Estadística como una disciplina relativamente nueva en comparación a los otros ejes de estudio en Matemática, se deben detectar las falencias en la formación inicial y/o continua de los docentes y además tener en cuenta la importancia de poseer un conocimiento sólido de los principios y conceptos que subyacen a esta área de estudio para lograr un proceso de desarrollo progresivo de la Educación Estadística.

Producto de la última actualización de las Bases Curriculares para los niveles de 3° y 4° Medio que comienzan a implementarse durante el año 2020, surge la necesidad de disponer de actividades y/o material didáctico para abordar la enseñanza de los contenidos y el desarrollo de las habilidades del eje Datos y Azar para cumplir los objetivos planteados por las distintas organizaciones enfocadas a la correcta entrega de la Educación Estadística, ya que a diferencia de los otros ejes de estudio, su enseñanza es particularmente distinta a las demás, como lo señalan expertos en la enseñanza estadística dentro del reconocido internacionalmente Reporte GAISE en su Lineamiento para la Evaluación y Enseñanza en Educación Estadística (Franklin, C. et al.) publicado en el año 2018.

Para detectar las falencias que podrían afectar al logro del objetivo planteado en la Educación Estadística es importante conocer y considerar la percepción que tienen los docentes de matemática con respecto a este eje de estudio y qué tan preparados se sienten para guiar el correcto aprendizaje de los estudiantes en esta área.

A través de la implementación de una encuesta que tiene por objetivo determinar la percepción que poseen las y los profesores de matemática en ejercicio sobre el manejo de los contenidos del eje Datos y Azar, a tratar en los niveles de 3° y 4° Medio según actualización de las Bases Curriculares para el año 2020 (Mineduc, 2019), se identifican los contenidos y habilidades que los profesores declaran se sienten menos preparados para guiar el aprendizaje. Esta investigación propone como producto un diseño de secuenciación de actividades acordes al eje de Datos y Azar en los niveles de 3° y 4° Medio que logren apuntar al desarrollo de conocimientos, habilidades y actitudes que les permitan a los estudiantes enfrentarse a diversos desafíos en contextos de clases o la vida cotidiana.

Capítulo I: Antecedentes y Problemática

1.1 Problemática

Actualmente se habla de un ciudadano ilustrado si logra comprender informaciones que aparezcan en los medios de comunicación y pueda tener una actitud crítica frente a estas, de esta manera la Sociedad Chilena de Estadística plantea que se transforma en un deber ineludible preparar a los estudiantes en el ámbito estadístico (Araneda, A. et al. 2011). El área de la Estadística ofrece un conjunto coherente de ideas y herramientas a los estudiantes que permiten el desarrollo de habilidades como recopilar, analizar e interpretar datos, con el fin de obtener conclusiones a partir de estas informaciones. Es claro lo transdisciplinario que resulta la estadística, sin embargo, es habitual que se encuentre dentro del currículum escolar del área matemática. Según la Sociedad Chilena de Estadística (Araneda, A. et al. 2011), inicialmente no resulta conveniente separar Estadística de Matemática, pero es necesario trabajar con otros docentes, por ejemplo de historia o ciencias, para apoyar sus disciplinas a través del uso de conceptos y métodos estadísticos, de esta forma la relación entre ambas áreas es bidireccional pues es labor de la matemática el definir conceptos de manera precisa, y por otro lado de la estadística el interpretar el concepto a través de su rol de conectividad y coherencia del uso de aplicaciones matemáticas a situaciones reales. Para alcanzar el desarrollo del pensamiento estadístico el docente debe encargarse del proceso de alfabetización estadística ¿Cuánta estadística debe conocer actualmente un estudiante de nuestra sociedad?

A partir de la Ley General de Educación del año 2009 se incorpora el eje de Datos y Azar desde 1° Básico a 4° Medio basado en tendencias de reformulaciones curriculares a nivel internacional señaladas por la Sociedad Chilena de Estadística (Araneda, A. et al. 2011). Así también, el objetivo del currículum vela por la equidad en la igualdad de oportunidades para el desarrollo del proyecto de vida de los estudiantes, entregando desafíos que se relacionen con sus intereses (Ley 20.370 - Ley General de Educación, 2009). En el contexto de la educación chilena, existe una brecha educacional en cuanto a las habilidades y conocimientos adquiridos por los estudiantes a través de los constantes cambios que han regido a los Planes

y Programas de estudio, específicamente para los de 3° y 4° Medio, además del tipo de establecimiento y el contexto donde se encuentren. Dentro del eje de Datos y Azar es fundamental que los docentes posean un conocimiento sólido en lo que respecta a conceptos y principios del análisis de datos y de la probabilidad de la cual son llamados a enseñar. La Sociedad Chilena de Estadística (Araneda, A. et al. 2011) plantea cómo es que el currículum estructura la enseñanza conceptual de la Educación Estadística, el cual posee un rol relevante al establecer los parámetros que determinan el logro completo del proceso de enseñanza, por lo que está relacionado con la formación inicial necesaria para los profesores de matemática.

Como primer año en vigencia, los Programas de Estudio para 3° y 4° Medio para el año 2020 resultan un desafío para los docentes. El correcto logro del diseño de recolección de información, la exploración de datos y la interpretación de resultados dentro de un contexto, en conjunto de lo necesario para que los jóvenes se desarrollen como ciudadanos íntegros en la sociedad del conocimiento, como plantea el MINEDUC (2018) en su publicación *Habilidades para el Siglo XXI*, son aprendizajes que los estudiantes necesitan desarrollar para desenvolverse en este siglo.

La ausencia de métodos pedagógicos que permiten a los docentes alcanzar el correcto logro de los Objetivos de Aprendizaje (OA) propuestos en los Programas de Estudio para 3° y 4° Medio, en conjunto de la misión de alfabetización estadística, pueden impedir el correcto logro de la finalidad del proceso educativo según el currículum educacional. El aprendizaje basado en proyectos, los experimentos mentales o incluso la enseñanza a través del juego resultan efectivos para el logro de las habilidades planteadas en el currículum educacional.

1.2 Planteamiento del Problema

¿Qué tan preparados se sienten los docentes para llevar el correcto proceso de aprendizaje de los estudiantes según todos los estándares actuales del MINEDUC en el eje de Datos y Azar para 3° y 4° Medio en la formación general para el año 2020?

1.3 Objetivo de la Investigación

1.3.1 Objetivo General

- Estudiar la percepción que tienen los profesores de matemática respecto al manejo de los contenidos del eje de Datos y Azar presentes en la actualización de las Bases Curriculares 2020 para los niveles de 3° y 4° Medio en la formación general en el Eje de Datos y Azar.
- Proponer una secuenciación de actividades para la enseñanza de una selección de contenidos referentes a la actualización curricular 2020 en los niveles de 3 ° y 4 ° Medio en la formación general para el eje de Datos y Azar utilizando como metodología el Ciclo Investigativo PPDAC.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Determinar la percepción que poseen los profesores de matemática sobre el manejo de los contenidos y habilidades del eje Datos y Azar a tratar en los niveles de 3° y 4° Medio, según actualización curricular para el año 2020 a partir de una encuesta.
- Identificar contenidos que presentan mayores dificultades para la enseñanza respecto al eje Datos y Azar a tratar en los niveles de 3° y 4° Medio según la actualización curricular para el año 2020.
- Diseñar actividades para la enseñanza de una selección de contenidos del eje datos y azar a tratar en los niveles de 3° y 4° Medio según la actualización curricular para el año 2020 a través del Ciclo Investigativo PPDAC.

1.4 Justificación

1.4.1 Nuevos Programas de Estudios

Un Programa de Estudio ofrece una propuesta para organizar y orientar el trabajo pedagógico del año escolar enfocado en la correcta implementación de clases que logren los Objetivos de Aprendizajes (OA) planteados en las Bases Curriculares (MINEDUC, 2019).

Las bases curriculares se encargan de establecer los OA en búsqueda de la unión de habilidades, conocimientos y actitudes que preparen a los estudiantes para enfrentar desafíos en el aula o en la vida cotidiana. Con la flexibilidad que permite el currículum nacional han habido diferentes avances entre los años 1998 y 2005. Como parte de esta actualización, a partir de la promulgación de la Ley General de Educación (Ley N°20370) en el año 2009, el Ministerio de Educación ha impulsado un proceso de desarrollo curricular para los niveles educacionales correspondientes a Educación Básica y Media. De esta forma se establecieron las Bases Curriculares en el 2012 a partir de los Decretos N°433 y N°439 se conformaron para 1° a 6° básico, asimismo ocurre para los niveles de 7° básico a 2° Medio a través de los Decretos N°452 y N°614 de 2013.

Luego, mediante el decreto N°369 promulgado el año 2015, se establecieron las Bases Curriculares para la Formación Diferenciada Técnico-Profesional y Científico-Humanista, por medio de estas se buscó resguardar la consistencia de la trayectoria formativa mediante un enfoque de continuidad en los criterios, en la concepción didáctica y en la estructura curricular de estos niveles (MINEDUC, 2019). A partir de este último decreto es que finalmente aparecen las Bases Curriculares de 3° y 4° Medio aprobadas después de un largo proceso de elaboración y consulta, las que buscan entregar a todos los estudiantes del país equidad de oportunidades con el fin de poder trabajar la expansión y profundización de la formación general que reciben y de esta forma poder lograr los aprendizajes esenciales a partir de la integración de habilidades, conocimientos y actitudes. En el año 2020 debutaron estas Bases Curriculares para toda la educación del país, que a diferencia de las que la precedían, estas obedecen a la actualización del Marco Curricular del año 2009 correspondiente al Decreto Supremo de Educación N.º 254/2009.

Considerando el Aprendizaje para la Comprensión, un enfoque interdisciplinar y el Aprendizaje Basado en Proyectos en un contexto variable, digital e inclusivo que tiene como visión el MINEDUC sin duda que resulta un gran desafío para todos los docentes para quienes comienzan a regir estas bases de referencia curricular. Si bien se identifican los Objetivos de Aprendizajes, se determinan distintas evidencias del aprendizaje y se planifican ciertas actividades, existen ciertas deficiencias relacionadas a las habilidades de los profesores para la correcta enseñanza de la Estadística que implican que su formación debe

concentrarse tanto en las áreas del conocimiento como de la didáctica de la disciplina. Ortiz (2006) sugiere que la metodología utilizada por los profesores debe cambiar para poder enfocarse a lo planteado anteriormente.

Incida en el trabajo basado en proyectos, resolución de problemas, experimentación con fenómenos reales y utilización de la simulación, que, además de mejorar la comprensión, proporcionan modelos de la forma en que han de trabajar en clase con sus alumnos. (Godino et al., 2008).

1.4.2 Formación Estadística de los Profesores de Matemática

La actualización del Marco Curricular del 2009 trajo consigo un currículum escolar que plantea diferentes exigencias a los profesores que implementan componentes de temas referentes a Estadística y Probabilidad, es por esto que resulta muy importante que ellos entiendan el propósito que sigue la Estadística para no transformar sus procesos de enseñanza en la sola aplicación de logaritmos matemáticos o algebraicos (Araneda, A. et al. 2011). Sin embargo, no es solo en Chile que los docentes no son preparados en su totalidad para abordar estos desafíos, la formación inicial suele ser muchas veces solo teórica, algunos profesores solo han tenido estudios teóricos de probabilidad, pero no sobre su enseñanza (Araneda, A. et al. 2011). De esta forma el informe de la OECD (2010) aconseja a nuestro país dirigir los esfuerzos en la mejora de la formación inicial de los docentes en el área de la enseñanza práctica a diferencia de lo teórico para todos los niveles de educación para la búsqueda de la calidad de esta.

Existen estudios que han concluido que para los contenidos de Estadística y Probabilidad los docentes enseñan estos como técnicas de cálculo, lo que evidencia la carencia existente de conocimientos didácticos del área. De acuerdo con Batanero (2011) la educación de los docentes debe capacitarlos para que puedan realizar constantes procesos reflexivos sobre el significado de diferentes conceptos y contenidos a enseñar, para esto se sugieren puntos de vista históricos, filosóficos, cultural y epistemológicos del conocimiento acompañados por distintas relaciones con otros dominios de la ciencia.

Finalmente, como la enseñanza de la Estadística y Probabilidad es una disciplina relativamente nueva para muchos profesores, es que el marco curricular debe encargarse de proporcionar una firme estructura conceptual para esta educación, entregando el currículum de manera coherente, articulado y global, para que así los docentes sean capaces de lograr de manera completa su labor en el proceso de enseñanza y aprendizaje. ¿Cómo puede actuar un docente frente a la falta de herramientas didácticas para la enseñanza del Eje de Datos y Azar según los nuevos programas de estudio?

1.4.3 Organización Curricular de las Habilidades para la Enseñanza de la Matemática

Para los Programas de Estudio de Matemática de 3° y 4° Medio según el Decreto Supremo de Educación N.º 254/2009 aprobados el 2015 se planteaba apuntar a dos aristas para los lineamientos en búsqueda de promover el logro los Objetivos Fundamentales (OF) y el desarrollo de los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO). Para el logro de esta meta el MINEDUC buscaba orientar a los docentes mediante la secuenciación temporal de los Aprendizajes Esperados (AE), actividades de aprendizaje y evaluación de estos. En el programa de estudios se caracterizan las habilidades a tratar por ser de corte transversal, focalizando según los niveles establecidos y unidades a tratar. Al comparar las habilidades a través del avance académico de los estudiantes, ya sea con los años anteriores o siguientes, se podían establecer claras diferencias y similitudes en el enfoque que lleva cada actividad y evaluación para el logro de los OF.

Actualmente, las Bases Curriculares para los cursos de 3° y 4° Medio, según el acuerdo N° 104/2019 aprobados el 2019, en la asignatura de Matemática presentan dos ámbitos de objetivos de aprendizaje a los cuales obedecer y orientar las prácticas para la profundización de la enseñanza matemática para ambos niveles. El primero de estos objetivos trata sobre las habilidades que los estudiantes deban ser capaces de trabajar las que son comunes para todas las asignaturas matemáticas del nivel. Por otra parte, los otros objetivos están enfocados a el conocimiento y comprensión específico de la disciplina matemática. De esta forma ambos tipos de objetivos trabajan en conjunto durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, los cuales se articulan en conjunto de las actitudes señaladas en el marco de

Habilidades para el siglo XXI. Para los objetivos de aprendizaje de 3° y 4° Medio cuya naturaleza se relaciona con las habilidades se definen cinco tipos: *Resolver problemas, Argumentar y Comunicar, Modelar, Representar y Habilidades digitales*. A diferencia de las habilidades establecidas en los Planes y Programas del 2015, estas no necesariamente deben seguir un orden lineal, es por ello que los Objetivos de Aprendizaje se pueden tratar de manera independiente, abriendo el paso a distintos métodos de enseñanza que también se enuncian en las actuales Bases Curriculares en conjunto de definiciones conceptuales y didácticas para sustentar el logro de los OA. Es importante también considerar las Habilidades digitales, la Unidad de Currículum y Evaluación (2019) clarifican las habilidades de alfabetización digital y uso de las tecnologías en marco de las *Habilidades para el siglo XXI*, junto a esto se proponen orientaciones que busquen que los estudiantes sean capaces de establecer conexiones entre una situación acorde a su contexto y el concepto matemático que se involucra, las maneras en que se puede representar, las posibles variaciones y los significados de sus respuestas.

Por otra parte, en estos últimos Programas de Estudio de Matemática para 3° y 4° Medio se entregan orientaciones para la tarea de la evaluación. Se especifica en el documento la necesidad de entregar alternativas de evaluación según el contexto de la clase, ya sea en actividades de resolución de tareas o actividades de otro tipo, dentro de los cuales los estudiantes reciben evaluaciones que tengan un carácter de orientación y apoyo al aprendizaje. Se ofrecen alternativas como proyectos, diario de vida matemático, portafolio, presentación matemática, entrevista individual y actividades autoevaluables. Es importante considerar en todo momento entregar a los estudiantes las oportunidades de experimentar procesos de aprendizajes contextualizados dentro de la misma asignatura y sus contenidos, para así no solo sistematizarse o aplicar directamente los conocimientos y procedimientos aprendidos, convirtiéndose en un gran desafío cuando estos aprendizajes también deben ponerse en práctica para abordar diferentes problemas o fenómenos matemáticos con los que se podrían enfrentar.

Capítulo II: Marco Teórico.

2.1 Obstáculos en el Aprendizaje del Conocimiento Probabilístico

En el sentido de Brousseau, los obstáculos que pueden surgir en los procesos de enseñanzas y aprendizajes de la probabilidad y la estadística se relacionan con aquellos conocimientos que durante un tiempo han resultado satisfactorios para la resolución de problemas fijándose en el análisis que los estudiantes puedan realizar y que, posteriormente los conduzca a un resultando erróneo e inadecuado, frustrando la posibilidad a un nuevo análisis matemático.

De esta forma, se identifica como un obstáculo cognitivo a lo que puede ser capaz de explicar la existencia de errores y dificultades en el aprendizaje de los estudiantes. Estos obstáculos están descritos y caracterizados por Brousseau (1983).

- a. Un obstáculo se ha de considerar como un conocimiento y no como la falta de este. Las respuestas producidas por los estudiantes son a partir de un conocimiento y luego adaptadas a contextos que ellos encuentran con frecuencia. De esta forma, cuando se utiliza un conocimiento fuera de aquel contexto donde se produjeron respuestas acertadas entonces se obtienen respuestas incorrectas.
- b. El obstáculo produce contradicciones en los estudiantes, sin embargo, estos se resisten a ellas negando la oportunidad de establecer un conocimiento mayor. Para no generar rechazo hacia el nuevo saber entonces es importante identificar estas contradicciones para poder incorporar nuevos conocimientos en los estudiantes.
- c. Incluso después de haber comprendido la inexactitud de un conocimiento los estudiantes muchas veces terminan manifestando esporádicamente el error en nuevas situaciones.

A partir de lo anterior, Brousseau ha identificado tres tipos de obstáculos en la enseñanza de un conocimiento.

- a. Obstáculos Epistemológicos: Referidos a la esencia del propio concepto y su significado. La evolución histórica de conocimientos de la estadística y la probabilidad han mostrado diferentes errores que han logrado ser superados para la caracterización de

diversas nociones de ambas áreas de aprendizaje. En el eje de probabilidades, Poincaré (1979) estuvo en búsqueda de una noción de “azar” para derribar la idea de la ignorancia respecto a sucesos atribuidos a la aleatoriedad para así caracterizar a este como un elemento provocador de la complejidad existente en la realidad, ligando su significado a algo de un carácter más ontológico.

b. Obstáculos Ontogénicos: Otras veces llamados psicogenéticos, consideran las características del desarrollo del estudiante como niño para así otorgar significados a las nociones que tengan. Por ejemplo, Hoemann y Ross (1982) establecen que los estudiantes menores de seis años no logran tener bien definido la relación causa-efecto y, en consecuencia, no logran saber la diferencia entre las nociones de azar y causalidad. De esta manera, incluir nociones en la enseñanza sustentará en varias ideas que permitan comprender la naturaleza de los fenómenos a los que se enfrentan los estudiantes, de lo contrario, se produce un obstáculo didáctico. En otros casos estos obstáculos se asocian a las estrategias de razonamiento de los estudiantes, este puede referirse a razonamientos de los sujetos que en un marco global de decisión obvian la aleatoriedad que está presente y evalúan en función del resultado siguiente cuando se encuentra bajo situaciones de incertidumbre (Konold, 1995).

c. Obstáculos Didácticos: Resultan a partir de las elecciones didácticas establecidas para la enseñanza. Se centran en dos aspectos referidos a la construcción del conocimiento, uno relacionado al uso del lenguaje técnico y otro con los contextos de ejemplificación y experimentación para la construcción del conocimiento. Se precisan dos tipos de obstáculos asociados a la didáctica. En diferentes diseños curriculares se especifica la importancia del lenguaje en la construcción del aprendizaje, es por eso por lo que se sugiere que:

Conviene precisar el vocabulario, de forma que a cada nivel de descripción se asocian términos específicos que permitan a los alumnos tener en cuenta el punto de vista en que nos situamos: realidad, sentido, sensible, modelo, modelo probabilista (Henry, 2001, p. 164).

Es importante que el estudiante logre diferenciar entre lenguaje cotidiano y lenguaje técnico, por ejemplo, resulta común que ellos hayan utilizado términos y expresiones relacionados al eje de Datos y Azar ya sea en juegos o en su vida diaria, donde muchas veces no adquieren el mismo sentido que en el tratamiento formal de estos temas (Ortiz y Serrano, 2001). La falta de claridad de la noción de un concepto da paso a interpretaciones ambiguas, obstaculizando la comprensión del mismo, esto indica la existencia de un tratamiento inadecuado en la forma de contextualizar y referenciar los objetos que puede ocasionar un obstáculo didáctico en la comprensión de los conceptos disciplinares en sí. Por ejemplo, la introducción de simbolismos en vez de ejemplos concretos donde los estudiantes puedan apropiarse del concepto.

Para ello Pimm (1987) encuentra tres tipos diferentes de palabras en la enseñanza matemática:

- Palabras técnicas que agrupa todas aquellas no utilizadas en el lenguaje cotidiano.
- Términos que aparecen en el plano de la matemática y de la cotidianidad de los estudiantes, aunque no siempre posean el mismo significado en ambos contextos.
- Palabras con significados iguales o muy cercanos en ambos contextos.

De esta manera, si el estudiante no presenta gran familiaridad con palabras del tercer tipo, entonces se podrán crear dificultades de comunicación dentro de la sala de clases al convertir estas en términos de la segunda categoría. Finalmente, hay que considerar lo que indica Heitele (1975) sobre las posibilidades didácticas deducidas a partir de experiencias empíricas, pues estas por lo general vienen más limitadas que incluso los textos escolares, es por ello que el material concreto y su uso exclusivo como instrumento para introducir nociones conceptuales a los estudiantes podrían no favorecer el aprendizaje significativo pese a facilitar una asociación del conocimiento a un objeto. (Serradó, 2003).

A partir de lo anterior, existen varios estudios que analizan diferentes perspectivas sobre los obstáculos y dificultades en la enseñanza de la probabilidad y la estadística. Particularmente, en la enseñanza de la estadística descriptiva Minnaard (2015) plantea un análisis desde el enfoque ontosemiótico de esta, detectando dos tipos de errores comunes cometidos por los estudiantes: confusión de conceptos y errores de cálculos.

Confusión de conceptos: Confunden variabilidad relativa y absoluta, la media con mediana, varianza con desvío estándar y frecuencia absoluta con acumulada.

Errores de cálculo: Calculan mal la media o la desviación estándar, la amplitud cuando es dato, consideran frecuencias negativas, así como los cuadrados en varianza o desviación estándar.

En el ámbito de la probabilidad también se reconocen diferentes errores, obstáculos y dificultades en los procesos de enseñanza. Minnaard (2015) detecta también errores y confusiones cometidos por los estudiantes en los procesos de resolución de problemas probabilísticos, por ejemplo, en el contexto de la probabilidad condicional los alumnos confunden $P(A \cup B)$ con $P(A|B)$ o incluso con $P(A)$ o $P(B)$, asimismo calculan erróneamente $P(A \cap B)$ como $P(A) \cdot P(B)$ cuando los sucesos A y B no son independientes. Además, Díaz C. y De la Fuente, I. (2006) exponen que los errores que se producen en los distintos pasos del proceso de resolución de problemas asociados a probabilidad comienzan con la identificación incorrecta de los sucesos y sus probabilidades asociadas, además de que para muchos estudiantes les es difícil diferenciar entre probabilidades simples compuestas y condicionales o confunden una probabilidad condicional $P(A|B)$ con su inversa $P(B|A)$, dificultades también señaladas por Falk (1986). Díaz C. y De la Fuente, I. (2006) señalan también que el teorema de Bayes es un objeto matemático complejo ya que se involucran una serie de conceptos y propiedades previas que dificultan su comprensión, como lo son la probabilidad simple compuesta y condicional, partición y complementario, axioma de la unión y regla del producto, y que por tanto se necesita más tiempo para enseñar razonamiento bayesiano para el logro exitoso por parte de los estudiantes.

En el campo de la variable aleatoria Heitele (1975) espera que los estudiantes tengan una intuición adecuada para dicha variable. Minnaard (2015) detecta que los errores cometidos por los estudiantes en la resolución de problemas asociados a la variable aleatoria recaen en que, si bien reconocen la distribución presente no logran resolver de manera completa o simplemente no resuelven los ejercicios, así también construyen mal la función suma de variables aleatorias normales. Vilca (2015) tipifica que los errores de los estudiantes recaen en las dificultades para identificar la variable aleatoria de distribución binomial, sin embargo, es menor la dificultad que tienen para identificar los parámetros de la distribución de

probabilidad con la que se está trabajando, y por tanto las dificultades en el área de la variable aleatoria están ligadas directamente a la comprensión de los objetos matemáticos relacionados.

En lo relativo a la distribución normal, Valverde (2017) apunta que muchas veces en las definiciones de los textos escolares existe un elevado uso de definiciones confusas, donde está presente un alto nivel de formalidad en su redacción, muchas veces no se asocian ejemplos relacionados, lo que puede dificultar la comprensión y asimilación de estos según señala Skemp (1980). A su vez, Tauber (2001) destaca la importancia de la presencia del lenguaje gráfico para la enseñanza en el campo de la variable aleatoria. En diversos casos no se suelen incluir definiciones intuitivas a conceptos como son descritos en el caso de la variable aleatoria por Tauber (2001) o para la distribución muestral por Alvarado (2007).

La importancia entre la vinculación de la definición de histograma y la función de densidad es quien genera la correcta interpretación del objeto matemático función de densidad de probabilidad, donde pareciese que los estudiantes no logran realizar una conexión entre la realidad y dicho concepto (Calandra y Costa, 2015). Por tanto, es importante seguir lo que propone Meyer (1992) y Maronna (1995) sobre el uso de una interpretación teórica, mientras que Devore (2008) así como Montgomery y Runger (2006) proponen una interpretación intuitiva a partir de una aplicación para un problema concreto al vincular conceptos de estadística y probabilidad.

Es por lo anterior que considerar lo sugerido por Rossman y Short (1995) frente a presentar a los estudiantes una variedad de aplicaciones en problemas reales, proponiendo situaciones interactivas y usando la tecnología para facilitar el aprendizaje.

2.2 Resolución de Problemas Estadísticos a partir de la Matemática.

Los estudiantes frente al mundo se encuentran con una diversidad de información, específicamente se podría mencionar que están rodeados de datos, por ejemplo, los números telefónicos, precios de algo que quisieran adquirir, trabajos esporádicos, incluso en lo físico cuando están en proceso de crecimiento cada centímetro es un desafío. Los ciudadanos se enfrentan a diario a situaciones de incertidumbre, es por ello deben presentar una actitud

crítica frente a distintos estímulos e informaciones erróneas que aparecen en medios de comunicación (Mineduc, 2019).

Muchas veces se ha pensado que la estadística es solo una de las tantas áreas que se puede estudiar en matemática. Sin embargo, la presencia de esta va más allá, no necesariamente se debe hacer un ligamiento directo entre ambas. Para entender de mejor manera:

La estadística es una disciplina metodológica. No existe por sí misma, sino que ofrece a otros campos de estudio un conjunto coherente de ideas y herramientas para el tratamiento de datos. La necesidad para tal disciplina surge de la omnipresencia de la variabilidad. (Moore y Cobb, 1997)

De esta manera, entonces resolver problemas estadísticos es un proceso que lleva a una investigación por parte de los estudiantes. Es por esto que la educación estadística llega a alcanzar grandes procesos matemáticos cuando el nivel de comprensión aumenta. Esto ocurre porque la estadística es diferente de la matemática, la primera no se presenta para argumentar a la otra, ni una está contenida totalmente dentro de la otra.

A partir de esto, el reporte referente a las pautas para la evaluación e instrucción de la educación estadística, más conocido como Reporte GAISE (2018), plantea la importancia que tiene la alfabetización estadística, ya que es importante acentuar elementos como el diseño de recolección de información, exploración de datos y la interpretación de resultados. Estos dependen en gran medida de la introducción que tengan los problemas y el contexto donde estén situados, es decir, el nivel de matemática involucrado es formal y limitado. Así también, según lo plantea el reporte se debe hacer una separación entre probabilidad y el análisis estadístico la cual debiese estar delimitada en el currículo educativo.

Para la educación estadística previa a los estudios superiores, el Reporte Gaise (2018) resalta el énfasis que debe tener las formas en las que es usada la probabilidad en el pensamiento estadístico, señalando que en dichos niveles educativos es suficiente con una comprensión intuitiva por parte de los estudiantes. El uso de la probabilidad, en los diferentes niveles de enseñanza, como un modelo matemático y como una herramienta estadística no solo utiliza diferentes aproximaciones, sino también diferentes tipos de razonamiento (Franklin, C. et al.,

2007). Por ejemplo, el reporte explica cómo estudiantes inducen respuestas sacando una conclusión general de observaciones de resultados experimentales, como lo sería en determinar si una moneda es justa o no al lanzarla. Finalmente, el reporte señala dos usos importantes de la “aleatorización” en el trabajo de muestreo y el diseño de experimentos, recalcando que esta hace mucho más que remover el sesgo en la selección y asignación, pues conduce a variabilidad del azar en resultados que pueden ser descritos con modelos probabilísticos, así estudiantes quieren saber si el resultado observado es debido al azar o a algo más, trabajando directamente con la idea de significancia estadística. Por ejemplo, las mediciones repetidas de un mismo objeto pueden variar entre sí debido a la imprecisión del instrumento de medición. Es importante considerar que, a partir de lo anterior, para el caso de Chile, se propuso un ajuste en el currículum (MINEDUC, 2009) donde se incorpora el eje de Datos y Azar desde 1º Básico hasta 4º Medio.

Sin embargo, cabe destacar que se debe hacer énfasis a la forma en la que se utiliza la probabilidad en el pensamiento estadístico, por lo que debe estar presente al menos una comprensión intuitiva de esta según el nivel en el que se esté tratando (Franklin et al., 2007).

Así bien, para poder resolver problemas que estén presentes en el área de la estadística y probabilidad los estudiantes deben pasar por un proceso investigativo el cual involucra cuatro componentes, estos fueron planteados por el reporte y entrega una clara forma de cómo abordar correctamente aquellas situaciones.

I. Formulación de Preguntas

- Clarificar el problema en cuestión.
- Formular una o más preguntas que puedan ser respondidas con datos.

II. Recolección de Datos

- Diseñar un plan para recolección de los datos apropiados.
- Emplear el plan para recolección de los datos.

III. Análisis de Datos

- Seleccionar métodos gráficos y numéricos apropiados.
- Usar estos métodos para analizar los datos.

IV. Interpretación de Resultados

- Interpretar el análisis.
- Relacionar la interpretación con la pregunta original.

Dichas etapas comparten las ideas del modelo PPDAC propuesto por Wild y Pfannkuch (1999), aunque si bien en la guía GAISE, por ejemplo, no presenta una etapa específica para planear estrategias de resolución a la pregunta de la investigación, sin embargo, la etapa de recolección de datos involucra el componente de “Plan” asociado al ciclo investigativo PPDAC en conjunto de un enfoque sobre la omnipresencia de la variabilidad en que puede ser cuantificada y explicada. (Estrella, S. 2017).

2.3 Desarrollo del pensamiento estadístico a partir del Ciclo Investigativo PPDAC

Wild y Pfannkuch (1999) proponen un marco de referencia para lo correspondiente al pensamiento estadístico que abarca cuatro grandes dimensiones que son utilizadas en el proceso de resolución a un problema estadístico. Una de estas dimensiones es el ciclo investigativo del pensamiento estadístico, según el marco de referencia se detectan cinco componentes que orientan la manera en que se debe afrontar en el transcurso de una investigación de tipo estadística. La manera en que se propone actuar y pensar en el transcurso de una investigación, desde una mirada didáctica y durante el diseño de una clase, consta de Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones (PPDAC), este ciclo orienta entonces a los docentes para ofrecer la ocasión de poder formular problemas, planificar la obtención de los datos, la recolección de los datos, analizarlos y obtener una conclusión a partir de ellos. En la figura de a continuación (Ver Figura 1) se señalan las cinco fases del ciclo y las actividades que componen dichas etapas.

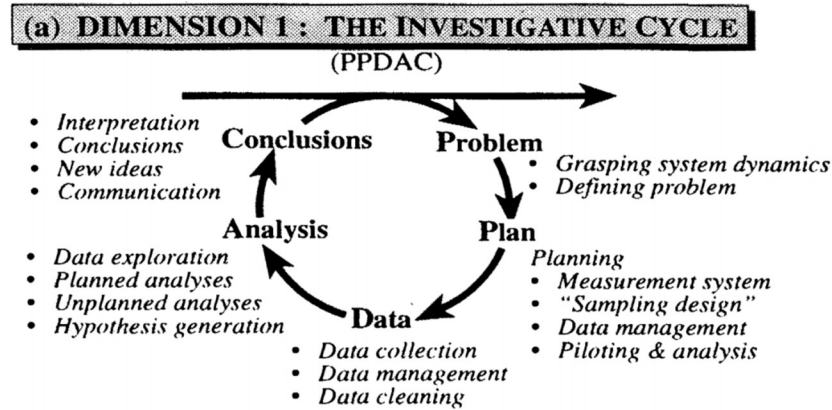


Figura 1. Dimensión 1: Ciclo de Investigación (PPDAC) (Wild y Pfannkuch, 1999)

Esta dimensión está estrechamente relacionada con los tipos de pensamientos estadísticos y el conocimiento a desarrollar en los estudiantes. Los tipos de pensamientos estadísticos son cinco: *reconocer la necesidad de los datos, transnumeración, consideración de la variación, razonamiento con modelos estadísticos e integración de lo estadístico y lo contextual*. La combinación entre los tipos de pensamiento estadístico y los cinco componentes del ciclo investigativo deben tenerse en cuenta desde el diseño de las actividades de la clase aportando significativamente en la planificación de las tareas.

Una manera para lograr ejemplificar la relación que existe entre las etapas del ciclo investigativo y los tipos de pensamientos estadísticos es propuesto por algunos autores, particularmente consideramos el siguiente.

La propuesta de un problema estadístico, proscribe la utilización de los datos inventados, lo que lleva a reconocer la necesidad de datos reales; los elementos de planificación, datos y análisis, incluyen procesos de transnumeración, considerando de la variación y el razonamiento con modelos estadísticos; las conclusiones deben integrar lo estadístico con lo contextual.

(Gómez. A y Sánchez E., 2008)

Los autores Wild y Pfannkuch (1999) señalan la manera de actuar y pensar durante el proceso de una investigación estadística, relacionando el ciclo investigativo con la abstracción y

resolución de un problema estadístico. Además, señalan que, si el problema investigativo a resolver impulsa la curiosidad, los estudiantes tendrán beneficios a largo plazo, desarrollando la habilidad de comprensión que se desee en el proceso a partir del contexto del problema. En cada etapa del Ciclo de Investigación PPDAC se adquiere conocimiento e identifican las diversas necesidades de los estudiantes, las cuales servirán de requerimientos para poder continuar con la siguiente etapa hasta el logro del objetivo planteado.

2.4 Contenidos a Tratar en los Niveles de 3° y 4° Medio en el Eje de Datos y Azar.

Los contenidos que se deben abordar en los niveles de 3° y 4° Medio en el eje de estudio Datos y Azar del nuevo programa de estudio para la formación general que se implementa el año 2020 son:

- Medidas de Dispersión.
- Esperanza y Varianza de una Variable Aleatoria Discreta.
- Probabilidad Condicional.
- Distribución Binomial.
- Distribución Normal.

Cabe mencionar que no están siendo abordados todos los contenidos de tercero y cuarto medio correspondientes al eje de Datos y Azar.

2.4.1 Contenidos a Tratar en el Nivel de 3° Medio.

Para poder hablar de la probabilidad condicional, previamente se deben considerar una serie de conceptos estadísticos relacionados.

*El **espacio muestral** (o también llamado espacio muestra de un experimento aleatorio) es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento, y se le denota generalmente por la letra griega Ω (omega). Más adelante mostraremos que este conjunto no es necesariamente único y su determinación depende del interés del observador o persona que realiza el*

experimento aleatorio. En algunos textos se usa también la letra S para denotar al espacio muestral.

(Rincón, 2007, p. 7).

Considerar como ejemplo el lanzamiento de un dado de seis caras. El experimento posee seis casos posibles como resultado, lo que se puede registrar algebraicamente como se presenta a continuación:

E: Lanzamiento de un dado de seis caras.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

En el texto de estudio de Rincón (2007) titulado “Curso elemental de Probabilidad y Estadística”, simboliza al *espacio muestral* como Ω y en cambio el texto de Meyer (1992) titulado “Probabilidad y Aplicaciones Estadística” lo simbolizan con una S , pero ambos símbolos representan el conjunto de resultados posibles de un experimento aleatorio.

Por otro lado, llamaremos evento a cualquier subconjunto del espacio muestral y denotaremos a los eventos por las primeras letras del alfabeto en mayúsculas: A , B , C , etc.

(Rincón, 2007, p. 7).

Por otra parte, se denota la cardinalidad de un evento como $\#A$, $\#B$ o $\#C$, e indica la cantidad de elementos que posee dicho evento.

Para ejemplificar, considerando el experimento planteado anteriormente E , es posible definir el siguiente evento o suceso:

A: la cara resultante es un número impar.

$$A = \{1,3,5\}$$

$$\#A = 3$$

Es común utilizar los siguientes conceptos y simbologías: Espacio muestral Ω (*omega*), los resultados posibles o elementos del espacio muestral como ω (*omega minúscula*). Así también las siguientes nomenclaturas: pertenece ($\in$), no pertenece ($\notin$), contención parcial o total ($\subset$

y $\subseteq$) y no contención ($\nsubseteq$) (Rincón, 2007). Estableciendo las relaciones entre los conjuntos más conocidos, tales como:

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$$

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$$

$$A - B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \vee \omega \notin B\}$$

$$A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}.$$

Gráficamente se puede expresar:

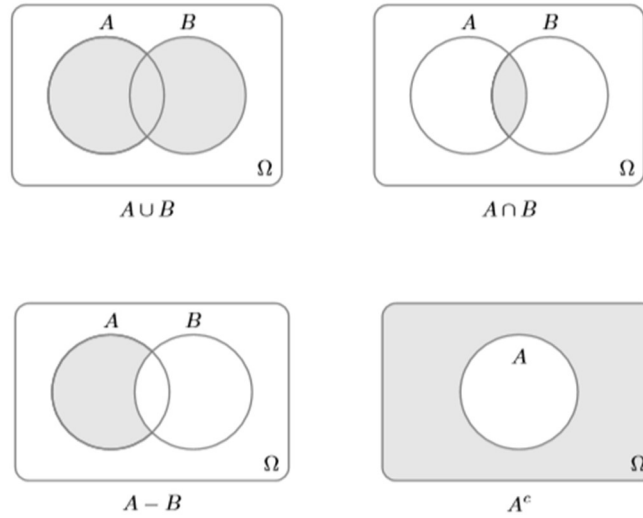


Figura 2. Representación gráfica de los conjuntos y sus operadores.

Es posible analizar y definir lo que es la probabilidad o probabilidad clásica, concepto fundamental para la probabilidad condicional e independencia. Según Rincón (2007), la **probabilidad clásica** de un evento (A) está definida como la división o cociente entre el número de casos posibles (cardinalidad del evento) con el número de casos totales (cardinalidad del espacio muestral) (p. 13)

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \text{ donde } \#\Omega > 0$$

Es importante tener en cuenta que para calcular probabilidades y vincularlas con los eventos, es necesario conocer los axiomas o postulados de las probabilidades, establecidas por Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), quien fue un matemático ruso que realizó aportes en el área de teoría de la probabilidad y de topología.

Según Rincón (2007), los axiomas de la probabilidad, se utilizan como reglas de cálculos de las probabilidades. (p.15)

1. $P(A) \geq 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, cuando $A \cap B = \emptyset$.

Para el ejemplo propuesto anteriormente, la probabilidad de que al lanzar un dado este resulte un número impar puede ser representada y calculada de la siguiente manera:

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{\# \{1,3,5\}}{\# \{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

A partir de dichos Axiomas de probabilidad y los conjuntos o eventos asociados, se desprenden las siguientes propiedades de las cuales se plantea en el texto Curso Elemental de Probabilidad y estadística (Rincón L.) publicado en el año 2007, las cuales se pueden demostrar utilizando los axiomas de probabilidad.

- a) $P(A^c) = 1 - P(A)$.
- b) $P(\emptyset) = 0$.
- c) Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.
- d) Si $A \subseteq B$, entonces $P(B - A) = P(B) - P(A)$.
- e) $0 \leq P(A) \leq 1$.
- f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- g) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

La probabilidad clásica ayuda a definir el concepto de probabilidad condicional, este último es posible definir utilizando el siguiente ejemplo:

Considerar un lote de 50 artículos, de los que 20 son defectuosos. Se deben escoger dos artículos sin reponer, para esto se define el experimento y los siguientes sucesos:

E: Extraer dos artículos sin reponer de un lote de 50 artículos.

Considerar los siguientes sucesos:

A : el primer artículo extraído es defectuoso.

B : el segundo artículo extraído es defectuoso.

Para comprender la probabilidad condicional se analizan dos casos:

1: Extracción con sustitución de los artículos

2: Extracción sin sustitución de los artículos.

1. Si se extraen los artículos con sustitución, entonces las probabilidades quedan definidas como $P(A) = P(B) = \frac{20}{50}$. En este caso cada vez que se elige un artículo hay 20 defectuosos entre un total de 50.
2. Si se extraen los artículos sin sustitución, se definen las probabilidades asociadas a los sucesos mencionados como $P(A) = \frac{20}{50}$, sin embargo $P(B) = \frac{19}{49}$ ya que no se repone el artículo seleccionado en la primera extracción suponiendo que ocurrió el suceso A (el primer artículo extraído resultó defectuoso). Por otra parte, si el suceso A no ocurre, $P(B)$ se ve afectado directamente. Desde allí nace la necesidad de presentar el siguiente concepto.

Probabilidad Condicional.

Rincón (2007) afirma que: *Sean A y B dos eventos en donde B es tal que su probabilidad es estrictamente positiva. La probabilidad condicional del evento A dado el evento B, denotada por $P(A|B)$.* (p.28). Restringiendo que la probabilidad condicional se establece dado un evento ya ocurrido anteriormente.

En el ejemplo anterior, se calcula $P(B|A) = \frac{19}{49}$. Porque A ha ocurrido, entonces al sacar por segunda vez un artículo quedan solo 49 de ellos, de los cuales 19 son defectuosos.

Al calcular $P(B|A)$, se obtiene la probabilidad del suceso B dado que A ha ocurrido, por lo que el espacio muestral se reduce tras la ocurrencia del suceso A.

Según Meyer P. (1992), la repetición de un experimento ($\mathcal{E}$) n veces, que considerando el número respectivo de ocurrencia de los sucesos A , B y $(A \cap B)$ en las n repeticiones, el número de ocurrencia del suceso $A \cap B$ dado que ocurrió B representa la frecuencia relativa de A entre los casos en que A ocurrió (p. 35). Obteniendo finalmente la probabilidad condicional expresada a través de la siguiente igualdad:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ con } P(B) > 0.$$

Rincón L. (2007) afirma, que la $P(A|B)$ con $P(B) > 0$, satisface los tres postulados o axiomas establecidos por el matemático A. N. Kolmogorov (p.28)

1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$
2. $P(\Omega|B) = 1$
3. $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
4. Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de eventos disjuntos dos a dos (A_i y A_j no pueden suceder a la vez si $i \neq j$), entonces:

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$$

Como consecuencia de la definición de probabilidad condicional se obtienen las igualdades:

- a) $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$
- b) $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

Independencia de Sucesos

Se dice que dos eventos cualesquiera A y B son independientes si se cumple la condición $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Esta igualdad es equivalente a la expresión $P(A|B) = P(A)$ cuando $P(B) > 0$. La ventaja de esta última expresión es que posee una interpretación sencilla: Dice que la probabilidad del evento A es la misma cuando sabemos que ha ocurrido el evento B (lado

izquierdo), que cuando no sabemos nada (lado derecho). Es decir, la ocurrencia del evento B no afecta la probabilidad del evento B y por lo tanto son independientes. De manera análoga puede interpretarse la igualdad equivalente $P(B|A) = P(B)$, suponiendo naturalmente que $P(A) > 0$. En la mayoría de los casos de aplicación simplemente supondremos que dos eventos dados son independientes recurriendo únicamente a justificaciones intuitivas.

(Rincón, 2007, p. 29).

Teorema de Probabilidad Total

Según Rincón (2007), para enunciar el teorema de probabilidad de total hay que definir una partición. Sean los sucesos dependientes $A, B_i (i = 1, \dots, n)$, considerar que se asocia al suceso A el espacio muestral Ω y considerar $B_1, B_2, \dots, B_n$ una partición disjunta de Ω , es decir $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ (p.30), definiendo así:

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_n = \Omega$$

Como se muestra en la siguiente imagen:

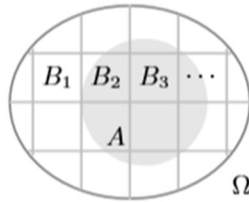


Figura 3. Representación de las particiones de los conjuntos

Rincón (2007) afirma, posteriormente con la partición definida (p.31), se define como:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_i) \text{ , donde } B_i \cap B_j = \emptyset$$

Utilizando la probabilidad de la unión de sucesos excluyentes se obtiene:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_i), \text{ con } 1 \leq i \leq n$$

Además, cada término $P(A \cap B_i)$ se puede expresar como $P(A/B_i) \cdot P(B_i)$ obteniéndose el **Teorema de Probabilidad Total**, definido de la siguiente manera:

$$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A/B_i) \cdot P(B_i), \text{ con } 1 \leq i \leq n$$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A \cap B_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i)$$

Rincón (2007), afirma que la expresión para la probabilidad total (p.31), será:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i).$$

Teorema de Bayes

Por otra parte, como menciona Rincón (2007) en el texto *Curso Elemental de Probabilidad y Estadística*, se desprende un segundo teorema asociado a la a probabilidad condicional llamado **Teorema de Bayes**, definido de la siguiente manera:

Sea la partición $B_1, B_2, \dots, B_n$ del espacio muestral Ω , cada elemento de la partición tiene una probabilidad positiva asociada. Sea $P(A) > 0$, entonces para cada elemento $j = 1, 2, 3, \dots, n$ se cumple:

$$P(B_j | A) = \frac{P(A | B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i) \cdot P(B_i)}$$

2.4.2 Contenidos a Tratar en el Nivel de 4° Medio.

Para comprender los contenidos a tratar en 4° Medio, es necesario definir y diferenciar los conceptos variables aleatoria discreta y continua, uno de ellos es abordado anteriormente en otros niveles educacionales, pero ambos son un pilar para poder desarrollar los conocimientos del eje Datos y Azar en el último nivel escolar. Posteriormente se definen los contenidos propuestos que deben manejar para el cumplimiento de los Objetivos de Aprendizajes (OA) y las habilidades propuestas en los nuevos planes y programas de estudio de 4° Medio.

Dado un **experimento aleatorio** cualquiera, una variable aleatoria es una transformación X del espacio de resultados Ω al conjunto de números reales, esto es,

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

A menudo se escribe simplemente v.a. en lugar del término **variable aleatoria**. En sentido estricto una variable aleatoria es una función de Ω en $\mathbb{R}$ que satisface además cierta condición de medibilidad.

(Rincón, 2007, p.35)

Como se muestra en la siguiente imagen, la denotación de una variable aleatoria:

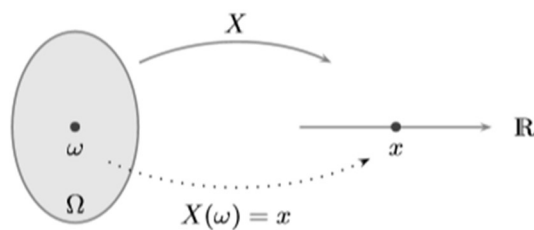


Figura 4.

Los ejemplos más comunes de una variable aleatoria suelen ser aquellos asociados a experimentos que utilizan tableros, cartas de naípe, monedas y dados, ya que se conocen los resultados posibles del espacio muestral. Considerando como ejemplo el lanzamiento de un dado de seis caras se puede definir:

Sea el experimento aleatorio (E), el suceso (A) y la variable aleatoria (X):

E : Lanzamiento de un dado de seis caras.

A : La cara resultante es 5.

X : Número de veces que se obtiene el número cinco al lanzar cuatro veces el dado.

Los posibles resultados de la variable aleatoria determinan el recorrido de esta. Se define el recorrido de la siguiente manera:

$$Rec(X) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$$

Por tanto, el recorrido es un conjunto de valores reales. Para la variable aleatoria X definida anteriormente el recorrido queda definido por:

$$Rec(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

*Considerando el conjunto de valores que una variable aleatoria puede tomar, vamos a clasificar a las variables aleatorias en dos tipos: discretas o continuas. Decimos que una v.a. es **discreta** cuando el conjunto de valores que ésta toma es un conjunto discreto, es decir, un conjunto finito o numerable. Por ejemplo, el conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ es un conjunto discreto porque es finito, lo mismo ocurre pues, aunque es infinito, es numerable y por lo tanto discreto. Por otra parte, decimos que una **variable aleatoria es continua** cuando toma todos los valores dentro de un intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. Esta clasificación de variables aleatorias no es completa pues existen variables que no son de ninguno de los dos tipos mencionados.*

(Rincón, 2007, p.37)

Según Rincón (2007), es posible calcular la probabilidad de ocurrencia de los elementos del recorrido de una variable aleatoria discreta mediante una función llamada **función de probabilidad**. Dicha función está denotada por $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ (p.39) y se define como:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{si } x = x_1, x_2, x_3, \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además, Rincón el año 2007 afirma en su texto *Curso Elemental de la Probabilidad y Estadística* que la función de probabilidad asociada se denota con la letra f y cumple los siguientes dos axiomas:

i) $f(x) \geq 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$.

ii) $\sum_x f(x) = 1$

A partir de la función de probabilidad, Rincón afirma el año 2007 en su texto *Curso Elemental de la Probabilidad y Estadística* que es posible conocer la **función de probabilidad acumulada**, la cual se denota por:

$$F(X) : R \rightarrow [0,1]$$

Definiendo:

$$F(X) = P(X \leq x).$$

Para la función de probabilidad acumulada, se le asigna a cada valor del dominio en el intervalo $(-\infty, x)$ se le asocia un valor perteneciente a $0 \leq x \leq 1$.

A partir de lo definido anteriormente es posible estudiar diferentes tipos de distribuciones de probabilidad asociada una variable aleatoria discreta como lo son la Distribución Uniforme Discreta, Distribución Bernoulli, Distribución Binomial, Distribución Geométrica, Distribución Poisson, Distribución Binomial Negativa y Distribución Hipergeométrica. La que se son utilizadas en este caso son la distribución Bernoulli y la distribución Binomial.

Distribución Bernoulli

Según Rincón (2007), una variable aleatoria con función de probabilidad asociada a una Distribución Bernoulli considera dos posibles resultados en un Experimento: el éxito y el fracaso, los que se asocian los valores 1 (*Éxito*) y 0 (*Fracaso*) (p.53), además sus respectivas probabilidades son:

$$P(\text{Éxito}) = P(1) = p$$

$$P(\text{Fracaso}) = P(0) = (1 - p).$$

Un parámetro es una cantidad numérica real calculada sobre una población, esta resume los valores o información sobre algún aspecto. Comúnmente los parámetros más utilizados son la media, varianza, probabilidad (proporción), entre otros.

Rincón (2007), afirma que una variable aleatoria con distribución Bernoulli se denota por $X \sim Ber(p)$. Es posible observar que en el parámetro definido en el estudio será $P(\text{Éxito}) =$

p . (p.53). A continuación, se presenta la función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria Bernoulli y sus parámetros:

Distribución Bernoulli

$$f(x) = p^x (1 - p)^{1-x}$$

para $x = 0, 1$.

Parámetro: $p \in (0, 1)$.

Media: p .

Varianza: $p(1 - p)$.

Figura 5. Distribución Bernoulli y sus parámetros

Distribución Binomial

Además, Rincón en el año 2007 afirma en el texto *Curso Elemental de la Probabilidad y Estadística* que la Distribución Binomial considera la repetición de n experimentos Bernoulli, con igual probabilidad de éxito en cada una de esas repeticiones. Al utilizar el principio multiplicativo en el análisis algebraico de dicho experimento se determina la función de probabilidad asociada a la Distribución Binomial. Se denota a la variable aleatoria discreta con distribución binomial como $X \sim \text{Bin}(n, p)$, con parámetros n para el total de experimentos y p a la probabilidad de éxito. La función de probabilidad y sus parámetros son:

Distribución binomial

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

para $x = 0, 1, \dots, n$.

Parámetros: $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$.

Media: np .

Varianza: $np(1 - p)$.

Figura 6. Distribución Binomial y sus parámetros

Distribución Normal

Rincón (2007), afirma que una variable aleatoria es continua cuando su recorrido corresponde a todos los valores presentes dentro de un intervalo $(a, b) \subseteq R$. Dicha variable posee función de probabilidad (f) que en este caso se llamará función de densidad, la cual es una función continua y función de probabilidad acumulada (F)(p.41).

Según Rincón en el año 2007 en el texto *Curso Elemental de la Probabilidad y Estadística*, afirma sea X una variable aleatoria continua, decimos que la función integrable y no negativa $f(x): R \rightarrow [0, \infty)$ es la función de densidad de X si para cualquier intervalo (a, b) de R se cumple la igualdad:

$$P(X \in (a, b)) = \int_a^b f(x)dx.$$

La probabilidad de que la variable tome un valor dentro del intervalo (a, b) se puede calcular como el área bajo la curva de la función de densidad en el intervalo (a, b) .

Rincón (2007), establece que toda función de densidad $f(x)$ de una variable aleatoria continua cumple con los siguientes axiomas (p.41)

- a) $f(x) \geq 0, x \in R$.
- b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

La función de distribución acumulada, está definida como:

$$F(x): R \rightarrow [0,1]$$

Y se cumple que:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Rincón (2007), afirma que toda función de distribución acumulada asociada a una variable aleatoria continua satisface las siguientes propiedades (p.44):

- a) $0 \leq F(x) \leq 1$.
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.
- d) Si $x_1 \leq x_2$, entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$.
- e) Si $x_1 \leq x_2$, entonces $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.
- f) La función es continua por la derecha.

Rincón (2007), afirma que la **Distribución Normal** es una de las distribuciones muestrales continuas más importantes dentro de los estudios de datos. La distribución normal se denota a partir de una variable aleatoria continua X con los siguientes parámetros (p.67):

$$\mu \in R \text{ y } \sigma > 0$$

Considerando μ como media y σ la desviación estándar.

La función de densidad está definida por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{Con } \mu \in R \text{ y } \sigma > 0$$

Según Rincón (2007), afirma que una variable aleatoria con Distribución Normal como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Los significados gráficos de los parámetros de la Distribución Normal, se pueden visualizar en la siguiente gráfica (p.67):

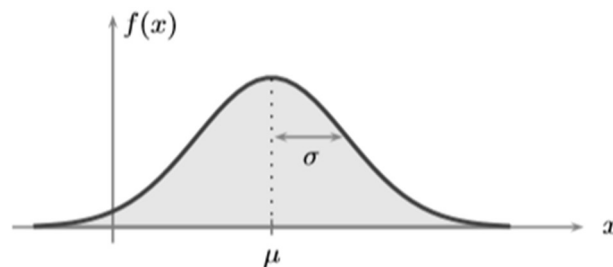


Figura 7. Gráfica de una distribución normal.

Como se muestra en la gráfica de la Figura 7, los parámetros determinan las características de la curva. En resumen, se presenta el siguiente cuadro las características de la Distribución Normal:

Distribución normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

para $x \in \mathbb{R}$.

Parámetros: $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

Media: μ .

Varianza: σ^2 .

Figura 8. Distribución Normal y sus parámetros.

Rincón (2007), establece que la variable aleatoria continua X distribuye normal con parámetros μ y σ^2 , los que pueden ser transformados en una variable aleatoria con Distribución Normal Estándar mediante un proceso llamado estandarización o tipificación, el cual modifica los parámetros definidos anteriormente para ajustarlos en $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ (p. 67). Determinando así la función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Para transformar una variable aleatoria continua con distribución normal en una variable aleatoria continua estándar se utiliza la siguiente igualdad:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Rincón (2007), afirma que, para utilizar la estandarización en una variable aleatoria con distribución normal, se debe cumplir entonces la siguiente igualdad:

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

La nueva variable aleatoria será denotada con letra Z y cumple con todas las propiedades de la Distribución Normal no Estándar. Considerando la variable aleatoria X con distribución $N(\mu, \sigma^2)$, si se desea calcular $P(a < x < b)$, para $a < b$ números dados, al utilizar el método de estandarización se considera entonces la siguiente igualdad (p.68):

$$\begin{aligned} P(a < x < b) &= P(a - \mu < x - \mu < b - \mu) \\ &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < \frac{x - \mu}{\sigma} < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Convergencia de la distribución binomial a la distribución normal:

La máquina de Galton, también conocida como quincunce, es un dispositivo inventado por Sir Francis Galton, para demostrar que la distribución binomial se aproxima a la distribución normal. Está constituida con una tabla con numerosas filas de clavos intercalados sucesivamente que evocan al triángulo de Pascal. Desde la parte superior se dejan caer bolas que botan a la izquierda o a la derecha, en forma aleatoria, cuando chocan con los clavos. En el fondo, las bolas son coleccionadas en recipientes verticales, figura No 5. Se cuenta el número de canicas en cada celda y se calcula la frecuencia relativa, se tiene una aproximación al valor de probabilidad que se obtiene al usar la distribución binomial.

(Contreras, J. et al., 2013, p.313)

Contreras, J. et al. (2013), afirma que la convergencia de la distribución binomial con la distribución normal se visualiza gráficamente en el aparato de Galton con parámetros (p.315):

$$\mu = np \text{ y } \sigma = \sqrt{npq}$$

Además, afirma que considerando un tamaño de muestra lo suficientemente grande ($n > 100$), con p (probabilidad de éxito) ó q (probabilidad de fracaso) próximos a 0,5 específicamente cuando $\mu = np > 5$.

Logrando así la conversión de la distribución binomial a la distribución normal, gráficamente se expresa:

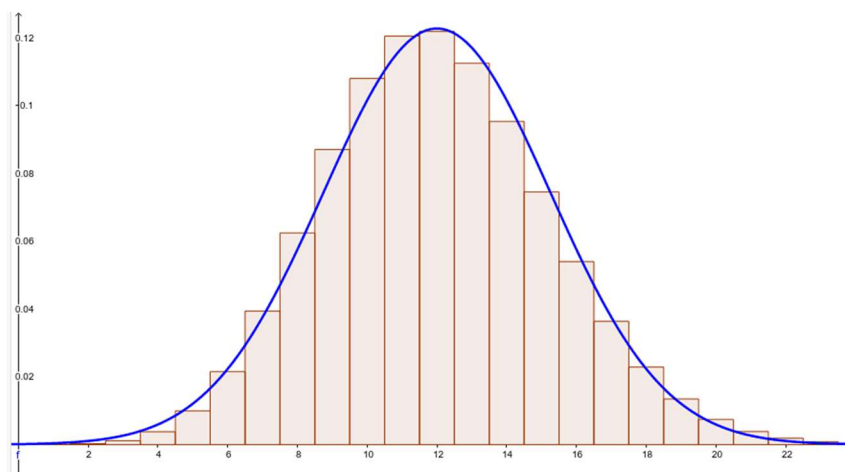


Figura 9. Representación gráfica de la convergencia.

2.5 Descripción de texto de estudio:

A partir de la actualización de las Bases Curriculares 2020 (Mineduc, 2019) se presenta una organización curricular de todas las asignaturas presentes en el programa de formación general. Particularmente la organización curricular de la asignatura Matemática se plantea en tres elementos (Mineduc, 2019):

- 1) Progresión por nivel: Se prescriben los Objetivos de Aprendizaje para cada nivel y de manera progresiva, abordándolos en los niveles de 3° y 4° Medio los cuales se van complejizando conceptualmente a medida que se desarrollan los contenidos de la asignatura.
- 2) Habilidades: Dentro de la asignatura de Matemática se desarrollan cuatro habilidades fundamentales: “representar”, “modelar”, “resolver problemas” y “argumentar y comunicar”. Con estas habilidades el Mineduc (2019) espera que los estudiantes continúen desarrollando su capacidad de análisis, estudio y resolución, ya sea pasada o futura, buscando favorecer el tránsito al mundo laboral y/o profesional contribuyendo a la comunidad local, nacional y global.
- 3) Actitudes: En concordancia con las habilidades para el Siglo XXI, declaradas en las bases curriculares (Mineduc, 2019), las cuales son de manera transversal para todas

las asignaturas, constituyen una progresión de actitudes a promover en la vida escolar y para desenvolverse en el siglo actual, integrándose con los Objetivos de Aprendizaje (OA) en las distintas planificaciones que desarrollen los docentes en la enseñanza.

A partir de ellos se elaboran diferentes actividades presentes en el texto del estudiante para Matemática en los niveles de 3° y 4° Medio (Mineduc, 2020), ambos cursos en un mismo texto. Específicamente, para cada nivel están presentes cuatro Objetivos de Aprendizaje (OA) por cada unidad, donde uno de ellos se relaciona al eje de Datos y Azar, estos son:

- 3° Medio: Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales.
- 4° Medio: Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.

Se describe el texto de matemática del año 2020 que entrega el ministerio de educación titulado: “Texto del Estudiante Matemática 3° y 4° MEDIO” de la editorial SM.

Cada una de las cuatro unidades presenta una organización en común para la enseñanza y cumplimiento de los Objetivos de Aprendizajes asociados. Cada unidad está compuesta por una estructura que sigue el mismo orden para todos los OA de cada unidad (Mineduc, 2020). A continuación, se describen las tres partes fundamentales de cada unidad.

1) Inicio de Unidad: Presenta la unidad y las lecciones a tratar a través de un contexto y los contenidos a aprender (nombres de las lecciones de enseñanza).

Por ejemplo, en la Unidad 1: La Toma de Decisiones en Situaciones de Incerteza, en el nivel de 3° Medio se presenta de la siguiente manera:

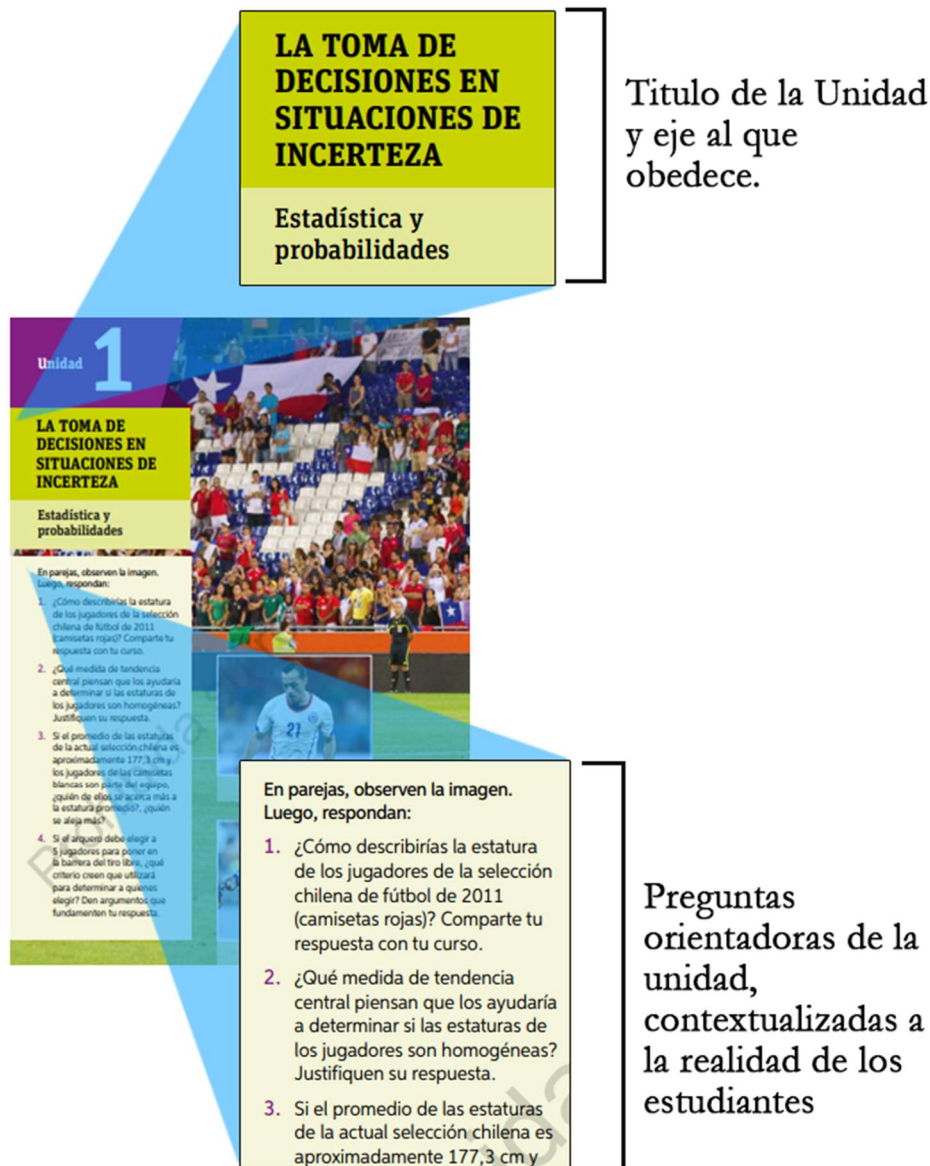


Figura 10.



En esta Unidad estudiarás y aprenderás acerca de:

- Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión de datos.
- Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionales.

Lecciones a tratar en la Unidad.

Figura 11.

Ambas páginas del texto de estudio, presentan las características que tienen cada unidad introductoria previa cada lección de contenidos. En el caso anterior, (Ver Figura 11) las lecciones son:

- Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión de datos.
- Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionales.

Posteriormente, se presenta una evaluación diagnóstica titulada “Activo lo que sé” apoyada por una reflexión para concluir la introducción de la unidad.

En el caso de la Unidad 1: La Toma de Decisiones en Situaciones de Incerteza, en el nivel de 3º Medio se observa que la sección “Activo lo que sé” está distribuida de la siguiente manera:

Activo lo que sé

Realiza las siguientes actividades para activar los conocimientos.

1. Calcula el promedio, la mediana y la moda de los siguientes datos.

Edad (en años) de un grupo de 10 personas

10 – 25 – 34 – 20 – 44 – 23 – 44 – 43 – 21 – 18

2. Calcula las medidas de tendencia central para los datos organizados en la siguiente tabla:

Masa corporal estudiantes de 1º medio	
Masa corporal (kg)	Frecuencia
[50, 55[	6
[55, 60[	13
[60, 65[	9
[65, 70[	8
[70, 75]	4

3. El promedio de estatura de 7 jugadores de un equipo de básquetbol es igual a la estatura del jugador de la imagen. Al ordenarlos del más alto al más bajo, cada uno mide 2 cm menos que el anterior. ¿Cuál es el más bajo?

Sección de actividades dentro de la evaluación diagnóstica para trabajar los contenidos previos que se necesitan para trabajar las lecciones correspondientes a la unidad en estudio.

Reflexiono

- Con respecto a tu desempeño en esta evaluación, ¿qué te resultó difícil de responder?, ¿por qué?
- ¿Reconoces los contenidos trabajados?, ¿cuáles de ellos crees que debes repasar antes de continuar?

Reflexiones de apoyo a los estudiantes respecto a la evaluación diagnóstica.

Figura 12.

Como se puede ver en la evaluación diagnóstica (Ver Figura 12) en la sección “Activo lo que sé” las diferentes preguntas apuntan a la detección y trabajo de conocimientos previos, utilizando imágenes de apoyo a los problemas planteados, esto se puede ver en todas las unidades del texto.

2) Desarrollo de la unidad: Dividida en dos lecciones, cada una se subdivide en un contenido a tratar y se asocian a un objetivo de logro respectivamente. A continuación, se presentan dos unidades relacionadas al eje de Datos y Azar, una para el nivel de 3° Medio (Ver Figura 13) y otra para 4° Medio (Ver Figura 14), donde en ambas se describen los elementos que estructuran la unidad, así como también los contenidos a tratar en cada lección, dando un espectro general de lo que se aprenderá tras la unidad completa.

Unidad 1	LA TOMA DE DECISIONES EN SITUACIONES DE INCERTEZA	8
Activo lo que sé		10
Lección 1: Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión de datos		11
Medidas de dispersión		11
Comparación de conjuntos de datos		15
Antes de continuar		19
Lección 2: Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionadas		20
Probabilidad condicionada		20
Probabilidad total		24
Antes de continuar		27
Síntesis		28
Repaso		29
¿Qué aprendí?		30

Figura 13. Unidad 1 Nivel 3° Medio.

Unidad 3	LA TOMA DE DECISIONES EN SITUACIONES DE INCERTEZA	162
Activo lo que sé		164
Lección 5: Toma de decisiones analizando la distribución binomial		165
Valor esperado y varianza de una variable aleatoria		165
Distribución binomial		167
Antes de continuar		171
Lección 6: Toma de decisiones analizando la distribución normal		172
Variable aleatoria continua		172
Distribución normal		174
Distribución normal estándar		177
Estimación de la media de una población		183
Aproximación normal a la binomial		185
Antes de continuar		187
Síntesis		188
Repaso		189
¿Qué aprendí?		190

Figura 14. Unidad 3 Nivel 4° Medio

Por ejemplo, para el caso de “Lección 5: Toma de decisiones analizando la distribución binomial” (Ver Figura 14), en el contenido “Valor esperado y varianza de una variable aleatoria” se señala el objetivo de aprendizaje para la enseñanza de dicho contenido, además de presentar dos preguntas para que los estudiantes se relacionen con los contenidos previos a utilizar en la lección. Estas son las directrices con las que se estructuran las actividades que a continuación le siguen. Se tratan los contenidos de manera ascendente, presentan definiciones y actividades de aplicación para el logro del objetivo, todas acompañadas por

indicaciones de control metacognitivo de los estudiantes y finalizadas por un cierre de tema (Ver Figura 15). En cuanto al control metacognitivo o aprendizaje autorregulado está dirigido siempre a una meta y controlado por el sujeto que aprende (Arguelles y Nagles 2007).

Preguntas asociadas a la comprensión de contenido previo.

¿A qué corresponde una variable aleatoria?
¿En qué consiste una función de probabilidad?

1. Analiza la situación y responde:

Rafael quiere armar un mueble que requiere dos tornillos distintos. Las proporciones de cada tipo de tornillo en sus bolsas son:



Se extrae al azar un tornillo de cada bolsa:

- Si quisieras determinar el número de tornillos defectuosos en este experimento, ¿cómo definirías la variable aleatoria X asociada?
- ¿Cuáles son los elementos del recorrido de la variable?, ¿cuál es la probabilidad de cada uno?
- Determina la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria.
- Discutan en parejas: ¿cómo se podría obtener el promedio de tornillos defectuosos al extraer uno de cada bolsa?

Una situación contextualizada con distintas preguntas que apuntarán a encontrarse con el contenido a tratar

Una variable aleatoria X , cuya función de probabilidad es $p(x)$ tendrá una media o valor esperado (μ) dado por:

$$\mu = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \dots + x_n \cdot p(x_n)$$

Por ejemplo, para el caso anterior, tendremos que:

$$\mu = 0 \cdot 0,56 + 1 \cdot 0,38 + 2 \cdot 0,06$$

$$\mu = 0,5$$

Definición formal del contenido, a partir del contexto tratado centrado, representado solo solo de manera algebraica y acompañado de una observación en lenguaje no técnico.

El objetivo es presentado al inicio de la lección, situado en la esquina derecha superior de la hoja

Objetivo: Calcular e interpretar la media y la desviación estándar de una variable aleatoria.

Objetivo: Calcular e interpretar la media y la desviación estándar de una variable aleatoria.

Toma de decisiones analizando la distribución binomial

Valor esperado y varianza de una variable aleatoria

¿A qué corresponde una variable aleatoria?
¿En qué consiste una función de probabilidad?

1. Analiza la situación y responde:

Rafael quiere armar un mueble que requiere dos tornillos distintos por repisa. Las proporciones de cada tipo de tornillo en sus bolsas son:



Se extrae al azar un tornillo de cada bolsa:

- Si quisieras determinar el número de tornillos defectuosos extraídos en este experimento, ¿cómo definirías la variable aleatoria X asociada?
- ¿Cuáles son los elementos del recorrido de la variable?, ¿cuál es la probabilidad de cada uno?
- Determina la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria.
- Discutan en parejas: ¿cómo se podría obtener el promedio de tornillos defectuosos al extraer uno de cada bolsa?

Una variable aleatoria X , cuya función de probabilidad es $p(x)$ de dominio $x_1, x_2, \dots, x_n$ tendrá una media o valor esperado (μ) dado por:

$$\mu = x_1 \cdot p(x_1) + x_2 \cdot p(x_2) + \dots + x_n \cdot p(x_n)$$

Por ejemplo, para el caso anterior, tendremos que:

$$\mu = 0 \cdot 0,56 + 1 \cdot 0,38 + 2 \cdot 0,06$$

$$\mu = 0,5$$

En este caso, ¿el valor de la media pertenece al recorrido de la variable?, ¿cómo lo interpretarías?

En este caso, ¿el valor de la media pertenece al recorrido de la variable?, ¿cómo lo interpretarías?

Indicaciones de control metacognitivo para entregar al estudiante una participación en la dirección de su propio aprendizaje

Figura 15.

Las lecciones se cierran con una evaluación intermedia titulada “Antes de continuar” (Ver Figura 16) y una reflexión que busca ser una evaluación de estrategias y plan de mejoras para los estudiantes (Ver Figura 17).

Antes de continuar

Evaluación intermedia

1

Realiza las siguientes actividades para que sepas cómo va tu proceso de aprendizaje. Luego, responde las preguntas de la sección Reflexión.

- Mientras planea sus vacaciones, Rosa comenzó a pensar en los lugares que ha visitado y realizó el siguiente esquema:


```

graph TD
    V[Vacaciones] --> N[Norte 70%]
    V --> S[Sur 30%]
    N --> NP[Playas 65%]
    N --> NL[Lagos 82%]
    S --> SP[Playas 65%]
    S --> SL[Lagos 82%]
          
```
- Para curar una enfermedad un grupo de doctores ha aplicado un nuevo tratamiento a una serie de pacientes en el cual obtuvieron los resultados reflejados en la siguiente tabla:

	Curados	No curados	Total
Tratamiento nuevo	60	21	81
Tratamiento antiguo	43	36	79
Total	103	57	160

Si se elige un paciente al azar, calcula la probabilidad de que:

- Se haya curado.
- No se haya curado.
- Se haya curado dado que se le aplicó el tratamiento nuevo.
- No se haya curado dado que se le aplicó el tratamiento nuevo.
- Se haya curado dado que se le aplicó el tratamiento antiguo.
- No se haya curado dado que se le aplicó el tratamiento antiguo.
- ¿Qué decisión debe tomar el grupo de doctores: seguir con el nuevo tratamiento o volver al antiguo?

3. Explica la utilidad del teorema de la probabilidad total.

Reflexión

- ¿Qué representaciones de la probabilidad condicionada te parecieron más adecuadas para cada problema? Explica y compara tu respuesta.
- De acuerdo con el desempeño obtenido en esta evaluación, ¿en cuáles actividades tuviste más dificultades?, ¿qué podrías hacer al respecto? Crea un plan de mejora.

Unidad 1 • Lección 2

27

Figura 16. Sección “Antes de continuar”.

Reflexión

- ¿Qué representaciones de la probabilidad condicionada te parecieron más adecuadas para cada problema? Explica y compara tu respuesta.
- De acuerdo con el desempeño obtenido en esta evaluación, ¿en cuáles actividades tuviste más dificultades?, ¿qué podrías hacer al respecto? Crea un plan de mejora.

Figura 17. Reflexiones sección “Antes de continuar”.

3) Cierre de la unidad: Finaliza en dos partes. La primera trata una síntesis de los contenidos aprendidos en la unidad (Ver Figura 18), que propone a los estudiantes confeccionar un mapa conceptual o semejante para plasmarlo y luego desarrollan ejercicios para repasar contenidos (Ver Figura 19).

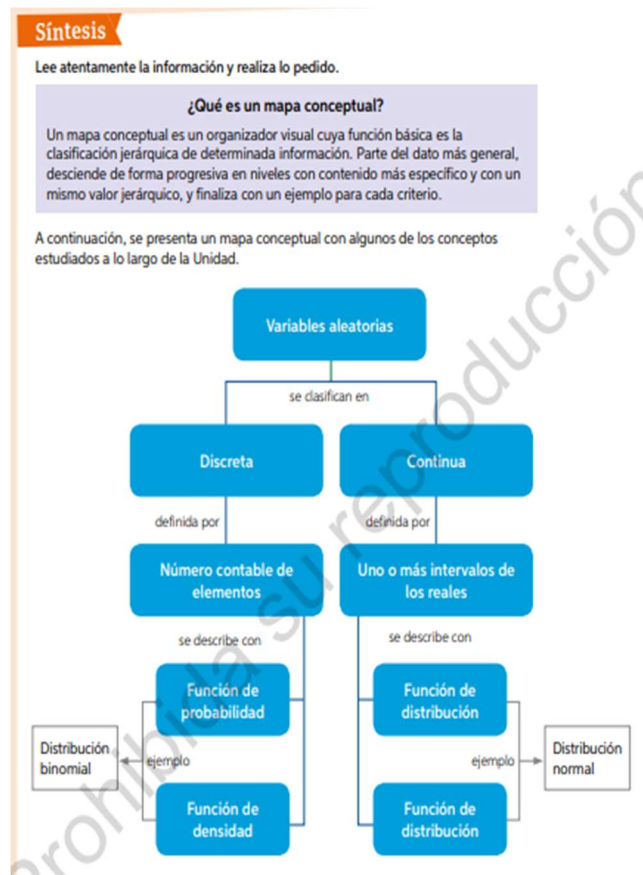


Figura 18. Sección “Síntesis”

Repaso

Realiza las siguientes actividades.

Lección 5: Toma de decisiones analizando la distribución binomial

1. Lee la siguiente información y responde:

Se aplica un examen de Matemática a tercero medio, el cual contempla 22 preguntas, todas independientes entre sí, de 5 alternativas, de las cuales solo una es correcta. Gonzalo comenta que no estudió y que elegirá sus respuestas al azar. A partir de la información, responde lo siguiente:

- ¿Cuál es la variable de Bernoulli asociada?, ¿cuáles son sus parámetros?
- Determina la función binomial asociada.
- ¿Crees que Gonzalo contestará correctamente al menos 5 preguntas?
- ¿Cuántas preguntas esperarías que contestara correctamente?

Figura 19. Sección “Repaso”.

Luego en la sección “¿Qué aprendí?” (Ver Figura 20) tiene como fin evaluar todos los contenidos tratados en ambas secciones referentes a la unidad, finalizando con una reflexión y una pregunta orientadora, denotada con una “P” para cuestionar y analizar lo aprendido y realizado por parte de los estudiantes durante toda la unidad (Ver Figura 21).

¿Qué aprendí?

Lee atentamente la información y realiza lo pedido.

1. Se realiza un estudio para conocer la eficiencia de cierto medicamento para perros, y se determinó que este presenta una probabilidad de reacción negativa de 0,15. Si consideráramos una muestra de 30 perros, determina:

a. Probabilidad de las siguientes situaciones:

- Ningún perro tenga reacción negativa.
- Un perro tenga reacción negativa.
- Más de 2 perros tengan reacciones negativas.

b. ¿Considerarías que el medicamento es seguro? Argumenta tu respuesta

2. En un examen se deben superar 4 pruebas independientes entre sí con la misma probabilidad de fallar. El número de fallos obtenidos por 100 personas se resume en la siguiente tabla:

N° pruebas fallidas	0	1	2	3	4
N° de personas	24	40	26	8	2

a. ¿Cuál es la media aritmética de la muestra?

b. Ajusta la distribución anterior a un experimento binomial. Determina el parámetro p despejándolo de $x = n \cdot p$.

c. Compara los valores de la tabla con los obtenidos de la distribución binomial. ¿Corresponde a un buen ajuste?

Figura 20. Sección “Que aprendí”.

Reflexiono

- ¿Qué conceptos de la lección entendiste bien? ¿Cómo lo podrías evidenciar?
- ¿Qué importancia tienen los modelos estadísticos para tomar decisiones en situaciones de incerteza? Explica con tus palabras.

P ¿Qué decisiones en situaciones de incerteza tomaste en la realización del proyecto de Unidad?, ¿cómo las justificaste? Revisa tus avances y las metodologías que utilizaste. Corrígelas de ser necesario.

Figura 21. Reflexiones de la sección “Qué aprendí”.

Capítulo III: Marco Metodológico.

Para el logro de los objetivos propuestos dentro de esta investigación se consideran dos partes. La primera parte consiste en el análisis de la información recopilada luego de aplicar una encuesta titulada *“Encuesta para el análisis de la percepción que poseen las y los profesores de matemática sobre el manejo de los contenidos y habilidades del eje Datos y Azar a tratar en los niveles de 3° y 4° Medio, según actualización curricular para el año 2020”* (Ver Anexo 1), mientras que en la segunda parte se llevará a cabo la creación de material para ayudar a los docentes en ejercicio para el año 2020 sobre los contenidos considerados en la última actualización curricular que entran en vigencia durante el mismo año y que fueron identificados como deficientes tras el análisis de los datos obtenidos en la encuesta (Anexo 1).

Según lo propuesto por Hernández R, et al. (2014) en el texto “Metodología de la Investigación”, la naturaleza de la metodología de investigación es de tipo mixta, dado que se involucran dos métodos para el logro del objetivo: uno cualitativo y otro cuantitativo.

El enfoque cuantitativo está presente desde el planteamiento de la problemática. Este se realizó al inicio de la investigación, desde allí se buscó información relacionada principalmente a documentos que indican:

- (1) La percepción que tienen los profesores frente a sus propias prácticas educativas al diseñar y llevar a cabo clases en los niveles de 3° y 4° medio del eje Datos y Azar.
- (2) Material dispuesto por el Ministerio de Educación, para analizar principalmente las estrategias que promueve implícita y explícitamente dichos documentos.
- (3) Fundamento teórico asociado a la Didáctica de la Estadística y las recomendaciones internacionales.

En esta búsqueda se selecciona la encuesta *“Encuesta para el análisis de la percepción que poseen las y los profesores de matemática sobre el manejo de los contenidos y habilidades del eje Datos y Azar a tratar en los niveles de 3° y 4° Medio, según actualización curricular para el año 2020”* (Anexo 1), que permite recopilar información relacionada a las variables presentes en el punto (1) mencionado anteriormente, además de indicar la frecuencia de uso

que declaran los profesores del material dispuesto por el ministerio de educación (2) y otros datos relevantes para la investigación.

El enfoque cualitativo está presente en la modificación del objetivo general (Hernández R, et al., 2014), ya que inicialmente no se contempló el uso de una metodología en específico para diseñar las actividades. Sin embargo, a lo largo de la investigación fue considerado pertinente utilizar como metodología el Ciclo Investigativo PPDAC, propuesto por Wild y Pfannkuch (1999), ya que proporciona la estructura principal de un ciclo investigativo.

Por otra parte, la investigación realizada es de tipo transversal ya que mediante la encuesta se realiza una recopilación de datos para obtener una muestra y analizarla en el periodo del año 2020 (Hernández R, et al., 2014).

El alcance del estudio es de tipo descriptivo, como menciona Hernández R, et al. (2014) se busca especificar las propiedades, características y perfiles de un grupo de profesores de matemática en torno a un análisis sobre el fenómeno percepción de la preparación para conducir la enseñanza de los contenidos presentes en las Bases Curriculares para 3° y 4° Medio en vigencia desde el año 2020 (Mineduc, 2019). Las variables en análisis a partir de la encuesta (Anexo 1) describirán:

- (1) Percepción del nivel de preparación de los docentes frente a la enseñanza de los nuevos contenidos y habilidades presentes en la nueva actualización curricular, así también como el conocimiento que poseen de estos (Mineduc, 2019).
- (2) Metodologías de preparación de clases y formación continua docente.
- (3) En qué medida llegan a modernizarse o realizar cambios en sus prácticas pedagógicas y de trabajo (capacidad de actualización en la labor docente según currículum escolar actual chileno).

3.1 Caracterización de la muestra.

La muestra está constituida por 53 docentes en ejercicio de la asignatura Matemática para los niveles desde 7° Básico a 4° Medio, quienes provienen de 16 universidades a lo largo del país. Dentro de la muestra utilizada, la mayor proporción de docentes tienen formación en la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación con un 42%.

Hernández R, et al. (2014) afirma: “*La muestra es, en esencia, un subgrupo de la población. Digamos que es un subconjunto de elementos que pertenecen a ese conjunto definido en sus características al que llamamos población*”. (p.175)

*En las **muestras no probabilísticas**, la elección de los elementos no depende de la probabilidad, sino de causas relacionadas con las características de la investigación o los propósitos del investigador.* (Hernández R, et al., 2014)

La muestra seleccionada es no probabilística, pues fue por conveniencia, ya que es considerado no aleatorio (Hernández R, et al., 2014), el acceso a la muestra fue con facilidad. Este tipo de muestreo avala a procedimiento sin fórmula, es decisión grupal para realizar e implementar en la muestra de estudio.

El medio de aplicación de la encuesta fue a través de la plataforma en línea Google Forms, la implementación de la encuesta comenzó en una primera etapa mediante el contacto a docentes egresados de la UMCE, quienes actualmente están realizando clases en aula. En una segunda etapa se realizó el contacto con profesores de matemática en grupos de la plataforma Facebook para así tener una muestra grande y con docentes de diversa formación.

El detalle de las universidades de egreso de los profesores de matemática pertenecientes a la muestra observada se presenta a continuación.

Tabla 1. Universidad de procedencia y participantes en el estudio, en frecuencias y porcentajes.

Universidad de Procedencia	Participantes	
	f	%
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE)	21	40
Universidad de Playa Ancha (UPLA)	6	11
Universidad de La Serena (ULS)	5	9
Universidad Católica Silva Henríquez (UCSH)	1	2
Universidad de Santiago de Chile (USACH)	4	7
Universidad Alberto Hurtado (UAH)	2	4
Universidad Autónoma (UA)	2	4
Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC)	1	2
Universidad Andrés Bello (UNAB)	1	2
Universidad Católica de Temuco (UCT)	1	2
Universidad de Concepción (UDEEC)	2	4
Universidad SEK Chile (USEK)	1	2
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV)	3	5

Universidad Católica del Maule (UCM)	1	2
Universidad de Los Lagos (ULAGOS)	1	2
Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC)	1	2
TOTAL	53	100

La distribución de los años de experiencia o ejercicio para los diferentes docentes que constituyen la muestra permite señalar que el rango del tiempo en ejercicio varía entre 1 y 38 años. Dentro del total de profesores encuestados, los años de egreso de estos fueron entre 1984 y 2019. La mayoría de los docentes concentran sus años de experiencias entre 1 a 9 años (45%) y 9 a 17 años (34%), específicamente la mayor cantidad tiene 4 años de experiencia (7 profesores). En el gráfico siguiente se presenta la cantidad de años de experiencia que tienen los docentes de matemática encuestados.

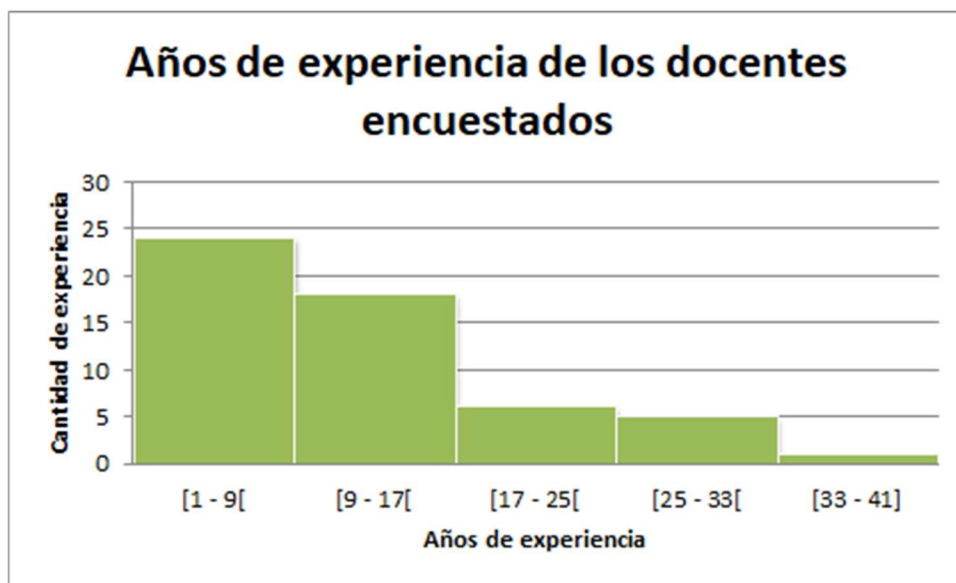


Gráfico 1: Años de experiencia de los docentes encuestados.

Fuente: Elaboración propia.

La evidencia recolectada y las características de la muestra utilizada en la encuesta, ayuda en las decisiones tomadas con respecto al análisis profundo del estudio de los datos y lograr la creación de la secuencia de actividades.

3.2 Instrumento

Para la recolección de datos, se utilizó la encuesta titulada *“Encuesta para el análisis de la percepción que poseen las y los profesores de matemática sobre el manejo de los contenidos y habilidades del eje Datos y Azar a tratar en los niveles de 3° y 4° Medio, según actualización curricular para el año 2020”* (Anexo 1) para determinar la percepción sobre el manejo que poseen los profesores sobre los contenidos al eje de Datos y Azar, a tratar en los niveles de 3° y 4° Medio, según la actualización curricular para el año 2020 (Mineduc, 2019). Este instrumento se encuentra dividido en tres partes, las cuales son:

- ★ Ítem I: Identificación
- ★ Ítem II: Manejo del contenido y habilidades.
- ★ Ítem III: La enseñanza del contenido.

Cada ítem contiene una cantidad de preguntas definidas y una caracterización, como se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 2. Cantidad de preguntas definidas y una caracterización.

Ítem	Descripción	Cantidad de preguntas
Ítem I: Identificación.	Caracterización del docente participante del estudio.	3
Ítem II: Manejo del contenido y habilidades.	Describir la percepción que tiene el docente a cerca de la preparación para la enseñanza de los contenidos y habilidades en el aula	12
Ítem III: La enseñanza del contenido.	Describir las prácticas pedagógicas del docente para el eje de Datos y Azar.	3

3.3 Procedimiento

Se utilizó y analizó la información recopilada acerca de la percepción que poseían los docentes con respecto a qué tan preparados se sienten para conducir la enseñanza del contenido a partir de la encuesta realizada (Anexo 1) con el fin de seleccionar aquellos con menos porcentaje de preparación, se utilizó como criterio un mínimo de 84% de profesores que deben sentirse preparados para conducir la enseñanza del contenido para que este no sea considerado como **deficiente**.

Posterior a la selección de contenidos se procedió a la creación de actividades con el objetivo de apoyar y conducir los procesos de enseñanza de cada uno de ellos. Cada actividad está diseñada en base al Ciclo Investigativo PPDAC y considera:

- Un objetivo específico asociado al contenido.
- Desarrollo de la actividad especificando cinco etapas: Pregunta, Plan, Datos, Análisis y Conclusión sugerida según el ciclo investigativo mencionado y asociado a un contexto determinado.
- Notas al docente que constan de sugerencias para abordar ciertos conceptos, preguntas orientadoras para complementar análisis, consideración de obstáculos en el aprendizaje de los estudiantes, entre otros.
- Uso de software educativo o material concreto para apoyar el proceso de análisis y resolución de las problemáticas planteadas.

3.4 Análisis de Datos

Para el análisis de datos obtenidos a partir de la encuesta se utilizó un estudio descriptivo en cada una de las preguntas mediante el uso de gráficos, tablas de frecuencias y proporciones para comparar la opinión que tienen los docentes sobre la enseñanza del eje de Datos y Azar en los niveles de 3° y 4° Medio. Los datos fueron tabulados en el programa Excel, las preguntas presentes en la encuesta fueron estudiadas en base a dos naturalezas: dicotómicas o cualitativas y se definieron ciertos criterios para establecer si las respuestas manifestadas por los docentes incidirán o no en la creación de actividades. Además, se consideraron las justificaciones, comentarios y respuestas abiertas para la estructuración de las actividades.

3.5 Retroalimentación de los Docentes

Sobre la base de las actividades que no fue posible aplicarlas directamente en el aula, se solicitó considerar una muestra por conveniencia de cuatro (4) docentes de matemática en ejercicio, que imparten la asignatura en los niveles de 3° y 4° Medio, quienes realizaron una revisión en base a una lista de cotejo para evaluar diferentes puntos relacionados al diseño de cada actividad. Los indicadores considerados en la lista de cotejo evaluaron y aportaron el cumplimiento del objetivo planteado, claridad en las instrucciones de las actividades, la utilidad de estas respecto a la enseñanza del contenido, la recomendación de dicho material a otros docentes, y la estructura y metodología presente. Además, las listas de cotejo permitieron a los docentes entregar una observación o comentario respectivo a cada una de las actividades.

Capítulo IV: Representación de los Resultados y Discusión.

4.1 Resultados de la Encuesta

A continuación, se presenta un análisis de la encuesta realizada considerando las respuestas y pregunta más relevantes para cada uno de los ítems. Es importante aclarar que el Ítem I: Identificación, cumplió la función de caracterizar a los profesores de matemática pertenecientes a la muestra en estudio.¹

Ítem II: Manejo del contenido y habilidades.

A partir de las respuestas obtenidas se concluye que del total de docentes encuestados un 90% conoce el Programa de Estudio para Matemática en los niveles de 3° y 4° Medio para el año 2020. Además, a partir del análisis se expuso la relación entre los contenidos asociados a los Objetivos de Aprendizajes presentes en la actualización curricular y su estudio en la formación universitaria de los docentes. Los porcentajes que representan las respuestas declaradas se desglosan de la siguiente manera:

Contenidos 3° Medio:

- 94% estudió el contenido Medidas de Dispersión.
- 85% estudió el contenido Esperanza y Varianza de una Variable Aleatoria Discreta.
- 87% estudió el contenido de Probabilidad Condicional.

Contenidos 4° Medio:

- 77% estudió el contenido Distribución Binomial.
- 87% estudió el contenido Distribución Normal.
- 74% estudió el contenido Estandarización de una Distribución Normal.

¹ La caracterización de la muestra se encuentra presente en el Capítulo III: Marco Metodológico.

Con la información anterior expuesta por los docentes encuestados se afirma entonces que **al menos el 74% de los encuestados declara haber estudiado en su etapa de pregrado los seis contenidos presentes en las nuevas Bases Curriculares para los niveles 3° y 4° Medio en el eje de Datos y Azar que entran en vigencia a partir del año 2020**. Además, para los contenidos asociados a cada Objetivo de Aprendizaje declarado en las Bases Curriculares para los niveles de 3° y 4° Medio en el eje de Datos y Azar para el año 2020 **solo el 50% de los docentes encuestados ha declarado haber enseñado los seis contenidos presentes**.

Por otra parte, los docentes declararon en la encuesta sentirse o no preparados para conducir la enseñanza de los seis contenidos presentes en las Bases Curriculares para los niveles de 3° y 4° Medio en el eje de Datos y Azar para el año 2020, los que se resumen en el siguiente gráfico.

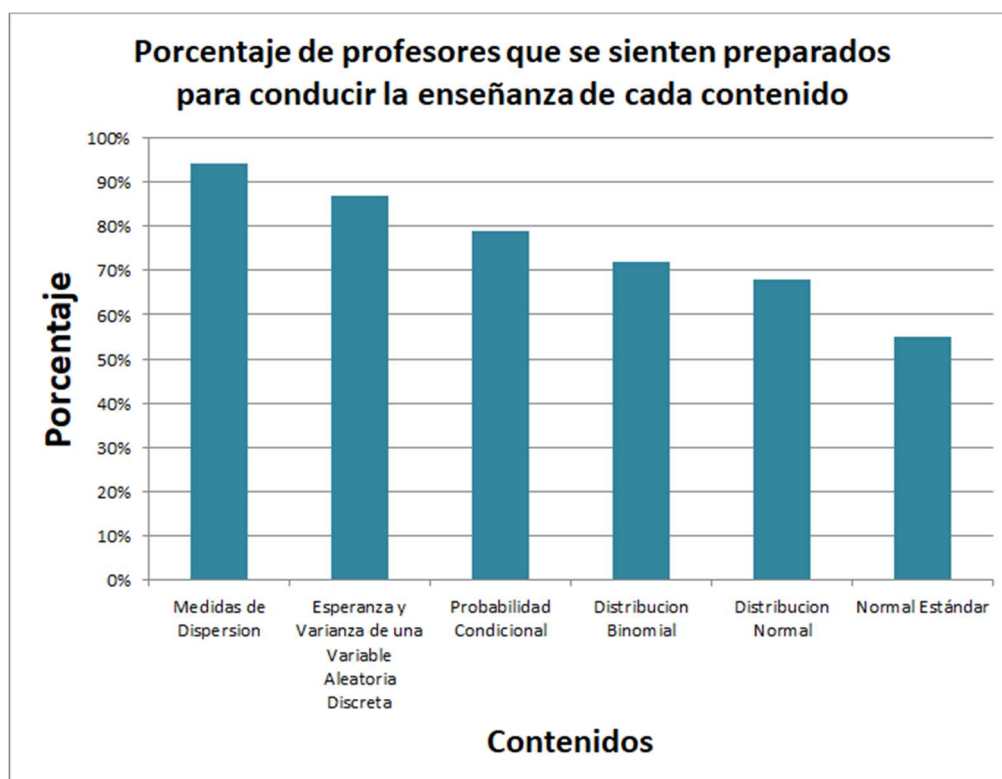


Gráfico 2: Porcentaje de profesores que se sienten preparados para conducir la enseñanza de cada contenido.

Fuente: Elaboración propia.

Considerado entonces el porcentaje sobre el nivel de preparación para conducir la enseñanza de los seis contenidos correspondientes a la actualización de las Bases Curriculares para 3° y 4° Medio en el eje de Datos y Azar, se encasilla cada uno de estos porcentajes en dos categorías:

- Si un contenido presenta bajo un 84% según la preparación que tenga el docente para conducir la enseñanza de este se cataloga como **Deficiente**, y, por tanto, es necesario realizar una actividad para el apoyo a profesores de matemática que realizan clases en los niveles de 3° y 4° Medio para el año 2020. En el caso complementario se cataloga al contenido como **Suficiente**.

Respecto a los profesores que declaran **no sentirse preparados** para la enseñanza de aquellos contenidos, la manera en la que los abordarán para enseñarlos en los niveles de 3° y 4° Medio se presenta en las siguientes tablas.

Tabla 3. Aspectos sobre cómo abordar los contenidos para enseñarlos en los niveles de 3° Medio.

¿Cómo piensa abordar los contenidos para los que no se siente preparado? - Nivel 3°Medio		
Aspectos	Cantidad	Porcentajes
Estudiando solo/a	47	89%
Asistiendo a capacitaciones	11	20%
Otro	4	10%

Tabla 4. Aspectos sobre cómo abordar los contenidos para enseñarlos en los niveles de 4° Medio.

¿Cómo piensa abordar los contenidos para los que no se siente preparado? - Nivel 4°Medio		
Aspectos	Cantidad	Porcentajes
Estudiando solo/a	45	80%
Asistiendo a capacitaciones	12	20%
Otro	4	10%

Con los datos entregados anteriormente, se puede decir que de los docentes encuestados al menos el 80% prefiere estudiar solo/a, para poder abordar la preparación de la enseñanza de los contenidos para los que no se siente preparado. Es importante señalar que los docentes podían marcar más de una opción para dicha pregunta, es decir, los aspectos no son excluyentes. Del total de docentes encuestados hay a lo más un 20% que prefiere asistir a capacitaciones para poseer mejores herramientas para preparar la enseñanza de los contenidos, sin excluir el hecho de estudiar solos o utilizar otra metodología para abordar los contenidos para los que no se sienten preparados.

Respecto a las habilidades presentadas en las Bases Curriculares para los niveles de 3° y 4° Medio en el eje de Datos y Azar para el año 2020, del total de los docentes encuestados un 77% declara estar informado sobre estas. Luego, se les consultó si se sentían o no preparados para promover dichas habilidades, para el nivel de **3° Medio un 72% expone sentirse preparado** mientras que para el **nivel de 4° Medio solo un 53%**. Los docentes que no se sienten preparados para promover dichas habilidades en los niveles de 3° y 4° Medio manifiestan que utilizarán diversos métodos los cuales se exponen en la siguiente tabla. Es importante señalar que los aspectos presentes en la tabla no son excluyentes ya que los docentes podían seleccionar más de una opción en la realización de la encuesta.

Tabla 5. Aspectos sobre cómo abordar las habilidades para enseñarlos en los niveles de 3° Medio.

¿Cómo piensa abordar las habilidades para los que no se siente preparado? - Nivel 3°Medio		
Aspectos	Cantidad	Porcentajes
Estudiando solo/a	44	83%
Asistiendo a capacitaciones	13	25%
Otro	4	8%

Tabla 6. Aspectos sobre cómo abordar las habilidades para enseñarlos en los niveles de 4° Medio.

¿Cómo piensa abordar las habilidades para los que no se siente preparado? - Nivel 4°Medio		
Aspectos	Cantidad	Porcentaje
Estudiando solo/a	43	81%
Asistiendo a capacitaciones	15	28%
Otro	3	5,7%

Respecto a las habilidades mencionadas en la tabla anterior, según la opinión declarada por los docentes en la encuesta **un 32% de ellos considera que es entre “medianamente incorrecto” hasta “incorrecto” enseñar los contenidos y promover las habilidades que**

plantea el MINEDUC en la actualización de las Bases Curriculares para los niveles de 3° y 4° Medio en el eje de Datos y Azar para el año 2020, por otra parte un 30% del total de profesores encuestados afirmó considerar correcto lo planteado en dicho documento.

Es importante considerar que sólo un 4% de los docentes encuestados considera que son muchos contenidos y habilidades presentes en la nueva actualización de las Bases Curriculares para los niveles de 3° y 4° Medio en el eje de Datos y Azar para el año 2020. Respecto a los Objetivos de Aprendizaje que allí se declaran, **un 70% de los docentes encuestados los encuentran pertinentes** y asimismo **un 70% expone que existe coherencia entre esta actualización y el programa de estudios vigente hasta el año 2019.**

Ítem III: La enseñanza del contenido.

Dentro de este ítem se les preguntó a los encuestados a cerca del tiempo disponible para enseñar los contenidos propuestos en el programa, de los cuales el 40% se manifestó afirmando que sí les alcanza el tiempo para enseñar dichos contenidos en los niveles de 3° y 4° Medio, sin embargo, el resto (60%) declara que no les alcanza el tiempo. Las causas que expusieron los docentes, a quienes no les alcanza el tiempo para cumplir con la enseñanza de los contenidos del eje de Datos y Azar propuestos, se presentan en la siguiente tabla. Es importante considerar que los docentes podían seleccionar más de una causa por la cual no les alcanza el tiempo, siendo los aspectos presentes en la tabla no excluyentes entre ellos.

Tabla 7. Causas que expusieron los docentes a quienes no les alcanza el tiempo para cumplir con la enseñanza de los contenidos del eje de Datos y Azar propuestos.

Aspectos	Cantidad	Porcentaje
Falta de tiempo	33	100%
No dominio del contenido	5	15%
El contenido no me agrada	4	12%

Con respecto a de lo anterior, los docentes pudieron justificar la falta de tiempo. Algunos de los comentarios más representativos expuestos se relacionan con la siguiente afirmación:

Las horas de libre disposición están dispuestas para la asignatura de matemática por lo cual el tiempo es suficiente. Sin embargo, al quedar datos y azar para el 2do semestre, todos los años, es una unidad que no es del agrado de los alumnos debido a que siempre lo trabajan antes de finalizar el año cuando el desgaste es mayor.

A partir de aquellos comentarios que apuntaban a la falta de tiempo para la enseñanza del eje de Datos y Azar, algunos docentes mencionaron que aquel problema podría ser reparado si se “*comienza con datos y azar el primer semestre*”.

Además, se puede afirmar respecto a los datos entregados por la encuesta realizada, que el **58% de los profesores encuestados se siente preparado para enseñar los contenidos para los niveles de 3° y 4° Medio en el eje de Datos y Azar para el año 2020**. Por otra parte, los docentes que opinaron que no se sentían preparados para enseñar los contenidos justificaron sus respuestas, una de la más relevantes fue:

Me encantaría asistir a capacitaciones, pero he ido a algunas y no aprendo más de lo que se. Creo que falta un curso en que sea más aplicado al aula, que muestren prácticas ya realizadas, clases de ejemplos, actividades. Ya que el contenido ya lo manejo. Ahora, me he hecho especialista por lo mismo, porque he estudiado por mi parte, pero reconozco que no todos los profes dominan los contenidos, menos dominan formas de enseñarlo. Pero creo que también es nuestra labor investigar siempre, buscar y aprender. Creo que lo que me gustaría es aprender a enseñar estos contenidos, y lograr las habilidades. Por ahora lo hago según mi criterio.

De manera general, algunos de los docentes encuestados emitieron un comentario final sobre el tema en discusión presente en la encuesta. Los profesores de matemática expusieron diferentes aristas relacionadas a la temática, uno de los comentarios más representativos entre la opinión de los docentes es el siguiente:

La Educación Estadística como disciplina ha resuelto que los y las estudiantes deben ser partícipes de la resolución de problemas. Desde ellos, surgen los

contenidos estadísticos como tales. Hoy falta sistematizar experiencias de aula que nos ayuden a transversalizar los contenidos en lugar de segmentarlos por nivel. La dispersión y variabilidad es digna de ser estudiada desde la educación básica ¿por qué dejarla para el final de la educación media? Algo me dice que el currículum oficial no quiere aceptar desde un principio que los datos son diversos.

El resto de los comentarios más representativos recopilados a través de la encuesta se encuentran en la sección Anexos. (Ver Anexo 2)

4.2 Material de actividades

El material de actividades tiene como finalidad apoyar al docente en los contenidos más débiles detectados en la encuesta en torno al eje de Datos y Azar para los niveles de 3° y 4° Medio. A partir de los resultados de la encuesta, los contenidos detectados para la creación del material de actividades son: Probabilidad condicional, distribución binomial, distribución normal y estandarización de la distribución normal.

Los contenidos detectados como deficientes según la percepción manifestada por los profesores en la encuesta con respecto a los Objetivos de Aprendizaje para 3° y 4° Medio en el eje de Datos y Azar dan pie a la secuenciación y creación de material. Las actividades asociadas a dichos contenidos quedan resumidas en la siguiente tabla.

Tabla 8. Resumen de contenidos y cantidad de actividades asociadas a cada Objetivo de Aprendizaje para los niveles de 3° y 4° Medio.

Nivel	Objetivo de Aprendizaje (OA)	Contenidos	Cantidad de actividades
3° Medio	OA 2: Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de	Probabilidad Condicional.	4

	dispersión y probabilidades condicionales.		
4° Medio	OA 2: Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.	Distribución Binomial Distribución Normal	7
TOTAL			11

A partir de los contenidos seleccionados entre los presentes en los Objetivos de Aprendizaje para el eje de Datos y Azar se crearon en total 11 actividades. A continuación, se detallan las actividades asociadas a los contenidos detectados como deficientes según la percepción declarada por los docentes en la encuesta realizada, describiendo el objetivo particular para cada una de estas en la siguiente tabla.

Tabla 9. Resumen de objetivos para las actividades asociadas a los contenidos desprendidos de los Objetivos de Aprendizaje presentes en las Bases Curriculares para 3° y 4° Medio año 2020.

Contenidos	Actividad	Objetivo
	N°1: Probabilidad Condicional.	Analizar y resolver problemas para la toma de decisiones que involucran probabilidad condicional en contextos de la vida cotidiana.

Probabilidad Condicional	Nº2: Independencia de sucesos estocásticos.	Identificar la independencia de sucesos para el desarrollo de problemas, que involucren probabilidades y utilizando la regla de Laplace, de forma intuitiva y colaborativa.
	Nº3: Teorema de Bayes.	Construir una estrategia para la resolución de problemas que permitan el uso del Teorema de Bayes a partir de la regla de Laplace y la Probabilidad Condicional en un contexto dado.
	Nº4: Teorema de Probabilidad total.	Construir una estrategia para la resolución de problemas que permitan el uso del Teorema de Probabilidad Total a partir de la construcción y análisis de un diagrama de árbol en un contexto dado.
Distribución Binomial	Nº1: Construcción de la Distribución Binomial.	Construir una estrategia que se aproxime a la variable aleatoria asociada a la distribución binomial para resolver la problemática planteada, a partir de un experimento Bernoulli y sus parámetros de manera intuitiva y colaborativa.
	Nº2: Distribución Binomial.	Construir intuitivamente una función de probabilidad asociada a la distribución binomial, que permita resolver la problemática planteada a partir del análisis de los cálculos de probabilidades presentes en una situación cotidiana.
	Nº3: Esperanza y varianza de	Comprender los conceptos de esperanza y varianza de una distribución binomial, a través

	una distribución Binomial.	del cálculo de éstos utilizando la variable aleatoria discreta relacionada a un contexto, su función de probabilidad y conceptos previos asociados a dichos estadísticos, de manera intuitiva y cotidiana.
Distribución Normal	N°1: Variable aleatoria continua.	Analizar el gráfico histograma y la tabla de frecuencia para resolver una problemática asociada a una variable aleatoria continua, haciendo uso del programa de GeoGebra, de forma crítica y colaborativa.
	N°2: Gráfico de distribución normal.	Comparar la forma de los polígonos de frecuencias y las medidas de resumen o estadísticas obtenidas de muestras aleatorias de distintos tamaños para una variable aleatoria continua con una distribución normal, mediante el uso de software.
	N°3: Distribución normal estándar.	Calcular probabilidades de una distribución normal utilizando la estandarización de esta, asociada a un contexto cotidiano, de forma reflexiva y colaborativa.
	N°4: Convergencia de una distribución binomial a una distribución normal.	Evidenciar la convergencia de la distribución binomial a una distribución normal con $np > 5$ y $nq > 5$ utilizando software educativo, de forma colaborativa.

Las actividades diseñadas para el apoyo de contenidos caracterizados como deficientes siguen el ciclo investigativo PPDAC, sin embargo, estas están orientadas directamente al

docente para apoyar la conducción de la enseñanza del aprendizaje de los estudiantes en el eje de Datos y Azar para 3° y 4° Medio. Particularmente, la estructura de las actividades se describe de la siguiente manera:

- Objetivo de la actividad: Se presenta el objetivo tridimensional específico de aprendizaje, a partir de este se genera una sugerencia para el desarrollo de las distintas etapas para la resolución de cada uno de los problemas, considerando un contenido, una habilidad y una actitud en cada una de ellas.
- Contexto: Se señala un contexto de tipo contingente, cotidiano o ficticio para abordar el objetivo de cada actividad, es este el que articula y apoya el nivel de comprensión que se puede alcanzar en cada actividad.
- Etapas del ciclo investigativo PPDAC: Se caracterizan cinco etapas presentes en la resolución del problema. Se comienza con una pregunta asociada al contexto, guiando los cuatro pasos siguientes y focalizando el contexto en torno a un contenido. Luego se presenta el plan que estructura los pasos a seguir para poder responder la pregunta, estableciendo un orden y prioridad en el desarrollo de la misma. Antes de tratar lo definido en el plan se recopilan los datos presentes en el contexto, ya sea de manera explícita o implícita, que serán utilizados en las acciones determinadas en la etapa del plan. Con los datos obtenidos se comienza la etapa de análisis, donde se buscará responder la pregunta asociada al contexto mediante la información obtenida, realizando diferentes acciones matemáticas para conseguir la respuesta. Finalmente se presentan las conclusiones, dado que las actividades están enfocadas a ser llevadas a cabo por los docentes, en esta etapa existen dos tipos de resultados: uno asociado al contexto, este contiene la respuesta a la pregunta planteada y cierra entonces el ciclo investigativo; el otro asociado directamente al contenido en el que se enfoca el objetivo de la actividad, particularmente son reflexiones más técnicas sobre las acciones matemáticas realizadas o la manera en la cómo concluir dicho proceso matemático realizado en la actividad.
- Nota al docente: De manera intermitente, según se considere necesario, se entregan consejos para llevar la actividad, considerando diferentes obstáculos que puedan surgir en el desarrollo de la misma, alternativas para tratar etapas en específicos y

preguntas orientadoras para el desarrollo de habilidades según corresponda. Además, en diferentes casos se entrega los conocimientos previos indispensables a considerar para poder desarrollar la actividad, y en otros diferentes métodos para institucionalizar el contenido matemático tratado a posteriori de la etapa de conclusiones.

A continuación, se expone un ejemplo de actividad presenten en la secuenciación de la enseñanza de los contenidos, extraída de la sección Anexos. (Ver Anexo 3.1)

III Medio: Probabilidad Condicional

Objetivo de aprendizaje (OA):

OA 2: Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales.

Habilidades:

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados

Actitudes:

Participar asumiendo posturas razonadas en distintos ámbitos: cultural, social, político, medioambiental, entre otros.

ACTIVIDAD N°4: TEOREMA DE PROBABILIDAD TOTAL

Objetivo de la actividad: Construir una estrategia para la resolución de problemas que permitan el uso del Teorema de Probabilidad Total a partir de la construcción y análisis de un diagrama de árbol en un contexto dado.

CONTEXTO: Con la llegada de la pandemia COVID-19, una clínica de Santiago de Chile fue la primera en proponer un examen para la detección de este virus en sus pacientes. Este es un test rápido, que, tras estudios realizados por dependencias de la clínica a partir de una muestra, señalan que su sensibilidad, es decir, la capacidad de examen para detectar el virus es de un 98%. Por otra parte, el test presenta una especificidad del 99%, que es el porcentaje de entregar casos negativos cuando los pacientes están sanos.

Se sabe que, a partir de la muestra estudiada por la clínica, la probabilidad de contagio es del 27,3%.

PREGUNTA: Si una persona al azar se realiza el examen ¿cuál es la probabilidad de que el test arroje un resultado positivo?

PLAN: ¿Qué datos necesitamos?

- Comprender la pregunta planteada.
- Identificar los sucesos asociados y definirlos.
- Comprender y reconocer los conceptos de sensibilidad y especificidad y sus diferencias.
- Identificar la probabilidad que existe de cada uno de los sucesos definidos.

DATOS:

Para la recolección de la información correspondiente para el cálculo de las probabilidades asociadas a la problemática se identifica inicialmente personas sanas y enfermas y así se asocia a ellos los resultados de sus test los cuales pueden ser positivos y negativos.

Concretamente, si el test da positivo se debe considerar que la persona puede estar enferma o sana. De esta forma, cuando se habla de una **sensibilidad** de un 98%, se refiere a la probabilidad de que el examen de positivo dado que la persona efectivamente está enferma.

En el caso de que el test dé negativo se debe considerar que la persona puede estar enferma o sana, en ese caso cuando se habla de una especificidad de un 99%, se refiere a la probabilidad de que el examen de negativo dado que la persona efectivamente no está enferma.

Se sugiere realizar la conversión de porcentajes a números decimales para lograr los cálculos pertinentes de las probabilidades.

ANÁLISIS:

Parte 1: Identificar y nombrar los sucesos asociados a la problemática planteada. Entonces, en esta primera parte se sugiere la definición de los siguientes sucesos:

E: El individuo está enfermo.

S: El individuo está sano.

+ : El resultado del examen es positivo.

- : El resultado del examen es negativo.

Nota: Se considera que ayudará al estudiante a diferenciar sucesos que puedan ser confundidos fácilmente.

Parte 2: Los estudiantes deben comprender a qué se refieren los conceptos enunciados y la diferencia entre ellos. Al detectar los datos se debe considerar la existencia de personas enfermas y sanas. También al realizarse el test existen dos posibles resultados: positivos y negativos. Además, considerar que:

- La sensibilidad es denotada por $P(+|E)$ (la probabilidad de que el test da positivo dado que el individuo está enfermo).
- La probabilidad complementaria a la sensibilidad es denotada por $P(-|E)$ (la probabilidad del test da negativo dado que el individuo está enfermo)
- La especificidad es denotada por $P(-|S)$ (la probabilidad del test da negativo dado que el individuo está sano).
- La probabilidad del complementario a la especificidad es denotada por $P(+|S)$ (la probabilidad de que el test da positivo dado que el individuo está sano)

Parte 3: Luego de reconocer los sucesos, los estudiantes pueden registrarlos en un diagrama de árbol e identificar las probabilidades especificadas en el enunciado que están asociadas a cada uno de los sucesos presentes.

Para comenzar con el diagrama de árbol, se divide la situación en dos, las cuales serán estar enfermo (E) y estar sano (S) y las respectivas probabilidades serán 0,273 y 0,727. Para representar los sucesos y sub sucesos definidos a continuación se adjunta el diagrama de árbol asociado y las probabilidades respectivas.

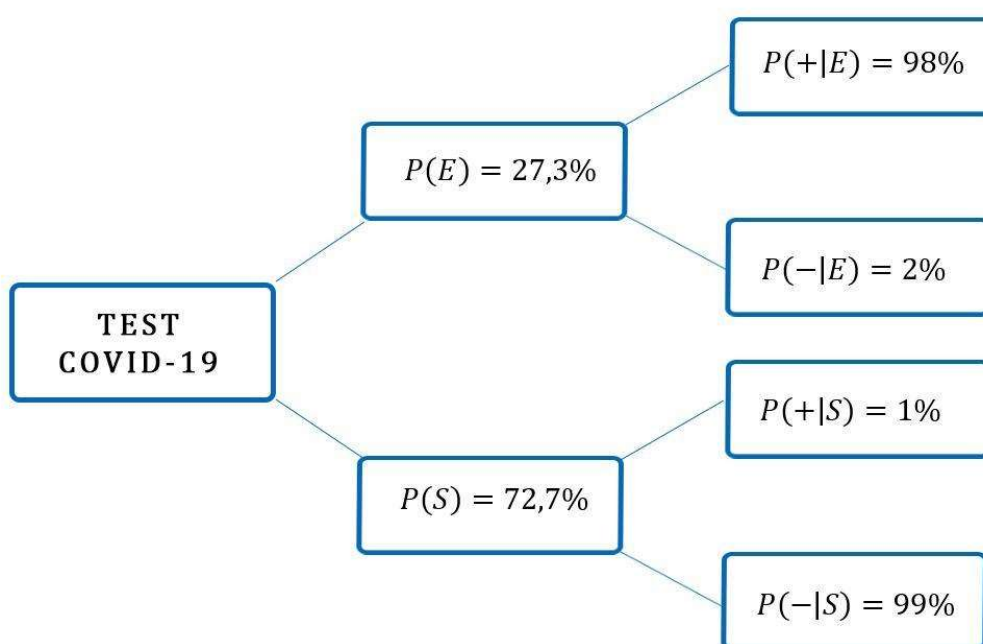


Figura 27.

Parte 4: Al elegir una persona al azar e implementar el test, este puede dar positivo o negativo, sin embargo, la pregunta apunta a calcular la probabilidad de que el resultado sea POSITIVO.

El resultado puede ser positivo en dos ocasiones:

(1) Cuando la persona **está enferma** dado que el test da positivo.

(2) cuando la persona **está sana** dado que el test da positivo.

Antes de calcular la probabilidad de ocurrencia de cada caso, se debe reconocer probabilidad de la unión de sucesos excluyentes presente en la proposición anterior ya que ocurre el caso (1) o el caso (2).

Para calcular la probabilidad del primer caso (1) se debe considerar la probabilidad de la persona efectivamente esté enferma y la probabilidad de que el test de positivo dado que está enferma (sensibilidad) como deben ocurrir ambos sucesos se debe utilizar la definición de probabilidad condicional, es decir:

$$\begin{aligned}P(+ \cap E) &= P(E) \cdot P(+|E). \\ &= 0,273 \cdot 0,98\end{aligned}$$

Para calcular la probabilidad en el segundo caso (2) se debe considerar la probabilidad de que la persona no esté enferma y la probabilidad de que el test de positivo dado la persona que no está enferma (complemento de la especificidad), al igual que en el caso anterior como deben ocurrir ambos sucesos se debe utilizar la definición de probabilidad condicional:

$$\begin{aligned}P(+ \cap S) &= P(S) \cdot P(+|S). \\ &= 0,727 \cdot 0,01\end{aligned}$$

Parte 5: Entonces la suma de las probabilidades asociadas a los casos (1) y (2) nos dará como resultado la probabilidad de que el test de positivo al ser aplicado en una persona al azar:

$$P(+) = P(E) \cdot P(+|E) + P(S) \cdot P(+|S)$$

Nota al docente: Al considerar alguna manera más directa para el cálculo de la probabilidad solicitada, por ejemplo, pensar en la unión de los sucesos “test da positivo”, se espera que los estudiantes se den cuenta que no se pueden considerar sucesos independientes y sus probabilidades para responder a la pregunta inicial. Por tanto, el docente debe ser capaz de tomar esta apreciación por parte de los estudiantes para introducir la definición formal de **Probabilidad Total**, la cual relaciona sucesos que están condicionados.

CONCLUSIONES:

- Considerar que el análisis realizado por parte de los estudiantes y la obtención de la respuesta se basa implícitamente en el teorema de probabilidad total. Es necesario considerar los sucesos definidos inicialmente y a la vez los sucesos complementarios, dando importancia a comprender los sucesos definidos como sensibilidad y especificidad, para lograr identificar las probabilidades asociados y desarrollar de manera óptima la resolución del problema.
- A partir del cálculo realizado mediante el análisis y operatoria de las probabilidades expuestas en las ramas del diagrama de árbol, se obtiene entonces la probabilidad de que el test arroje un resultado positivo es de 0,27481.

De manera más detallada se puede encontrar cada actividad asociada a los contenidos encasillados como deficientes en la sección Anexos (Ver Anexo 3)

4.3 Revisión de las Actividades por parte de Docentes de Matemática.

De acuerdo a las observaciones y aportes realizados por los cuatro docentes de matemática, que destacaron la diversidad en las actividades, indicando además un apoyo al ejercicio del profesorado. En general, las actividades indicadas fueron consideradas claras, lúdicas y sobre todo se agregó a la metodología, herramientas tecnológicas como GeoGebra dando con ello una mirada complementaria a la Estadística. El análisis realizado por los docentes se resume en la siguiente tabla que está asociada a las listas de cotejo (Ver en Anexo 4.1)

Tabla 10. Presencia de Indicadores de la Lista de Cotejo para Retroalimentar las Actividades diseñadas.

	N° de Actividad ²										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Indicadores											
1. Considera que la actividad cumple el objetivo planteado.	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
2. Las instrucciones de la actividad son claras, y por tanto podría aplicarse sin problemas.	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
3. Considera útil la actividad para la enseñanza del contenido asociado.	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
4. Recomendaría la actividad para la enseñanza del contenido asociado.	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si
5. Considera que la metodología y estructura utilizada favorece el aprendizaje de los estudiantes.	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si	Si

Respecto a la sección de comentarios y observaciones presentes en las listas de cotejo respondidas por los docentes destacan diferentes aportes sobre cada actividad. Uno de ellos, evidencia fortalezas en la metodología y el buen uso de recursos utilizados en la enseñanza. Por ejemplo, para las actividades relacionadas al contenido Probabilidad Condicional “*Se ven claramente cada uno de los pasos de la probabilidad condicionada, mostrando sus variables claras y con una redacción adecuada*”, otros aportes indican lo escueto de los planteamientos, así como la claridad en las etapas de cada actividad y la elaboración de los diagramas de árbol. Además, se destaca que las actividades presentan recursos pertinentes, destacando la versatilidad, como mencionó uno de los docentes “*incluso se podría cambiar*”

² Los N° de cada actividad son los siguientes: 1. Probabilidad Condicional, 2. Independencia de Sucesos Estocásticos, 3. Teorema de Probabilidad Condicional, 4. Teorema de Bayes, 5. Construcción de la Distribución Binomial, 6. Distribución Binomial, 7. Esperanza y Varianza de una Distribución Binomial, 8. Variable Aleatoria Continua, 9. Gráfico de la Distribución Binomial, 10. Distribución Normal Estándar y 11. Convergencia de una Distribución Binomial a una Distribución Normal.

solo el contexto y cumpliría el objetivo de todas formas”, y por tanto se pueden seguir aplicando a través del tiempo.

Dentro de las sugerencias realizadas por los docentes que retroalimentaron las actividades a través de la lista de cotejo, se destaca un comentario que alude al tiempo de cada actividad, donde sería necesario definir la duración que tendría la aplicación de cada una de ellas, sin embargo, este punto no se consideró ya que se enfocaría al tiempo que cada profesor estimara pertinente, es decir, libertad en la implementación. Es importante destacar que las actividades pueden tener una duración de una clase completa de dos horas pedagógicas para su realización, sin embargo, si el docente estimara conveniente, podría separar incluso en dos clases, no hay tiempo mínimo ni máximo, sino más bien un recurso para la enseñanza.

Todos los comentarios expuestos por los docentes se encuentran presentes en la sección de Anexos. (Ver Anexo 4.2)

Capítulo V: Conclusiones y Proyecciones.

Existen conclusiones que fueron extraídas a partir de elementos relacionados al análisis de la encuesta, asociados a la actualización de las Bases Curriculares para 3° y 4° Medio para el año 2020, referidas a la percepción y preparación que tienen los docentes de matemática, y a partir de él sobre las posibles estrategias y oportunidades que se ofrecen para tratar contenidos y habilidades que se declaren con mayores dificultades, particularmente haciendo referencia a las actividades ofrecidas como resultados de esta investigación.

Con respecto a la información recaudada a partir de los comentarios más relevantes obtenidos en la encuesta, se observa que los docentes de matemática critican el hecho de que algunos colegas no se encuentran capacitados para conducir la enseñanza de los nuevos contenidos declarados en la actualización de las Bases Curriculares para 3° y 4° Medio, además de manifestar la necesidad de capacitaciones para tener mejor manejo del contenido que corresponde curricularmente enseñar en el aula, explicitando que es sumamente importante asistir a estas para mejorar las prácticas educativas.

En la recopilación de comentarios se logra evidenciar elementos presentes en el Marco para la Buena Enseñanza (CPEIP, 2008), los profesores de matemática han destacado de manera implícita la ausencia de criterios correspondientes al Dominio C: “Enseñanza para el aprendizaje de todos los estudiantes” en sus propios procesos de enseñanza y en los que llevarán a cabo para los niveles de 3° y 4° Medio para el año 2020, por ejemplo:

Más allá del contenido en sí, creo que los docentes necesitamos mayor manejo de la didáctica para enseñar y no irnos hacia la profundización sino más bien en la utilidad como lo proponen las bases.

Es posible relacionar el comentario anterior con el criterio C3: “El contenido de la clase es tratado con rigurosidad conceptual y es comprensible para los estudiantes.”, ya que se explicita que puede existir deficiencia o ausencia del logro de dicho criterio en las futuras prácticas pedagógicas relacionadas a los nuevos contenidos en la actualización de los Objetivos de Aprendizajes para el eje de Datos y Azar en dichos niveles educativos.

Por otra parte, los docentes declaran que la unidad de Datos y Azar queda postergada generalmente al final del año escolar, por lo que lo referido al criterio C4: “Optimiza el

tiempo disponible para la enseñanza” quedará condicionado por cómo haya ocurrido la planificación de tiempo para las otras tres unidades previas, provocando en algunos casos un retraso, obstaculización y/o ausencia del logro de los Objetivos de Aprendizajes planteados el eje de Datos y Azar, como se muestra a continuación.

El error que se comete con Datos y Azar es dejar la unidad para final de año. Generando descontextualización de los contenidos a tratar por parte del docente. Hace poco participé en un curso de "Resolución de problemas en datos y azar para 3ro y 4to medio" y se logra observar que varios profesores están desconectados, principalmente porque no logran por tiempo ver los contenidos obligatorios.

Con respecto a la falta de preparación o manejo de contenidos a enseñar declarados en la actualización de las Bases Curriculares de 3° y 4° Medio en el eje de Datos y Azar para el año 2020, los docentes exponen en sus comentarios de forma explícita la “falta de didáctica para preparar a los docentes”, evidenciando la clara ausencia del criterio A3 en sus propias prácticas educativas respecto al dominio “Preparación de la Enseñanza” que señala que el docente “Domina la didáctica de las disciplinas que enseña” en la enseñanza de contenidos y habilidades, donde ellos mismos detectan que esta falencia estará presente en su ejercicio profesional conforme a esta y futuras actualizaciones de las Bases Curriculares de 3° y 4° Medio en el eje de Datos y Azar para el año 2020.

Considerando el recurso entregado por el Mineduc a los estudiantes, el Texto del Estudiante de Matemática para 3° y 4° Medio (Mineduc, 2020), si bien los problemas y situaciones de enseñanza presentes están estructurados de manera ascendente y coherente y pretenden desarrollar la metacognición de los estudiantes, se puede observar que no incluyen definiciones intuitivas. Si bien el texto presenta a los estudiantes una variedad de problemas y aplicaciones contextualizados utilizando herramienta tecnológicos, como propone Rossman y Short (1995), pese a conectar con la interpretación teórica carecen de una interpretación intuitiva a partir de una aplicación para un problema concreto al vincular conceptos de estadística y probabilidad, como plantea Montgomery y Runger (2006). La ausencia de dicho elemento se consideró como una de las directrices para la creación de actividades para la enseñanza de contenidos en concordancia con lo planteado por las Bases Curriculares para el año 2020 (Mineduc, 2019).

En cuanto a la experiencia de diseñar actividades para el eje de Datos y Azar utilizando el Ciclo Investigativo PPDAC, es importante destacar que los docentes declararon carecer de herramientas didácticas para el trato de contenidos de dicha área, más aún para aquellos que declaran poseer un nivel deficiente. El trabajo de enseñanza a partir del uso de dichas actividades permite al docente estructurar y comprender de mejor manera la enseñanza de los contenidos a tratar, sin dejar de lado incluir un contexto que involucre a los estudiantes y entregue un sentido y vínculo con su proceso de enseñanza, es decir, el docente toma en consideración distintas oportunidades y obstáculos previo a la clase, eliminando elementos de prácticas más conductistas que no favorezcan el logro de aprendizajes significativos en los últimos niveles de la enseñanza. Además, permite que los estudiantes trabajen activamente en todo el desarrollo para la búsqueda de la resolución de la problemática planteada asociada al área de datos y probabilidades, así como también trabajar con el Aprendizaje Basado en Proyectos para potenciar el trabajo colaborativo en los estudiantes, habilidad presente para el siglo XXI declarado por el Ministerio de Educación. Además, considerar un ciclo en etapas para llevar el proceso de enseñanza en estudiantes de diferentes contextos le entrega un sentido de pertenencia al estudiante en el logro del objetivo propuesto, el cual se condice directamente con lo presente en las actuales Bases Curriculares para los niveles de 3° y 4° Medio, no dejando fuera o disminuyendo la participación del grupo curso hasta el final de la clase. Es importante destacar que la secuenciación de las actividades, en contraposición de diseñar actividades independientes, podría implicar la mejora y comprensión progresiva de los estudiantes en cómo abordar problemas que involucran datos o azar.

Además, resulta imprescindible mencionar que las actividades propuestas responden al cumplimiento de los Objetivos de Aprendizaje propuestos en la actualización curricular a través de objetivos específicos, es por esto que para alcanzar el logro de los objetivos generales es necesario complementar el material propuesto con planificaciones que estén acorde a este tipo de actividades, así también considerando los indicadores de logros asociados para poder unificar todo el proceso educativo y no presentar todas las herramientas de los procesos de aprendizaje de manera independiente. O bien, complementar las

planificaciones y material creado por cada docente utilizando las actividades propuestas como resultado de esta investigación.

Es pertinente mencionar que ninguno de los creadores de la presente investigación había trabajado previamente con elementos del eje de Datos y Azar utilizando el Ciclo Investigativo PPDAC, sin embargo, no se presentaron mayores dificultades técnicas relacionadas a la estrategia investigativa utilizada, sino más bien se presenta como un desafío en la preparación y mejora de los procesos de enseñanza. Es por esto que los autores consideran que la falta de material relacionado al contenido está asociado al desconocimiento y/o falta de interés en conocer y utilizar estrategias para la enseñanza de la estadística, como lo son el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y el Ciclo Investigativo PPDAC, que si bien son herramientas relativamente nuevas, facilitan y orientan el quehacer docente en la enseñanza estadística, que responde directamente a la falta de didáctica estadística en la formación inicial docente.

La investigación realizada entrega estrategias que permiten una enseñanza de la estadística basada en la investigación, lo que resulta un aporte al docente en la realización de las clases, ya que la metodología propuesta, además de ser distinta a la utilizada generalmente por los docentes según el reporte GAISE, es la apropiada para la enseñanza de la estadística ya que fomenta la alfabetización estadística, además de acentuar elementos como el diseño de recolección de información, exploración de datos y la interpretación de resultados. Es por esto que las actividades diseñadas han sido creadas con la intención de que puedan ser utilizadas por los profesores que quieran encaminarse hacia una educación estadística contextualizada y que respondan a las Habilidades para el Siglo XXI planteadas por el MINEDUC.

De esta manera, se observó el logro del objetivo general de esta investigación pues, a partir de la percepción de los docentes sobre sus prácticas pedagógicas, recopiladas a través de la encuesta realizada, se logró proponer un diseño de 11 actividades para los niveles de 3° y 4° Medio, las cuales obedecen a las directrices curriculares presentes en las Bases Curriculares vigentes (Mineduc, 2019) y a los contenidos que presentan mayores dificultades en su enseñanza según lo manifestado por los profesores encuestados. Todas las actividades propuestas en el diseño consideran coherencia y ascendencia en el trato de los contenidos como se presentan en el Texto del Estudiante de Matemática 3° y 4° Medio entregado por el

Mineduc para el año 2020, considerando interpretaciones teóricas e intuitivas propuestas por diversos autores, articuladas con las habilidades para el siglo XXI propuestas por el Mineduc y la metodología investigativa PPDAC consideradas para esta investigación.

Para complementar el resultado de esta investigación, inicialmente las actividades propuestas serían implementadas en cursos de diversos establecimientos educacionales, sin embargo, debido a la emergencia sanitaria por Covid-19 que actualmente vive el mundo, la metodología que se aplicaría en este estudio, debió modificarse, ajustándose a la revisión y evaluación de profesores que imparten en estos cursos, siendo el objetivo de ello diseño y contenido de las actividades, ya sea metodología aplicada, tiempo de desarrollo y los recursos utilizados. Además, es importante destacar la retroalimentación de los docentes que participaron en esta etapa a partir de la lista de cotejo (Ver Anexo 4), indicaron que recomendarían y utilizarían las actividades para la enseñanza de los contenidos expuestos, esperando una buena llegada al aula para la aplicación de estas, considerando además el material como un buen instructivo planteado para la enseñanza y el cumplimiento de los objetivos particulares de las actividades y, por tanto, de los Objetivos de Aprendizajes (OA) planteados en las Bases Curriculares 2020 (Mineduc, 2019).

Además, se pueden implementar actividades para profesores en formación, ya sea dentro o fuera de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE), con el fin de nutrir las problemáticas y desarrollo de las etapas de la misma y al mismo tiempo para educar a los futuros docentes en base al desarrollo de las mismas habilidades que, a futuro, implementarán en sus prácticas pedagógicas, destacando la importancia de la didáctica de la estadística y diferentes asignaturas dentro de la formación inicial docente en matemática.

Algunas interrogantes que resultan a partir de esta investigación son:

- ¿Es posible vincular el trabajo dentro del eje de Datos y Azar con otras asignaturas para generar un aprendizaje transversal?
- ¿Qué estrategias se pueden utilizar dentro de los otros ejes de la asignatura de matemática en búsqueda del logro y desarrollo de las Habilidades para el Siglo XXI?
- ¿Qué factores limitan dichos ejes y entregan poco tiempo a la unidad de Datos y Azar?

- ¿Cómo se puede complementar la formación inicial docente matemática para responder a las necesidades didácticas y el desarrollo de las habilidades actuales propuestas por el Ministerio de Educación?

Referencias bibliográficas.

- Andreu M. A. (2016). *Cooperative or collaborative learning: Is there a difference in university students' perceptions?*. Revista Complutense de Educación. 27(3), pp. 1041-1060. Madrid
- Araneda, A. Del Pino, G. Estrella, S. Icaza, G y San Martín, E. (2011). *Recomendaciones para el currículum escolar del eje de datos y probabilidad*. Chile: Sociedad Chilena de Estadística (no publicado).
- Arguelles, D., N. Nagles (2007). Estrategias para promover procesos de aprendizaje autónomo. Colombia: Alfaomega.
- Batanero C. (2001). *Didáctica de la estadística*. España.
- Batanero, C. Arteaga, P y Contreras, J. (2011). *El currículum de estadística en la enseñanza obligatoria*. Revista de educación matemática y tecnológica Ibero-americana, 2(2). Recuperado el 20 de mayo de 2020 de <https://www.ugr.es/~jmcontreras/pages/Investigacion/articulos/2011EmTEia.pdf>
- Brousseau, G. (1983). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 4(2), 164-198.
- Calandra, M y Costa, V. (2015). *LA PROBLEMÁTICA DE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA CONTINUA Y DE FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD*. Universidad Nacional de La Plata. Argentina.
- Contreras J. M., Cañadas G. R., Gea M. M.y Arteaga P. (Eds.), Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 309-317). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.
- CPEIP (2019). *Metodología del Aprendizaje Basado en Proyectos: Foco formativo de las nuevas bases curriculares de 3° y 4° medio*. Ministerio de Educación. Chile. Recuperado el 20 de mayo de 2020 de https://ubiqq.com/cpeip/Metodologia_de_Aprendizaje_Basado_en_Proyectos.

Devore y Jay L. (2008). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. Séptima edición. México: Cengage Learning.

Díaz, Carmen, de la Fuente & Inmaculada. 2006. *Dificultades en la resolución de problemas que involucran el teorema de Bayes un estudio exploratorio en estudiantes españoles de Psicología Educación Matemática*. (vol. 18(2), pp. 75-94).

Educación 2020 (2020). *Aprendizaje Basado en Proyectos*. Chile. Recuperado el 20 de mayo de 2020 de <http://educacion2020.cl/aprendizaje-basado-en-proyecto/>

Estrella, S. (2017). *Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico*. En: Salcedo, A. (Comp.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*, (173 – 194). Caracas: Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela.

Falk, R. (1986), “*Conditional Probabilities: Insights and Difficulties*”, en R. Davidson y J. Swift (eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*, Victoria, Canada, International Statistical Institute, pp. 292-297. (1989), “*Inference Under Uncertainty Via Conditional Probability*”, en R. Morris (ed.), *Studies in Mathematics Education*, vol. 7, pp. 175-184, París, Unesco.

Flores P., Ruíz M., García J. & Arteaga B. (2014). *LA FORMACIÓN ESTADÍSTICA: ¿UN OBSTÁCULO PARA LA PUBLICACIÓN EN EDUCACIÓN?* España.

Franklin C., Kader G., Mewborn D., Moreno J., Peck R., Perry M. & Sheaffer R. (2005). *Lineamientos para la evaluación y enseñanza en educación estadística, Reporte (GAISE)*. American Statistical Association.

Godino, J. D y Batanero, C. (2008). *Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica*. Conferencia Invitada al VI CIBEM, Puerto Montt (Chile), 4-9 Enero 2009.

Gómez, A., y Sánchez, E. (2008). *El pensamiento estadístico en la planificación de lecciones de estadística por profesores de secundaria*. Investigación en educación matemática XII. Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Heitele, D. (1975). *An epistemological view on fundamental stochastic ideas*. Educational Studies in Mathematics, 6, 187-205.

Henry, M. (2001). *Notion d'expérience aleatoire. Vocabulaire et modèle probabiliste*. En M. Henry (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 173-186). Paris: Presses Universitaires de France.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación*: Roberto Hernández Sampieri, Carlos Fernández Collado y Pilar Baptista Lucio (6a. ed. --.). México D.F.: McGraw-Hill.

Hoemann, H. W., y Ross, B. M. (1982). *Children's concepts of chance and probability*. En C. J. Brainerd (Ed.), *Children's logical and mathematical cognition*. Nueva York: Springer Verlag.

Kolmogorov, A.N. (1950). *Foundations of Theory of Probability*. New York: Chelsea.

Konold, C. (1995). *Issues in assessing conceptual understanding in probability and statistics*. Journal of Statistics Education, 3(1). Recuperado el 20 de mayo de 2020 de <http://www.amstat.org/publications/jse/v3n1/konold.html>

Maronna, R.A. (1995). *Probabilidad y Estadística Elementales para estudiantes de ciencias*. La Plata: Exacta.

Marhori V. A. (2015). *Tipificación de los errores que se presentan al identificar una variable aleatoria de distribución binomial en problemas contextualizados*. Perú.

Mercedes, Valverde y Marín. (2017). *UN ESTUDIO DE LA PRESENTACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL EN LOS TEXTOS DE BACHILLERATO*. España

Meyer, P. L. (1992). *Probabilidad y aplicaciones estadísticas*. México: Addison - Wesley Iberoamericana.

Ministerio de Educación. (2008). *Marco para la Buena Enseñanza*. Chile: Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP). Recuperado el 20 de Mayo de 2020 de <https://www.docentemas.cl/docs/MBE2008.pdf>

- Ministerio de Educación. (2009). *Propuesta Ajuste Curricular*. Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios. Matemática. Junio, 2009. Ministerio de Educación. Chile
- Ministerio de Educación (2018). Un recorrido por las habilidades para el siglo XXI. Chile: Unidad de Currículum y Evaluación. Recuperado el 20 de Mayo de 2020 de <https://curriculumnacional.mineduc.cl/614/w3-article-86740.html>
- Ministerio de Educación. (2019). *Bases Curriculares 3° y 4° Medio*. Actualización Noviembre 2019. Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.
- Ministerio de Educación. (2019). *Programa de Estudio Matemática 3° Medio*. Chile: Unidad de Currículum y Evaluación. Recuperado el 20 de Mayo de 2020 de https://curriculumnacional.mineduc.cl/614/articles-140137_programa.pdf
- Ministerio de Educación. (2019). *Programa de Estudio Matemática 4° Medio*. Chile: Unidad de Currículum y Evaluación. Recuperado el 20 de Mayo de 2020 de https://curriculumnacional.mineduc.cl/614/articles-140142_programa.pdf
- Ministerio de Educación. (2020). *Texto del estudiante. Matemática 3° y 4° Medio*. Edital:SM. Chile
- Moore, D. and Cobb, G. (1997). *Mathematics, Statistics, and Teaching*, American Mathematical Monthly, 104, 801–823.
- Montgomery, D.C. y Runger G.C. (2006). *Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería*. México: Limusa Wiley.
- NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Council.
- NCTM (2002–2004). *Navigating through Data Analysis and Probability Series*. Reston, VA: The Council.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Council.
- OECD. (2010) *Síntesis Estudio Económico de Chile, 2010*. Recuperado el 20 de mayo de 2020 de <http://www.oecd.org/dataoecd/7/38/44493040.pdf>

Ortiz, J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. (2006). *Comparación de probabilidades en maestros en formación X Simposio*. La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática- Huesca: España

Ortiz, J. J., y Serrano, L. (2001). *Reflexiones sobre el lenguaje probabilístico en los libros de texto de Educación Secundaria*. Comunicación presentada en las Jornadas Europeas de Estadística. Mallorca; Instituto Balear de Estadística. Recuperado el 20 de mayo de 2020 de http://www.caib.es/ibae/esdeveniments/jornades_10_01

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically*. New York: Routledge&K

Poincaré, J. H. (1979). *El azar*. En J. Newman (Comp). Sigma. El mundo de las Matemáticas, (Vol III, pp. 68-82). Barcelona: Grijalbo.

Rincón, L. (2007). *Curso elemental de probabilidad y estadística*. México.

Rossman, A. y T. Short (1995), “Conditional Probability and Education Reform: Are They Compatible?”, Journal of Statistics Education, vol. 3, núm. 2. Recuperado el 20 de mayo de 2020 de <http://www.amstat.org/publications/jse/v3n2/rossman.html>

Serradó, A. (2003). *El tratamiento del azar en educación secundaria obligatoria, Doctoral Dissertation*. University Microfilms Incorporated's Proquest Digital Dissertations, Michigan. AAT 3126908 Number

Skemp, R. R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas* (Vol. 15). Ediciones Morata.

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999), *Statistical Thinking in Empirical Enquiry* (Dr. Román Hernández Martínez.), International Statistical Review, 67, 223-265.

Anexos

Anexo 1. Encuesta para el análisis de la percepción que poseen las y los profesores de matemática sobre el manejo de los contenidos y habilidades del eje Datos y Azar a tratar en los niveles de 3° y 4° Medio, según actualización curricular para el año 2020

ENCUESTA PARA DOCENTE EN EJERCICIO

La siguiente encuesta es de carácter anónimo y es parte de un trabajo de investigación conducente a tesina.

Agradecemos su colaboración.

OBJETIVO DE LA ENCUESTA:

Determinar la percepción que poseen las y los profesores de matemática en ejercicio sobre el manejo de los contenidos del eje Datos y Azar, a tratar en los niveles de 3° y 4° medio, según actualización curricular para el año 2020.

INSTRUCCIONES:

Por favor, lea cada una de las siguientes preguntas (abiertas y de alternativas). Marque la alternativa que usted considere apropiada con una X y responda las preguntas abiertas según sea el caso.

Ítem I: Identificación

1. ¿Realiza actualmente clases en los niveles de 3° y 4° medio?

- a. Sí
- b. No

Si actualmente realiza clases en los niveles de 3° y 4° medio, ¿alcanza a enseñar durante el año académico los contenidos vigentes en el eje de datos y azar.

- a. Sí
- b. No

Si no realiza clases en los niveles de 3° y 4° medio, ¿En qué niveles realiza clases?

2. ¿En qué universidad estudió la carrera que le permite desempeñarse como profesor? Indique año de egreso y especifique su carrera.

-
-
3. ¿Cuántos años de experiencia tiene realizando clases de matemática en enseñanza media?
-

Ítem II: Manejo del contenido y habilidades.

1. ¿Se encuentra informado sobre los contenidos que se declaran en los programas de estudio de 3° y 4° medio para el eje de datos y azar y que deben tratarse a partir del año 2020?
- a) Sí
- b) No

En el siguiente cuadro, se presentan los objetivos de aprendizaje y los contenidos relacionados a cada objetivo de aprendizaje que están declarados en las bases curriculares de 3ro y 4to medio en el eje de datos y azar para el año 2020.

Nivel de estudio	Objetivo de aprendizaje	Contenido
3° medio	OA 2: Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales.	✓ Medidas de dispersión, varianza y desviación estándar. ✓ Valor esperado, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria discreta. ✓ Probabilidad condicional.
4° medio	OA 2: Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.	✓ Distribución Binomial. ✓ Distribución Normal. ✓ Estandarización distribución normal.

Con respecto a los contenidos, marque su respuesta a las siguientes preguntas:

	3° Medio	4° medio
(1.a) ¿Qué contenidos estudió en su formación inicial docente, asociados a los objetivos de aprendizaje mencionados?	☐ Medidas de dispersión, varianza y desviación estándar. ☐ Valor esperado, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria discreta. ☐ Probabilidad condicional.	☐ Distribución Binomial. ☐ Distribución Normal. ☐ Estandarización distribución normal.
(1.b) ¿Qué contenidos asociados a cada Objetivo de Aprendizaje ha enseñado?	☐ Medidas de dispersión, varianza y desviación estándar. ☐ Valor esperado, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria discreta. ☐ Probabilidad condicional.	☐ Distribución Binomial. ☐ Distribución Normal. ☐ Estandarización distribución normal.
(1.c) ¿Para cuáles contenidos se sienta preparado para conducir la enseñanza?	☐ Medidas de dispersión, varianza y desviación estándar. ☐ Valor esperado, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria discreta. ☐ Probabilidad condicional.	☐ Distribución Binomial. ☐ Distribución Normal. ☐ Estandarización distribución normal.
(1.d) ¿Cómo piensa abordar los contenidos para los que no se siente preparado?	a. Estudiando solo/a. b. Asistiendo a capacitaciones c. Otro. Especifique cual	a. Estudiando solo/a. b. Asistiendo a capacitaciones c. Otro. Especifique cual

2. ¿Está informado/a sobre las habilidades que se declaran en los planes y programas de 3ro y 4to medio para el eje de datos y azar del año 2020?

a) Sí

b) No

Se presentan, en el siguiente cuadro, los objetivos de aprendizaje y las habilidades relacionadas que están declaradas en los planes y programas de 3ro y 4to medio en el eje de datos y azar para el año 2020.

Nivel de estudio	Objetivo de Aprendizaje	Habilidades
3° Medio	OA 2: Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales.	OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico. OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.
	OA 2: Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del	OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico. OA f. Evaluar modelos para estudiar un fenómeno,

4° Medio	análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.	analizando críticamente las simplificaciones requeridas y realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.
----------	---	--

A partir de los objetivos de aprendizaje y las habilidades declaradas en los planes y programas de 3° y 4° medio en el eje de datos y azar para el año 2020. Se plantean las siguientes preguntas:

	3° Medio	4° medio
(2.a) ¿Se siente preparado o preparada para promover el desarrollo de las habilidades mencionadas en los objetivos de aprendizajes?	a. Sí b. No	a. Sí b. No
(2.b) ¿Cómo piensa abordar los contenidos si no se siente preparado o preparada para promover el desarrollo de las habilidades mencionadas en cada objetivo de aprendizaje?	a. Estudiando solo/a. b. Asistiendo a capacitaciones c. Otro. Especifique cuál _____	a. Estudiando solo/a. b. Asistiendo a capacitaciones c. Otro. Especifique cuál _____.

3. Según su opinión, ¿Considera correcto enseñar los contenidos y habilidades que propone el MINEDUC en la actualización de los planes y programas para el 2020 dentro de los niveles de 3° y 4° medio?

- Es correcto.
- Medianamente correcto.
- Intermedio.
- Medianamente incorrecto.
- Es incorrecto.
- No, son muchos contenidos.

4. ¿Encuentra pertinentes los Objetivos de Aprendizajes planteados en la actualización de los planes y programas para el eje de Datos y Azar de 3° y 4° medio para el año 2020?

a) Sí, ¿por qué?

b) No, ¿por qué?

5. ¿Encuentra que existe coherencia entre el programa de estudio vigente hasta segundo medio y la actual base curricular de 3° y 4° medio, en el eje de Datos y Azar?

a) Sí

b) No

Argumente su respuesta:

Ítem III: Enseñanza del contenido

1. Actualmente, ¿le alcanza el tiempo para tratar los contenidos de 3° y 4° medio en el eje de Datos y Azar según lo propuesto en el currículum nacional vigente?

a) Sí

b) No

Si su respuesta fue Sí, ¿Por qué?

Si su respuesta fue No, marque todas las alternativas que usted considere apropiadas:

a) Por falta de tiempo.

b) No dominio del contenido.

c) El contenido no me agrada.

d) No conozco el plan nacional vigente.

e) Otro:

2. Actualmente, ¿de dónde extrae material para preparar las clases de los contenidos del eje de Datos y Azar en 3° y 4° medio?

a) Programa de Estudio.

b) Textos escolares.

c) Internet.

d) Creando el material didáctico.

e) Otros: _____

3. Si el próximo año debería implementar clases en niveles de 3° y 4° medio según el ajuste de los planes y programas 2020 porque su colegio así lo exige, ¿se encuentra preparado/a para enseñar estos contenidos en el eje de Datos y Azar?

a) Sí

b) Tal vez, si me capacito o estudio.

c) No

Argumente su respuesta:

4. Realice algún comentario que le parezca pertinente, ya sea sobre la encuesta o de su quehacer docente.

Anexo 2. Justificaciones y reflexiones más representativas recopiladas a través de lo manifestado por los docentes en la encuesta

Anexo 2.1 Justificación por falta de tiempo para la enseñanza de contenidos

Profesor/a	Justificación
1	Me falta prepararme un poco en el manejo de las habilidades y la aplicación en contextos llamativos para los estudiantes.
2	Me siento preparado para enseñar los contenidos, no así, para aplicar la metodología sugerida en el programa, creo que hace falta una mayor cantidad de material o bien tener acceso desde ya al texto escolar para al menos conocer el material que tendrán disponible los alumnos y alumnas.
3	Lamentablemente mis conocimientos solo el eje son bajos, he estudiado y mejorado, pero la falta de tiempo y recursos para pagar un curso (350.000) lo hace imposible, mi ciudad no cuenta con universidades que presten cursos de formación continua.
4	Los contenidos son de mi dominio, solo falta estudiar o profundizar algunos, para poder realizar mejores clases.
5	Necesito repasar contenidos vistos en mi formación docente, para entregar de la mejor forma las definiciones
6	Siempre es necesario profundizar contenidos, para entregar de mejor manera la transposición.

7	Se entregan con poco tiempo los programas de modo de permitir a los docentes prepararse.
8	Siento que hay algunos objetivos para los cuales debo prepararme mejor.
9	Es absolutamente necesaria la capacitación de los docentes en el área.
10	Tengo la formación inicial. Solo hace falta estudiar para repasar.
11	La base teórica la tengo solo tengo que estudiar para recordar.
12	Sería necesario ahondar en la didáctica de enseñanza
13	Por lo adquirido en la formación inicial docente
14	Tuve una buena base en la universidad
15	Me falta recordar ciertos contenidos
16	Con una buena capacitación
17	Necesito estudiar

Anexo 2.2 Reflexiones Finales de la Encuesta

Profesor/a	Reflexiones
1	Si bien los tiempos nos alcanzan en las escuelas para ver todo lo solicitado por el currículum está la opción de profundizar en este eje con un nuevo plan de formación diferenciada "estadística descriptiva e inferencial y probabilidades", esto nos da la opción a los profesores y profesoras de poder abordar y profundizar en la materia, lo que personalmente considero una ganada, ya que este eje está siendo dejado muy de lado y cada vez más necesario en distintas áreas de desarrollo fuera de la escuela.
2	Más allá del contenido en sí, creo que los docentes necesitamos mayor manejo de la didáctica para enseñar y no irnos hacia la profundización sino más bien en la utilidad como lo propone las bases.
3	Es importante poder contar con los tiempos necesarios para compartir metodologías, preparar clases, desarrollar trabajo interdisciplinario de modo lograr los objetivos que se plantean.
4	Por lo general la unidad de datos y azar cuesta mucho incorporar en primero medio hacia los niveles superiores, pues los estudiantes traen muy mala base de los cursos anteriores.
5	Los contenidos en datos y azar están demasiado avanzados para el nivel escolar de nuestros estudiantes
6	Creo que lo entregado por el ministerio de educación es muy poco y debería ser más explícito

7	La mayor dificultad de estadística está en que a pesar de ser práctico, cuesta dominarlo
8	Los programas de estudio se alejan de la realidad de las aulas en contextos vulnerables
9	Falta preparación para poder implementar el nuevo programa de Matemática.
10	Capacitación y recursos didácticos es lo que más falta.
11	El error que se comete con Datos y Azar es dejar la unidad para final de año. Generando descontextualización de los contenidos a tratar por parte del docente. Hace poco participé en un curso de "Resolución de problemas en datos y azar para 3ro y 4to medio" y se logra observar que varios profesores están desconectados, principalmente porque no logran por tiempo ver los contenidos obligatorios.
12	Que datos y azar este en el último lugar en los planes y programas no significa que tengan que ser enseñados al final. Donde trabajo lo vemos al principio. Debe existir trabajo colaborativo porque hay contenidos que habíamos olvidado, como la distribución normal y binomial, pero estudiando todo se puede.
13	Creo que la puesta en marcha de los programas 2020 fue muy apresurado, debió darse a conocer con mucha más antelación para prever las necesidades de los docentes que impartirán estas clases y poder hacer varias capacitaciones antes de ponerlos en práctica.

14	Falta tiempo si se decide hacer un buen trabajo con los estudiantes vinculando lo que se aprende a otras asignaturas y realizar proyectos en común, donde realmente se apliquen los contenidos y habilidades y se diversifique.
15	Los docentes este 2020 nos vemos enfrentados a un cambio en el cual se nos exige estar preparados, aun teniendo en cuenta que algunos no están preparados u otros se les han olvidado los contenidos por diversos motivos
16	Me parece que es importante MODERNIZARNOS como docentes, y creo que ahí está al debe mi formación, por ahora trato de adecuarme a los tiempos de forma autodidacta. Pero me gustaría ir a una capacitación en que me enseñen más recursos, para que los alumnos trabajen en proyectos y estudios reales.
17	Siempre es necesario el perfeccionamiento de contenidos, inclusive a profesores que hacen constantemente niveles más bajo que tercero y cuarto medio.
18	El problema de los cambios curriculares son que no son atingentes a cada realidad, un real cambio curricular debería abrir posibilidades de currículum, sin pruebas estandarizadas si no solo con estudio de trayectorias a mediano plazo del estudiantado, garantizando condiciones laborales acorde al currículum para todas y todos los trabajadores de cada escuela o institución educativa de todos los niveles.
19	Lamentablemente la unidad de datos y azar, es siempre olvidada en los colegios, de hecho, en donde trabajo actualmente, mis colegas no querían impartir el electivo propuesto, por el no manejo de los contenidos.
20	Lo mencioné anteriormente: Datos y azar queda siempre como la última unidad del año, los alumnos y profesores están cansados y el rendimiento no es el

	mismo de marzo. He pensado comenzar en marzo 2020 con la unidad de datos y azar para nivelar lo visto en años anteriores.
--	---

**Anexo 3. Secuenciación de actividades para la enseñanza de contenidos del Eje Datos
y Azar para los niveles de 3° y 4° Medio.**

Anexo 3.1 Actividades Nivel 3° Medio

III Medio: Probabilidad Condicional

Objetivo de aprendizaje (OA):

OA 2: Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales.

Habilidades:

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados

Actitudes:

Participar asumiendo posturas razonadas en distintos ámbitos: cultural, social, político, medioambiental, entre otros.

ACTIVIDAD N°1: PROBABILIDAD CONDICIONAL

Objetivo de la actividad: Analizar y resolver problemas para la toma de decisiones que involucran probabilidad condicional en contextos de la vida cotidiana.

CONTEXTO: Es el día de la Donut, por esto dos grandes tiendas de este producto ofrecen una promoción especial por el día: “DONUTS RELLENAS A \$490”, donde todos los productos están rellenos, pero no todos traen cubierta, además, no pueden elegir el sabor del relleno ni la opción de que sea cubierta o no, las donuts tienen dos tipos de relleno con Nutella y rellena con manjar.

Se sabe que en el local A se producen 170 donuts, donde 70 de ellas son sin cubierta y el resto con cubierta. Adicionalmente el 30% son sin cubierta y son con Nutella. Además 14,72% es con cubierta y con Nutella.

Por otra parte, en el local B se producen un total de 140 donuts, de ellas 90 son con cubierta y el resto sin cubierta; además se sabe que el 28,5% son con cubierta y Nutella. Además, se sabe que un 17,85% son sin cubierta y con Nutella.

PREGUNTA: Se quiere comprar una donut en promoción, ¿en qué local conviene comprar para que sea más probable que sea rellena con Nutella dado que es sin cubierta?

PLAN: ¿Qué datos necesitamos?

- Comprender la pregunta planteada.
- Conocer la cantidad y tipos de donuts que ofrecen a la venta cada local. Identificando si son con o sin cubierta, además de los tipos de relleno que existen. Será importante detectar cuáles de todas estas variables y cantidades son las que utilizaremos para responder nuestra pregunta.

- Se espera que los estudiantes se organicen en dos grupos, uno para cada tienda de donuts. Cada grupo debe proponerse calcular la probabilidad solicitada.

DATOS: Se necesita saber la cantidad total de donuts que se producen, además de cuántas de ellas son sin cubierta y con Nutella en cada uno de los locales. Estos datos corresponden a los relacionados directamente con la pregunta. Concretamente se debe considerar los datos de ambos locales que ofrecen la promoción de donut en el local A y el local B. Para el caso del local A se ofrecen 100 donut con cubierta y 70 son sin cubierta, sus probabilidades son 0,589 y 0,411 respectivamente, ahora bien, como el problema se enfoca en las donut sin cubierta y con Nutella el cálculo será realizado en el desarrollo de la situación. En el caso del local B las cantidades de donut que ofrecen es de 90 con cubierta y 50 sin cubierta, cuyas probabilidades son 0,643 y 0,357 respectivamente.

ANÁLISIS:

Parte 1: Inicialmente se deben identificar como sucesos de estudio “Con cubierta” v/s “Sin Cubierta” considerando como suceso de interés el suceso “**sin cubierta**”, esto es válido para el Local A y el Local B, para luego contabilizarlas según lo que ofrece cada local, con esta información las y los estudiantes podrán calcular la probabilidad de una DONUT SIN CUBIERTA en el local A y B, según corresponda.

Parte 2: Se reconocen y definen los sucesos:

*C: Donut con cubierta, C^C : Donut sin cubierta, N : Donut rellena con Nutella
M: Donut rellena con manjar.*

A partir de esto, el suceso de interés del ejercicio apunta a la probabilidad de donuts rellena con Nutella dado que esta no tiene cubierta, de esta forma entonces definimos este suceso mediante probabilidad condicional definido como: $P(N/C^C)$. Es importante comprender que para que este suceso condicionado ocurra, debe ocurrir primero el suceso C^C “sin cubierta” para así observar el relleno, en este caso con nutella. Hay que considerar, además, ~~el~~ los sucesos intermedios los cuales serán definidos como:

- $C^C \cap N$: Sin cubierta y con nutella.
- $C \cap N$: Con cubierta y con nutella.

Paso 3: Luego de reconocer los sucesos, los estudiantes pueden registrar la información en dos diagramas de árbol, uno para cada local e identificar las probabilidades especificadas en el enunciado que están asociadas a cada uno de los sucesos presentes, particularmente los de interés.

Ahora bien, el diagrama de árbol para el local A como se muestra en la figura 22 siguiente, divide la situación en dos, las cuales serán con cubierta (C) y sin cubierta (C^c) y las respectivas probabilidades serán 0,589 y 0,411. Considerar, además, las probabilidades de los sucesos intermedios mencionados anteriormente, las cuales son $P(C^c \cap N) = 0,3$ y $P(C \cap N) = 0,1472$. Para representar los sucesos y sub sucesos definidos, a continuación, se adjunta el diagrama de árbol asociado y las probabilidades respectivas.

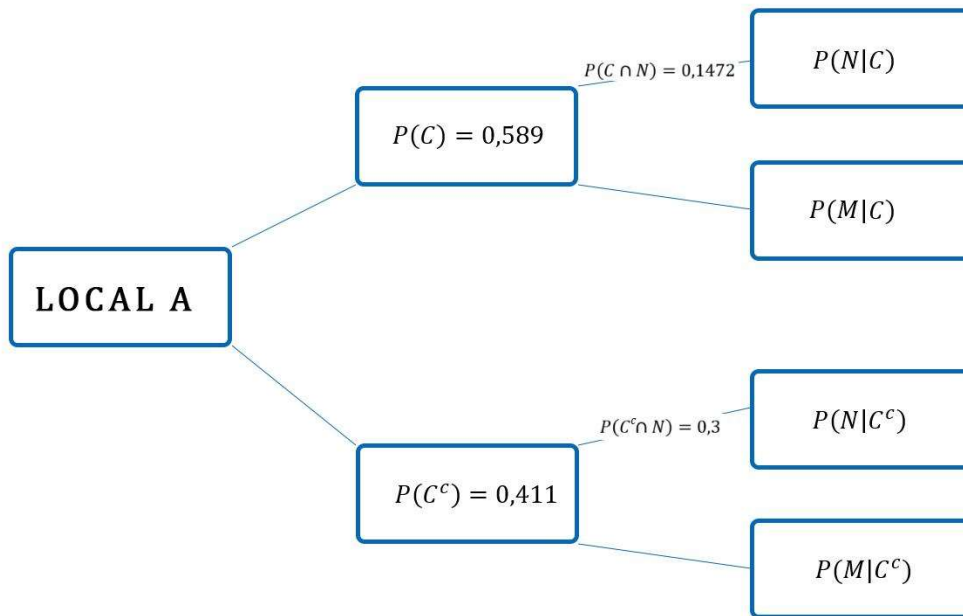


Figura 22.

En el caso del local B como se muestra en la figura 23 siguiente, al igual que en el anterior se divide en dos la situación, de igual forma serán con cubierta (C) y sin cubierta (C^c), donde las probabilidades son 0,643 y 0,357 respectivamente. Considerar, además, las probabilidades de los sucesos intermedios mencionados anteriormente, las cuales son $P(C^c \cap N) = 0,1785$ y $P(C \cap N) = 0,285$. Para representar los sucesos y sub sucesos definidos a continuación se adjunta el diagrama de árbol asociado y las probabilidades respectivas.

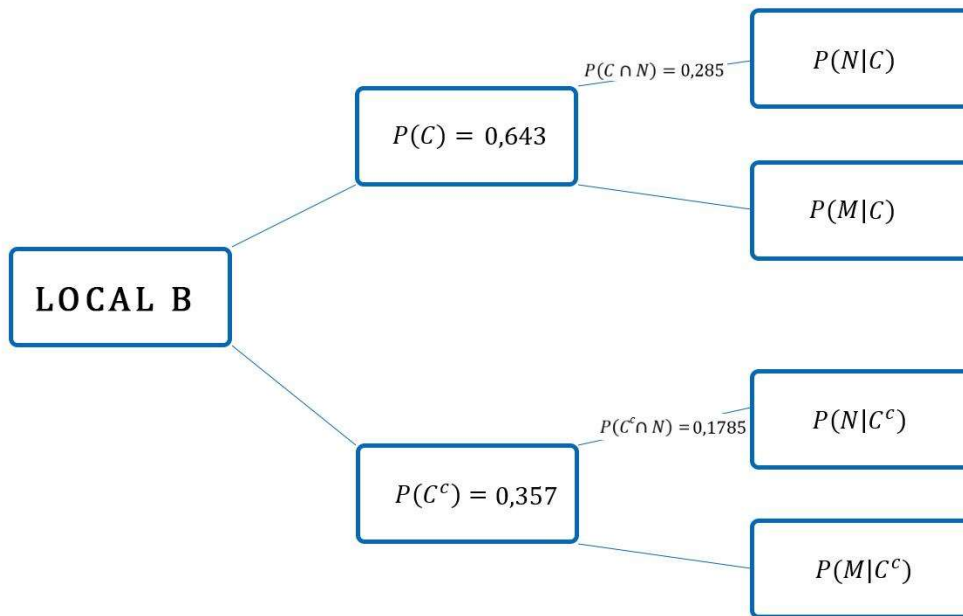


Figura 23.

Parte 4: Ahora, considerando la cantidad de donuts que responden al suceso de interés “rellena con nutella dado que no está cubierta”, tomando en cuenta las probabilidades de ambos sucesos es necesario recordar para cada local que los sucesos C y C^c (definidos en la parte 2) dependen de la ocurrencia de los sucesos rellenas, es decir, para calcular la probabilidad que sea rellena con Nutella dado que es sin cubierta.

Ahora bien, para poder entender el cálculo de la probabilidad solicitada para ambos locales, se presentará a continuación los diagramas con los que se trabajarán (ver figura 24 y 25):

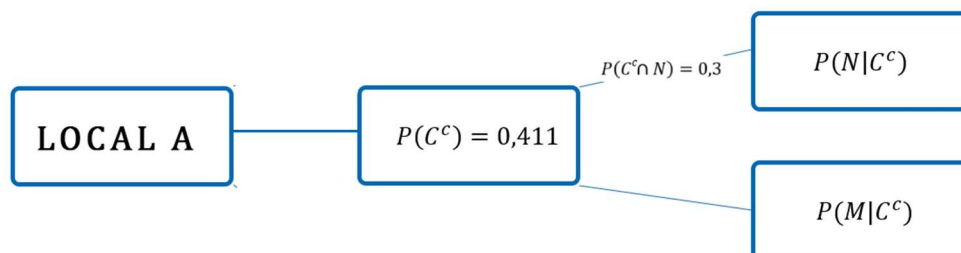


Figura 24.

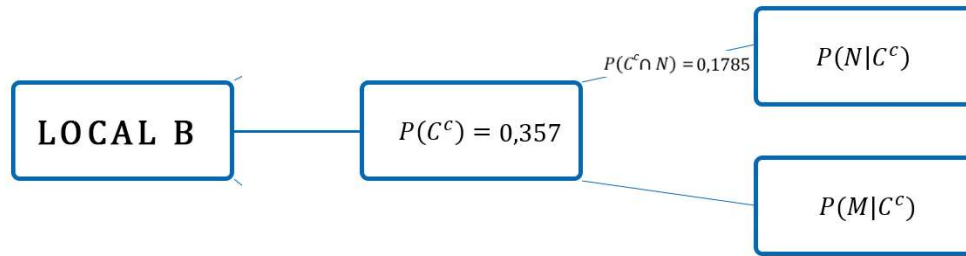


Figura 25.

Se debe comprender que con la probabilidad condicional es el cociente entre la probabilidad de ocurrencia de la intersección de suceso con Nutella y sin cubierta $P(C^c \cap N)$ y la probabilidad de ocurrencia del suceso sin cubierta $P(C^c)$, esto ocurrirá para ambos locales. Por ende, lo que se debe calcular para ambos será:

$$P(N/C^c) = \frac{P(C^c \cap N)}{P(C^c)}$$

Parte 5: Finalmente realizan el cálculo de la probabilidad de que al comprar una donut de promoción en el local A o B ésta sea rellena con Nutella dado que es sin cubierta, a partir del análisis de la situación en base a la ecuación planteada de las probabilidades y a su vez puede ser obtenidas a través del diagrama de árbol para cada local.

CONCLUSIONES:

- Los estudiantes deberán considerar que el análisis realizado y la obtención de la respuesta se basa en la utilización de la probabilidad condicional. Es necesario considerar que, para la utilización del ella, es necesario comprender el concepto de intersección de sucesos y de los sucesos centrales, es decir, de tener cubierta y relleno respectivamente para cada local.
- A partir del cálculo de la probabilidad “Rellena con Nutella dado que la donut no está cubierta” para ambos locales los estudiantes comparan y elegirán como el local más conveniente en el día de la promoción al que tenga la mayor probabilidad. Para lograr dicha comparación, los cálculos de ambos locales serán:

1. Local A: $P(N/C^c) = 0,123$

2. Local B: $P(N/C^c) = 0,063$

Finalmente, el local que tiene mayor probabilidad de que sea rellena con Nutella dado que es sin cubierta es el local A.

- Logrando con esto el análisis y la resolución de la situación, que involucran probabilidad condicional, para tomar la decisión del local que tenga más probabilidad de “Rellena con Nutella dado que la donut no está cubierta”.

ACTIVIDAD N°2: INDEPENDENCIA DE SUCESOS ESTOCÁSTICOS

Objetivo de actividad: Identificar la independencia de sucesos para el desarrollo de problemas, que involucren probabilidades y utilizando la regla de Laplace, de forma intuitiva y colaborativa.

CONTEXTO: Se lanzan dos dados de distintos colores uno amarillo y otro blanco al mismo tiempo, se observan los resultados, diferenciando cada dado. A partir del experimento se definen los siguientes sucesos:

A: El resultado en el dado Amarillo es múltiplo de 3

B: El resultado del dado Blanco es mayor que 2

C: El resultado en el dado Amarillo es par

D: El resultado en el dado Blanco es primo

Se dice que dos sucesos A y B son independientes entre ellos sí y solo si se cumple la siguiente igualdad $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

PREGUNTA: ¿Qué pares de sucesos se pueden considerar independientes entre sí?

PLAN: ¿Qué datos necesitamos?

- Comprender la pregunta planteada y el espacio muestral asociado al experimento, utilizando un registro tabular con el lanzamiento de los dados.
- Calcular las probabilidades de cada suceso utilizando la regla de Laplace.

DATOS: Es necesario considerar los posibles resultados obtenidos en cada dado, para poder clasificarlos se sugiere que se consideren los valores del 1 al 6, y luego contar la cantidad de elementos que cumplan con la condición planteada según cada suceso. Por ejemplo, como el suceso A es *El resultado en el dado n°1 es múltiplo de 3*, entonces se dirá que dos valores cumplen con esa condición, particularmente los números 3 y 6. Con los valores obtenidos se espera que los estudiantes utilicen la regla de Laplace para conocer las probabilidades asociadas a cada suceso, calcular y comprobar independencia que existe o no entre ellos. Se debe tomar en cuenta que cada suceso está relacionado con un dado en específico.

ANÁLISIS:

Parte 1: Los estudiantes definen el experimento, para obtener el espacio muestral asociado al experimento lanzar dos dados distintos, se sugiere realizarlo como se muestra a continuación:

E: Lanzamiento de dos dados distintos (amarillo y blanco) y observar sus resultados.

Se sugiere registrar el espacio muestral usando una tabla que muestre todas las posibles caras resultantes y sus combinaciones de la siguiente forma:

Tabla 11. Espacio muestral del experimento.

		Dado Amarillo					
		1	2	3	4	5	6
Dado Blanco	1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
	3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
	4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
	5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
	6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

Como se muestra anteriormente, la cardinalidad del espacio muestral es de 36 casos, ya que es la cantidad de combinaciones posibles que existen entre los valores de ambos dados. Con esto finalmente se pueden considerar los sucesos definidos en el problema y calcular sus probabilidades, para luego definir otros sucesos de interés asociados.

Para calcular las probabilidades de los sucesos definidos al inicio utilizando la regla de Laplace, es necesario contar los casos favorables relacionados a cada suceso de la siguiente manera:

- $A = \{(3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6); (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6)\}$

$$\Rightarrow \#A = 12$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

- $B = \{(1,3); (2,3); (3,3); (4,3); (5,3); (6,3); (1,4); (2,4); (3,4); (4,4); (5,4); (6,4); (1,5); (2,5); (3,5); (4,5); (5,5); (6,5); (1,6); (2,6); (3,6); (4,6); (5,6); (6,6)\}$

$$\Rightarrow \#B = 24$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

- $C = \{(2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); (4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6); (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6)\}$

$$\Rightarrow \#C = 18$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

- $D = \{(1,2); (2,2); (3,2); (4,2); (5,2); (6,2); (1,3); (2,3); (3,3); (4,3); (5,3); (6,3); (1,5); (2,5); (3,5); (4,5); (5,5); (6,5)\}$

$$\Rightarrow \#D = 18$$

$$\Rightarrow P(D) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Parte 2: Tras definir el espacio muestral, algunos sucesos y calcular las probabilidades asociadas, se sugiere definir los sucesos **intersección** entre pares de sucesos y contar los casos posibles utilizando la tabla. Esto pretende facilitar la verificación de independencia entre pares de sucesos, según lo definido en el enunciado.

- Caso 1: $A \cap B = \{(3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$
- Caso 2: $A \cap C = \{(3,2), (3,4), (3,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$
- Caso 3: $A \cap D = \{(3,2), (3,3), (3,5), (6,2), (6,3), (6,5)\}$
- Caso 4: $B \cap C = \{(3,2), (3,4), (3,6), (4,2), (4,4), (4,6), (5,2), (5,4), (5,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$
- Caso 5: $B \cap D = \{(3,2), (3,3), (3,5), (4,2), (4,3), (4,5), (5,2), (5,3), (5,5), (6,2), (6,3), (6,5)\}$
- Caso 6: $C \cap D = \{(2,2), (2,3), (2,5), (4,2), (4,3), (4,5), (6,2), (6,3), (6,5)\}$

Paso 3: Luego se sugiere calcular las probabilidades de los sucesos anteriores utilizando la regla de Laplace de la siguiente forma:

$$- P(A \cap B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$- P(A \cap C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$- P(A \cap D) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$- P(B \cap C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$- P(B \cap D) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$- P(C \cap D) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Paso 4: Ahora bien, para poder corroborar la hipótesis de la independencia de sucesos, se debe cumplir la definición que está en la problemática, para ello se sugiere realizar el siguiente cálculo y análisis

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Nota al docente: De igual forma, se puede determinar la independencia de sucesos corroborando la siguiente igualdad:

$$P(A) = P(A/B)$$

Por ejemplo, para el caso 1:

$$P(A) = P(A/B) \Leftrightarrow P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\text{Considerando } P(A) = \frac{1}{3}; P(A \cap B) = \frac{2}{9}; P(B) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Se puede observar que la igualdad se cumple, por lo que los sucesos A y B son independientes entre sí.

Ahora con los casos definidos:

- *Caso 1:* Verificar que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Realizando el cálculo correspondiente:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{9}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

De esta manera como se cumple la igualdad $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, es posible concluir que los sucesos A y el B son independientes.

- *Caso 2:* Verificar que $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$. Realizando el cálculo correspondiente:

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$$

$$P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

De esta manera como se cumple la igualdad $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$, es posible concluir que los sucesos A y el C son independientes.

- *Caso 3:* Verificar que $P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D)$. Realizando el cálculo correspondiente

$$P(A \cap D) = \frac{1}{6}$$

$$P(A) \cdot P(D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

De esta manera como se cumple la igualdad $P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D)$ es posible concluir que los sucesos A y D son independientes.

- *Caso 4:* Verificar que $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$. Realizando el cálculo correspondiente

$$P(B \cap C) = \frac{1}{3}$$

$$P(B) \cdot P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

De esta manera como se cumple la igualdad

$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$ es posible concluir que los sucesos B y C son independientes.

- *Caso 5:* Verificar que $P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D)$. Realizando el cálculo correspondiente:

$$P(B \cap D) = \frac{1}{3}$$

$$P(B) \cdot P(D) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

De esta manera como se cumple la igualdad $P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D)$, es posible concluir que los sucesos B y el D son independientes.

- *Caso 6:* Verificar que $P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D)$. Realizando el cálculo correspondiente:

$$P(C \cap D) = \frac{1}{4}$$

$$P(C) \cdot P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

De esta manera como se cumple la igualdad $P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D)$, es posible concluir que los sucesos C y el D son independientes.

CONCLUSIONES:

- El análisis realizado por parte de los estudiantes para la obtención de la respuesta se basa en el uso de la regla de Laplace, en la intersección de sucesos e independencia de sucesos. Es necesario considerar los sucesos definidos inicialmente y sus intersecciones, para así calcular las probabilidades respectivas y lograr la demostración de independencia de sucesos.
- Por lo tanto, se espera que los estudiantes conjeturen que para todos los pares de casos se cumple la independencia de sucesos entre sí, por tanto, todos los pares de sucesos definidos son independientes entre sí, se puede resumir como:

Tabla 12. Resumen de los sucesos independientes o dependientes.

Sucesos	Independencia de sucesos
A y B	Independientes
A y C	Independientes
A y D	Independientes
B y C	Independientes
B y D	Independientes
C y D	Independientes

Nota al docente: Se sugiere trabajar la siguiente situación para mostrar a los estudiantes casos donde dos sucesos sean **dependientes entre sí**:

- En una cabina de juegos se lanzan dos dados distintos, uno después de otro, se dice que el jugador gana en el caso de que no obtenga el mismo número en ambos dados.

En esta situación existe una reducción del espacio muestral, ya que el primer dado presentará seis casos, pero el segundo solo contará con 5, pues en caso contrario, el jugador perderá o el suceso no le será favorable.

ACTIVIDAD N°3: TEOREMA DE BAYES

Objetivo de actividad: Construir una estrategia para la resolución de problemas que permitan el uso del Teorema de Bayes a partir de la regla de Laplace y la Probabilidad Condicional en un contexto dado.

CONTEXTO: Tenemos tres cajas con lápices, dentro de ellas existen dos tipos: lápices de pasta y lápices de colores. La primera caja contiene en total 10 lápices, donde de ellos 6 son lápices pasta. Por otra parte, en la segunda caja hay 7 lápices y tan solo uno de color, y en la tercera caja hay 4 lápices pasta de un total de 8.

PREGUNTA: Si se extrae de alguna caja al azar un lápiz de color, ¿cuál es la probabilidad de que este venga de la caja 1?

PLAN: ¿Qué datos necesitamos?

- Comprender la pregunta planteada.
- Reconocer el contenido de cada caja.
- Identificar los sucesos asociados y definirlos.
- Identificar y calcular las probabilidades asociadas a cada suceso.

DATOS:

Hay que identificar la cantidad de cajas, dependiendo de eso la cantidad de lápices dentro de ellas para luego identificar si son de pasta o de color. A continuación, se especifica el contenido de las cajas:

- Hay 3 cajas en la situación dada.
- Contenido de cada caja y sus diferencias.

Para la caja 1: 6 lápices de pasta y 4 de colores

Para la caja 2: 6 lápices de pasta y 1 de color

Para la caja 3: 4 lápices de pasta y 4 de colores

ANÁLISIS:

Parte 1: Identificar los sucesos que están presentes en el problema a resolver. En esta parte los estudiantes deben ser capaces de definir los sucesos C_1 : *El lápiz es extraído de la Caja 1*, C_2 : *El lápiz es extraído de la Caja 2* y C_3 : *El lápiz es extraído de la Caja 3* para representar las tres cajas. Así mismo, definir los sucesos asociados a las características de los lápices

C : *El lápiz extraído es de color* y P : *El lápiz extraído es pasta*.

Parte 2: Ya definidos los sucesos se debe comprender que al elegir un lápiz (de cualquier tipo) de alguna caja, la probabilidad del tipo de lápiz extraído **depende** de qué caja haya sido seleccionado. En este caso se presenta una condicionalidad que debemos considerar para realizar un correcto análisis para resolver la problemática.

Parte 3: Considerando lo anterior, en conjunto con el contenido específico de cada caja, los estudiantes ya poseen toda la información para poder ordenar los datos y representar la situación en un registro de diagrama de árbol que permitirá el cálculo de las probabilidades.

Para comenzar con la construcción del diagrama de árbol, se dividirá en tres ramas considerando cada una de las cajas de donde se puede extraer un lápiz, estas se refieren a los sucesos C_1 , C_2 y C_3 , asociando cada uno a una rama. La probabilidad que tenga una caja de ser elegida será calculada mediante el uso de la regla Laplace, que será $\frac{1}{3}$. Luego, para cada una de estas ramas asociada a cada una de las cajas se considerarán dos opciones: extraer lápices de color (C) y extraer lápices de pasta (P), esto para cada una de las cajas. Ahora, con la información inicial se calcula la probabilidad de extraer un lápiz de cada caja y observar el tipo de este (color o pasta) utilizando la regla de Laplace. Como en cada caso, $P(P)$ y $P(C)$ dependen de la caja de la que fueron extraídos, entonces el cálculo asociado a cada caja es inducido por una condicionalidad. Así se obtienen $P(C|C_1) = 4/10$ y $P(P|C_1) = 6/10$ con los elementos de la caja 1, $P(C|C_2) = 1/7$ y $P(P|C_2) = 6/7$ con los de la caja 2, y $P(C|C_3) = 1/2 = P(P|C_3)$ con los de la caja 3. A continuación se presenta el diagrama de árbol que representa la situación:

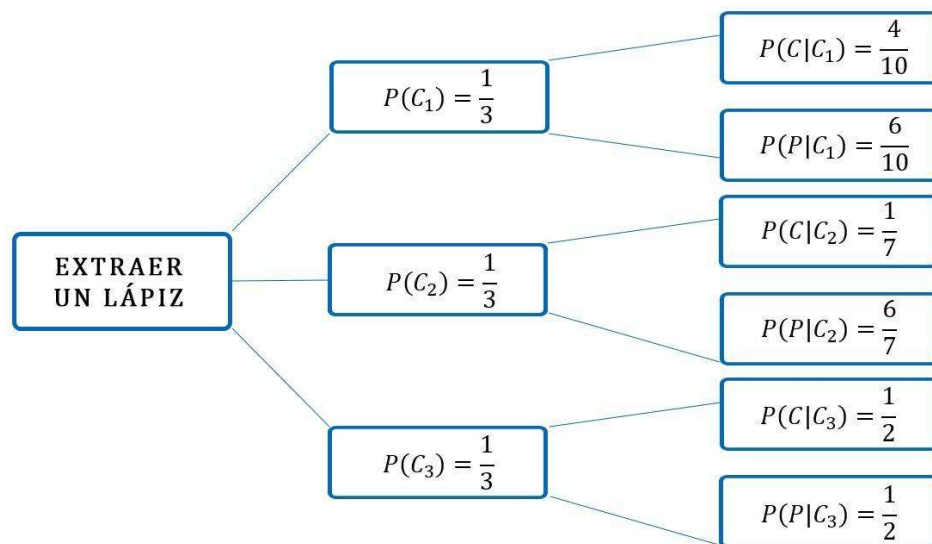


Figura 26.

Parte 4: Luego de representar el problema mediante un diagrama de árbol, es importante que los estudiantes vuelvan a plantearse la pregunta. A partir de esta, lo primero que se debe identificar son todos los sucesos y ramas relacionadas al suceso C : *El lápiz extraído es de color*, el cual está relacionado con cada una de las tres cajas por separado. Por lo tanto, la probabilidad de **todos los posibles casos** de seleccionar un lápiz de color viene dado por: $P(C|C_1)$, $P(C|C_2)$ y $P(C|C_3)$.

Parte 5: Con lo anterior se debe considerar que la pregunta apunta directamente a la **caja de donde proviene este lápiz de color**, entonces siguiendo lo planteado por Laplace los estudiantes pueden inferir que el cálculo de lo solicitado sigue la misma estructura “casos favorables dentro de los casos totales”. Entonces, acorde a la pregunta, lo correcto sería utilizar la rama que considera a la intersección de sucesos “ C_1 ” y “ C ” como **caso favorable** dentro de todas las ramas que consideran el suceso C : *El lápiz extraído es de color*. Las Cajas 2 y 3 son discriminadas ya que la pregunta apunta a la probabilidad de que el lápiz sea extraído de la **Caja 1**. Para los **casos totales** consideramos todos casos que involucran la

unión de todas las ramas que consideran al suceso C : *El lápiz extraído es de color*. De esta forma la resolución del problema está dado por la siguiente fórmula:

$$P(C_1|C) = \frac{P(C_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C_1) \cdot P(C|C_1)}{P(C_1) \cdot P(C|C_1) + P(C_2) \cdot P(C|C_2) + P(C_3) \cdot P(C|C_3)}$$

Parte 6: Finalmente se realiza el cálculo de la probabilidad asociada a la pregunta inicial planteada a partir del análisis de la situación, utilizando la ecuación planteada anteriormente.

CONCLUSIONES:

- Al tener el cálculo de las probabilidades solicitadas y obtener la probabilidad de escoger la caja 1 dado que este sea lápiz de color mediante la estrategia de calcular las probabilidades es utilizar la regla de Laplace los estudiantes pueden responder a la pregunta planteada “¿Cuál es la probabilidad de que al extraer un lápiz de color al azar este sea de la Caja 1?” con la probabilidad calculada, en este caso 0,35.
- En este ejercicio se espera que las y los estudiantes hayan comprendido que la pregunta de la situación planteada presenta un análisis diferente a los anteriores, en este caso ya conociendo el sistema completo de sucesos y sus probabilidades, independientes entre sí, es decir un lápiz de color no puede ser de la caja 1 y de la caja 2 simultáneamente.
- De forma general, para este tipo de problemáticas se permite el cálculo de probabilidades **después** de haber sido realizado un experimento (probabilidades a posteriori) basándose en el conocimiento de la probabilidad de ocurrencia de ciertos sucesos que dependan del evento estudiado y/o sus probabilidades conocidas previamente. Esta relación de cálculo de probabilidades es conocido como Teorema de Bayes y se permite calcular en base a la regla de Laplace.
- Institucionalizar de manera general el Teorema de Bayes como consecuencia del estudio de esta situación.

ACTIVIDAD N°4: TEOREMA DE PROBABILIDAD TOTAL

Objetivo de la actividad: Construir una estrategia para la resolución de problemas que permitan el uso del Teorema de Probabilidad Total a partir de la construcción y análisis de un diagrama de árbol en un contexto dado.

Objetivo de la actividad: Construir una estrategia para la resolución de problemas que permitan el uso del Teorema de Probabilidad Total a partir de la construcción y análisis de un diagrama de árbol en un contexto dado.

CONTEXTO: Con la llegada de la pandemia COVID-19, una clínica de Santiago de Chile fue la primera en proponer un examen para la detección de este virus en sus pacientes. Este es un test rápido, que, tras estudios realizados por dependencias de la clínica a partir de una muestra, señalan que su sensibilidad, es decir, la capacidad de examen para detectar el virus es de un 98%. Por otra parte, el test presenta una especificidad del 99%, que es el porcentaje de entregar casos negativos cuando los pacientes están sanos.

Se sabe que, a partir de la muestra estudiada por la clínica, la probabilidad de contagio es del 27,3%.

PREGUNTA: Si una persona al azar se realiza el examen ¿cuál es la probabilidad de que el test arroje un resultado positivo?

PLAN: ¿Qué datos necesitamos?

- Comprender la pregunta planteada.
- Identificar los sucesos asociados y definirlos.
- Comprender y reconocer los conceptos de sensibilidad y especificidad y sus diferencias.
- Identificar la probabilidad que existe de cada uno de los sucesos definidos.

DATOS:

Para la recolección de la información correspondiente para el cálculo de las probabilidades asociadas a la problemática se identifica inicialmente personas sanas y enfermas y así se asocia a ellos los resultados de sus test los cuales pueden ser positivos y negativos.

Concretamente, si el test da positivo se debe considerar que la persona puede estar enferma o sana. De esta forma, cuando se habla de una **sensibilidad** de un 98%, se refiere a la probabilidad de que el examen de positivo dado que la persona efectivamente está enferma.

En el caso de que el test dé negativo se debe considerar que la persona puede estar enferma o sana, en ese caso cuando se habla de una especificidad de un 99%, se refiere a la probabilidad de que el examen de negativo dado que la persona efectivamente no está enferma.

Se sugiere realizar la conversión de porcentajes a números decimales para lograr los cálculos pertinentes de las probabilidades.

ANÁLISIS:

Parte 1: Identificar y nombrar los sucesos asociados a la problemática planteada. Entonces, en esta primera parte se sugiere la definición de los siguientes sucesos:

E: El individuo está enfermo.

S: El individuo está sano.

+ : El resultado del examen es positivo.

- : El resultado del examen es negativo.

Nota: Se considera que ayudará al estudiante a diferenciar sucesos que puedan ser confundidos fácilmente.

Parte 2: Los estudiantes deben comprender a qué se refieren los conceptos enunciados y la diferencia entre ellos. Al detectar los datos se debe considerar la existencia de personas enfermas y sanas. También al realizarse el test existen dos posibles resultados: positivos y negativos. Además, considerar que:

- La sensibilidad es denotada por $P(+|E)$ (la probabilidad de que el test da positivo dado que el individuo está enfermo).

- La probabilidad complementaria a la sensibilidad es denotada por $P(-|E)$ (la probabilidad del test da negativo dado que el individuo está enfermo)
- La especificidad es denotada por $P(-|S)$ (la probabilidad del test da negativo dado que el individuo está sano).
- La probabilidad del complementario a la especificidad es denotada por $P(+|S)$ (la probabilidad de que el test da positivo dado que el individuo está sano)

Parte 3: Luego de reconocer los sucesos, los estudiantes pueden registrarlos en un diagrama de árbol e identificar las probabilidades especificadas en el enunciado que están asociadas a cada uno de los sucesos presentes.

Para comenzar con el diagrama de árbol, se divide la situación en dos, las cuales serán estar enfermo (E) y estar sano (S) y las respectivas probabilidades serán 0,273 y 0,727. Para representar los sucesos y sub sucesos definidos a continuación se adjunta el diagrama de árbol asociado y las probabilidades respectivas.

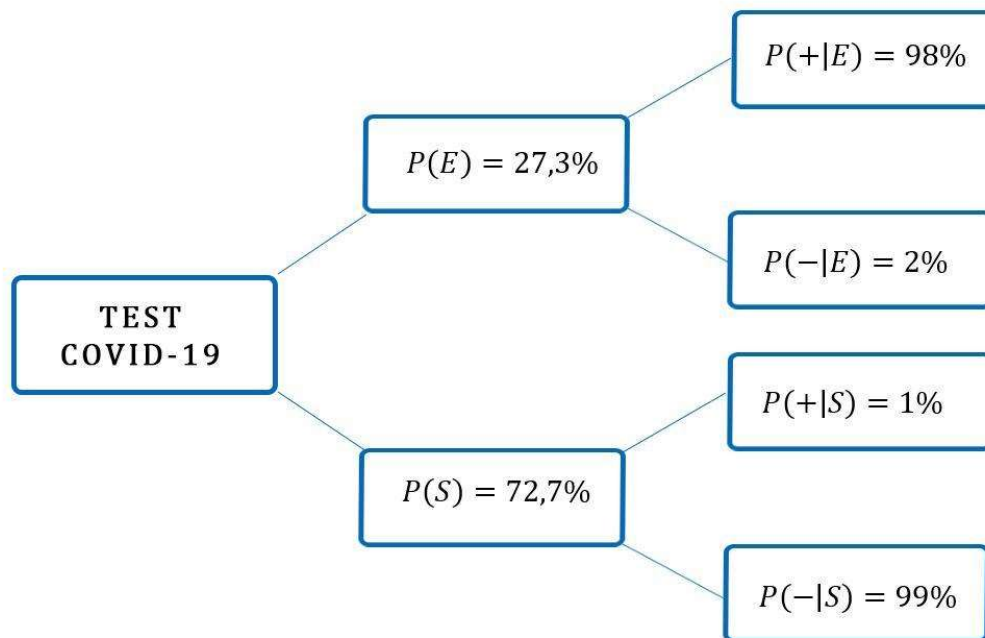


Figura 27.

Parte 4: Al elegir una persona al azar e implementar el test, este puede dar positivo o negativo, sin embargo, la pregunta apunta a calcular la probabilidad de que el resultado sea POSITIVO.

El resultado puede ser positivo en dos ocasiones:

(1) Cuando la persona **está enferma** dado que el test da positivo.

(2) cuando la persona **está sana** dado que el test da positivo.

Antes de calcular la probabilidad de ocurrencia de cada caso, se debe reconocer probabilidad de la unión de sucesos excluyentes presente en la proposición anterior ya que ocurre el caso (1) **o** el caso (2).

Para calcular la probabilidad del primer caso (1) se debe considerar la probabilidad de la persona efectivamente esté enferma y la probabilidad de que el test de positivo dado que está enferma (sensibilidad) como deben ocurrir ambos sucesos se debe utilizar la definición de probabilidad condicional, es decir:

$$\begin{aligned}P(+ \cap E) &= P(E) \cdot P(+|E). \\ &= 0,273 \cdot 0,98\end{aligned}$$

Para calcular la probabilidad en el segundo caso (2) se debe considerar la probabilidad de que la persona no esté enferma y la probabilidad de que el test de positivo dado la persona que no está enferma (complemento de la especificidad), al igual que en el caso anterior como deben ocurrir ambos sucesos se debe utilizar la definición de probabilidad condicional:

$$\begin{aligned}P(+ \cap S) &= P(S) \cdot P(+|S). \\ &= 0,727 \cdot 0,01\end{aligned}$$

Parte 5: Entonces la suma de las probabilidades asociadas a los casos (1) y (2) nos dará como resultado la probabilidad de que el test de positivo al ser aplicado en una persona al azar:

$$P(+) = P(E) \cdot P(+|E) + P(S) \cdot P(+|S)$$

Nota al docente: Al considerar alguna manera más directa para el cálculo de la probabilidad solicitada, por ejemplo, pensar en la unión de los sucesos “test da positivo”, se espera que los estudiantes se den cuenta que no se pueden considerar sucesos independientes y sus

*probabilidades para responder a la pregunta inicial. Por tanto, el docente debe ser capaz de tomar esta apreciación por parte de los estudiantes para introducir la definición formal de **Probabilidad Total**, la cual relaciona sucesos que están condicionados.*

CONCLUSIONES:

- Considerar que el análisis realizado por parte de los estudiantes y la obtención de la respuesta se basa implícitamente en el teorema de probabilidad total. Es necesario considerar los sucesos definidos inicialmente y a la vez los sucesos complementarios, dando importancia a comprender los sucesos definidos como sensibilidad y especificidad, para lograr identificar las probabilidades asociados y desarrollar de manera óptima la resolución del problema.

A partir del cálculo realizado mediante el análisis y operatoria de las probabilidades expuestas en las ramas del diagrama de árbol, se obtiene entonces la probabilidad de que el test arroje un resultado positivo es de 0,27481.

Anexo 3.2 Actividades Nivel 4º Medio

IV Medio: Distribución Binomial

Objetivo de aprendizaje (OA):

OA 2: Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.

Habilidades:

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA f. Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas

Actitudes: Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

Actuar de acuerdo con los principios de la ética en el uso de la información y de la tecnología, respetando la propiedad intelectual y la privacidad de las personas.

ACTIVIDAD N°1: CONSTRUCCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Objetivo de la actividad: Construir una situación que se pueda modelar por una variable aleatoria binomial para resolver la problemática planteada, a partir de un experimento Bernoulli de manera intuitiva y colaborativa.

CONTEXTO: En cierto centro médico se implementa un test para detectar una enfermedad al páncreas. Se sabe que la probabilidad de padecer de esta enfermedad es de un 18,7%.

PREGUNTA: Si se aplica el test en 5 personas ¿Cuál es la probabilidad de que 3 de ellos presentan dicha enfermedad?

PLAN: ¿Qué datos necesitamos?

- Comprender la pregunta planteada.
- Identificar y definir sucesos, la variable asociada al experimento Bernoulli y el parámetro.
- Definir la variable aleatoria y sus parámetros asociada a la distribución Binomial presente.
- Calcular la probabilidad deseada a partir de los elementos definidos que se aproximan al uso de la distribución Binomial.

DATOS:

Es necesario identificar el suceso presente en el enunciado (Padecer o no la enfermedad), la variable aleatoria asociada a la problemática, identificar el suceso asociado al éxito y al fracaso correspondiente a un experimento Bernoulli para reconocer el parámetro asociado a dicho suceso y por consiguiente a la variable aleatoria. Y por último reconocer los parámetros asociados a la distribución Binomial, basándose en el experimento Bernoulli.

ANÁLISIS:

Parte 1: Identificar y definir sucesos de la variable aleatoria asociada al experimento Bernoulli y sus parámetros.

Al analizar el enunciado, se debe identificar y definir la variable aleatoria relacionada a el experimento Bernoulli presente, que es: “Padece de la enfermedad al páncreas”, se propone la definición de los siguientes sucesos como éxito y fracaso:

(E) éxito: padece la enfermedad y (E^c) fracaso: no padece la enfermedad.

Según lo anterior la probabilidad de éxito o probabilidad de que el sujeto padezca de la enfermedad, sea $P(E) = 0,187$ y la probabilidad de fracaso o la probabilidad de que el sujeto no padezca de la enfermedad sea $P(E^c) = 0,813$.

Parte 2: Considerando entonces que la pregunta planteada en el enunciado se refiere al experimento Bernoulli definido anteriormente, con un total de **repeticiones dado**, se debe enfatizar que la **probabilidad de éxito es la misma** en todas las repeticiones, tomando en cuenta que este valor (probabilidad de que la persona padezca de la enfermedad) es **independiente de cuántas personas se aplique el test** para detectar la enfermedad al páncreas ya que **el resultado de una aplicación del test no afectará el valor resultado de los otros exámenes**. Con estas dos características, el suceso que define entonces la variable aleatoria asociada a la pregunta planteada es:

X: cantidad de personas que padecen la enfermedad al páncreas de un total de 5 test
Es importante enfatizar el análisis de la variable aleatoria definida recientemente, ya que corresponde a 5 repeticiones del experimento Bernoulli definido anteriormente.

Parte 3: Se sugiere que el total de repeticiones realizadas del experimento de Bernoulli sea denotado por la letra n , y la probabilidad de éxito del experimento asociado, en este caso padecer la enfermedad al páncreas, será denotada por p . Los que corresponden a $n = 5$ y la probabilidad de éxito es $p = 0,187$, ambas extraídas del enunciado de la situación.

Nota al docente: Considerar que los estudiantes deben reconocer la probabilidad de éxito y la de fracaso, en la Parte 1 se definió el éxito como E y el fracaso como E^c , en el caso del

experimento Bernoulli (una repetición), ahora bien, en el caso de la Distribución Binomial será definido como probabilidad de éxito p y la de fracaso como q , que en ambos casos será:

$$P(E) = p = 0,187 \text{ y } P(E^c) = q = 0,813$$

Se recomienda entonces utilizar esta notación para aproximar los parámetros de la variable aleatoria y poder desarrollar las siguientes actividades sin causar confusión. Ahora bien, como es una distribución binomial y se conocen los parámetros n y p , está definida como:

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

Se establece:

$$X \sim \text{Bin}(15, 0,187)$$

Sin embargo, es importante que el docente no defina esta variable aleatoria como tal para dar espacio a los estudiantes de poder seguir trabajando de manera intuitiva en la construcción de esta utilizando los conocimientos previos de los estudiantes y no inhibiendo las partes del análisis que continúan desde aquí.

Parte 4: Ahora bien, es importante que los estudiantes no dejen de tener en cuenta que este experimento Bernoulli se realizará cinco veces, por ello se obtendrán entonces cinco resultados diferentes, es decir, el resultado del *primer test y el segundo test y el tercer test y el cuarto test y el quinto test*. Esto induce entonces que el resultado de la pregunta tendrá que obtenerse al utilizar como antecedente la independencia de los sucesos, se sabe que todas tienen la misma probabilidad, entonces, ¿cómo varían estos resultados?, ¿será aproximado pensar que la probabilidad que responde a la pregunta planteada es la de éxito del suceso, es decir, 18,7%?

A partir de estas preguntas orientadoras el docente toma las apreciaciones de los estudiantes que corresponden a la cantidad de resultados positivos del test, contextualmente tres casos, y cómo este valor incide, se asocia y es importante al momento de realizar algún cálculo (el cual aún no se ha definido).

Nota al docente: *A partir de lo anterior se sugiere entonces que el docente guíe las respuestas del estudiante en **cómo utilizar ambos elementos juntos** (probabilidad de éxito y número total de casos) y cómo estos deberían dar paso al cálculo de lo solicitado. ¿Cómo se articula entonces el cálculo? Obteniendo las aproximaciones e ideas de los estudiantes se da paso a la siguiente*

parte que explica el análisis y relación entre ambos elementos que responderán a la pregunta planteada.

Parte 5: A partir de lo anterior, Considerando la variable aleatoria definida:

X: cantidad de personas que padecen la enfermedad al páncreas de un total de 5 test

Para responder a la pregunta ¿Cuál es la probabilidad de que 3 personas obtengan el test positivo? Se debe considerar que se le está dando valor numérico a la variable aleatoria, es decir $X = 3$. Se debe analizar la probabilidad de que de las 5 personas testeadas solo 3 de ellas obtengan resultados positivos.

Se debe calcular la probabilidad $P(X = 3)$. Para esto se debe considerar que las tres personas de las 5 testeadas pueden ser cualquiera de ellas.

Se sugiere considerar la siguiente notación auxiliar:

$$P_i = \{\text{resultado del test de la persona } i - \text{ésima}\} \text{ (con } i = 1,2,3,4,5)$$

Considerando lo anterior se plantea la igualdad:

$$P(X = 3) = P(P1) \cdot P(P2) \cdot P(P3) \cdot P(P4) \cdot P(P5)$$

Cabe recordar que el resultado de cada persona es independiente del resultado de las otras.

Para clarificar el análisis siguiente se considerarán los siguientes casos posibles

(Caso 1) Suponga que los resultados de las personas 1, 2, 3 dan exitosos, es decir las personas 1,2 y 3 padecen de la enfermedad, la igualdad quedaría de la forma:

$$P(X_1 = 3) = P(P1) \cdot P(P2) \cdot P(P3) \cdot P(P4) \cdot P(P5)$$

$$P(X_1 = 3) = P(E) \cdot P(E) \cdot P(E) \cdot P(E^c) \cdot P(E^c)$$

$$P(X_1 = 3) = 0,187 \cdot 0,187 \cdot 0,187 \cdot 0,813 \cdot 0,813$$

$$P(X_1 = 3) = 0,0043$$

(Caso 2) Suponga que los resultados de las personas 1, 2, 4 dan exitosos, es decir las personas 1,2 y 4 padecen de la enfermedad, la igualdad quedaría de la forma:

$$P(X_2 = 3) = P(P1) \cdot P(P2) \cdot P(P3) \cdot P(P4) \cdot P(P5)$$

$$P(X_2 = 3) = P(E) \cdot P(E) \cdot P(E^c) \cdot P(E) \cdot P(E^c)$$

$$P(X_2 = 3) = 0,187 \cdot 0,187 \cdot 0,813 \cdot 0,187 \cdot 0,813$$

$$P(X_2 = 3) = 0,0043$$

Para observar con mayor comprensión todos los casos posibles en los que se pueden combinar los resultados al suceso:

cantidad de personas que padecen la enfermedad al páncreas de un total de 5 testeos

De acuerdo a la pregunta planteada, se sugiere el uso de la siguiente tabla, la que podrá facilitar el orden de los cálculos a realizar, los cuales siguen la misma forma que los calculados previamente. Las casillas que indican “Positivo” representan la probabilidad de éxito $P(E) = 0,187$ y las que indican “Negativo” representan la probabilidad de $P(E) = 0,813$, por lo que el cálculo de la probabilidad total de cada caso se hará mediante la multiplicación de cada fila.

Se puede representar las soluciones en la siguiente tabla:

Tabla 13. Representación de los resultados obtenidos dentro del experimento.

	Persona 1	Persona 2	Persona 3	Persona 4	Persona 5
Caso 1	Positivo	Positivo	Positivo	Negativo	Negativo
Caso 2	Positivo	Positivo	Negativo	Positivo	Negativo
Caso 3	Positivo	Positivo	Negativo	Negativo	Positivo
Caso 4	Positivo	Negativo	Positivo	Positivo	Negativo
Caso 5	Positivo	Negativo	Positivo	Negativo	Positivo
Caso 6	Positivo	Negativo	Negativo	Positivo	Positivo
Caso 7	Negativo	Positivo	Positivo	Positivo	Negativo
Caso 8	Negativo	Positivo	Positivo	Negativo	Positivo
Caso 9	Negativo	Positivo	Negativo	Positivo	Positivo
Caso 10	Positivo	Negativo	Positivo	Negativo	Positivo

Se puede observar que numéricamente el valor será el mismo para **cada caso** $P(X = 3) = 0,0043$, **lo que varía son las personas que dan resultados positivos**. Por lo que para **calcular el valor total de la probabilidad solicitada, se deberán sumar la probabilidad parcial de cada uno de los casos** (Los ejemplificados y los que no). Por lo que el valor numérico real de dicha probabilidad estaría dado por la igualdad:

$$P(X = 3) = P(X_1 = 3) + P(X_2 = 3) + \dots P(X_i = 3),$$

donde i dependerá de la cantidad de casos que existan.

Para calcular i se sugiere utilizar la técnica de recuento “combinatoria sin repetición” ya que debemos contar “la cantidad de formas de elegir 3 personas de 5”, es decir

$$i = C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10$$

Es decir, existen 10 casos a considerar para calcular el valor de la probabilidad asociada. En otras palabras, existen diez formas distintas de obtener 3 resultados positivos entre las 5 personas testeadas.

Considerando lo anterior, la igualdad quedará de la forma:

$$(*)P(X = 3) = P(X_1 = 3) + P(X_2 = 3) + \dots P(X_{10} = 3)$$

Como fue mencionado anteriormente, la probabilidad parcial de cada caso será la misma para cada uno, es decir:

$$P(X_1 = 3) = P(X_2 = 3) = \dots = P(X_{10} = 3) = 0,0043$$

Reemplazando en (*) la probabilidad total que responde a la pregunta planteada queda expresada en la siguiente igualdad.

$$P(X = 3) = 0,0043 + 0,0043 + \dots + 0,0043$$

$$P(X = 3) = 10 \cdot 0,0043$$

CONCLUSIONES:

- Considerar que el análisis realizado por parte de los estudiantes y la obtención de la respuesta se basa implícitamente **en la construcción de solo una parte** de la distribución

binomial, es decir, que **no se utiliza explícitamente la función**, solo es necesario construir una parte de ella. Con esto considerar a su vez, que los estudiantes logran el cálculo de lo solicitado utilizando como base un experimento Bernoulli, logrando así identificar la probabilidad de éxito y la de fracaso, logrando la definición de una nueva variable aleatoria que considera la repetición finita de un experimento Bernoulli.

- A partir del cálculo realizado mediante el análisis y operatoria de las probabilidades expuestas por el método de recuento conocido como combinatoria, principio aditivo y la independencia de sucesos se obtiene entonces la probabilidad de que el test arroje un resultado positivo en 3 personas dentro de 5 examinadas es de 0,043.

ACTIVIDAD N°2: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Objetivo de la actividad: Construir intuitivamente una función de probabilidad asociada a la distribución binomial, que permita resolver la problemática planteada a partir del análisis de los cálculos de probabilidades presentes en una situación cotidiana.

CONTEXTO: En cierto centro médico se implementa un test para detectar una enfermedad al páncreas. Se sabe que la probabilidad de padecer de esta enfermedad es de un 18,7%.

***Nota al docente:** El contexto no ha variado respecto a la actividad anterior, esto ocurre debido a la conexión y continuidad en el proceso de generalización que tendrá la construcción de la distribución binomial a partir del ejemplo anterior (Actividad N°1)*

PREGUNTA: Si se consideran 3 personas a estudiar, ¿Qué es más probable, que resulten 0, resulten 1, que resulten 2 enfermos o 3 enfermos? Realiza un gráfico que ayude a ilustrar la situación.

PLAN: ¿Qué datos necesitamos?

- Comprender la pregunta planteada.
- Definir la variable aleatoria, recorrido y sus parámetros asociada a la distribución Binomial presente.
- Analizar los casos solicitados, comparando entre sí.
- Calcular la probabilidad deseada a partir de los elementos definidos que se aproximan al uso de la distribución Binomial.
- Graficar las probabilidades asociadas a cada elemento del recorrido.

DATOS:

Es necesario identificar el suceso y la variable aleatoria presente en la problemática y con ello identificar los posibles valores reales que puede tomar la variable aleatoria (recorrido).

Por otra parte, tener presente que se considerará, al igual que en el ejercicio anterior, como éxito, cuando una persona obtiene un resultado positivo al realizarse el test, así mismo se mantendrá su probabilidad, es decir $P(E) = 0,187$.

Se debe tener presente que en esta problemática se deben analizar los casos en que haya 0, 1, 2 o 3 personas con resultado positivo.

ANÁLISIS:

Parte 1: Definir la variable aleatoria asociada al contexto, en este caso definida al igual que en el ejercicio anterior, considerando que esta vez son 3 personas testeadas.

X: cantidad de personas que padecen la enfermedad al páncreas de un total de 3 testeados.

Se debe considerar entonces que los casos posibles, varían desde 0 a 3 personas cuyo test puede arrojar resultado positivo. De esta forma se sugiere definir el recorrido de la variable aleatoria:

$$Rec(X) = \{0,1,2,3\}$$

Lo que pretende ayudar a esclarecer todas las opciones posibles que tiene la variable aleatoria asociada al contexto.

Parte 2: Considerar que los estudiantes deben reconocer la probabilidad de éxito (persona obtiene resultado positivo en el test) y la de fracaso (persona obtiene resultado negativo en el test), definiendo así los sucesos como E : Éxito y E^c : Fracaso y con esto relacionar las notaciones que se utilizan generalmente en la distribución binomial, donde la probabilidad de éxito va a equivaler a un valor " p " y la de fracaso a un valor " q ", que serán complementarios entre sí, tal que la suma de ellos sea uno, es decir:

$$P(E) = p = 0,187$$

$$P(E^c) = q = 0,813.$$

Se sugiere utilizar la notación anterior para simplificar los distintos cálculos que prosigan en la resolución del ejercicio.

Parte 3: De esta forma, considerando la estructura del ejercicio anterior para realizar el cálculo de las probabilidades solicitadas se sugiere considerar los siguientes análisis y comparaciones para cada una de las probabilidades. Utilizando la misma estrategia de la Actividad N°1 del uso de la Combinatoria sin repetición.

Nota al docente:

(1) Considerar la notación $P(X = x)$ como la “probabilidad de que la variable aleatoria tome el valor x ”, específicamente la “Probabilidad de que x número de personas obtengan un resultado positivo en el test”, con $x = 0,1,2,3$.

*(2) Es necesario recordar que los resultados de los test son **independientes entre sí**, es decir el resultado de un test de alguna persona no afecta en el resultado del test de otra persona diferente.*

Considerar que los estudiantes deben realizar un análisis de cada una de las probabilidades a calcular, de las cuales se establecerán por casos:

- Caso 1: “0 personas obtienen un resultado positivo”

Es necesario comprender que la única forma de que ninguna de las personas testeadas arroje resultado positivo es que **todos obtengan un resultado negativo**, particularmente, ni la primera, ni la segunda, ni la tercera están contagiados. Como la probabilidad de obtener un resultado negativo es de $q = 0,813$ para las tres personas, la probabilidad queda expresada en la siguiente igualdad:

$$P(X = 0) = P(E^c_1 \cap E^c_2 \cap E^c_3)$$

Como son sucesos independientes entonces

$$= P(E^c_1) \cdot P(E^c_2) \cdot P(E^c_3)$$

$$= q \cdot q \cdot q$$

$$= q^3 = 0,539$$

En este caso no hay que considerar alguna otra ordenación de los resultados.

- Caso 2: “1 persona obtiene un resultado positivo”

Ahora bien, para que una de tres personas obtenga un resultado positivo en el test, se debe considerar que esta podría ser la persona 1, o la persona 2 o la persona 3. Para elegir uno de los tres, se considera utilizar el método de recuento combinatorio:

$$C_1^3 = \frac{3!}{(3-1)!1!} = 3,$$

ya que se deben considerar **todas las formas de elegir a una persona entre tres distintas.**

Ahora bien, en el cálculo de las probabilidades hay que considerar que **2 de ellas obtendrán un resultado negativo y solo 1 uno positivo**, como se calculó en la combinatoria, existen tres formas entonces de tener este resultado.

$$P(X = 1) = P(E_1 \cap E_2^c \cap E_3^c)$$

Como son sucesos independientes entonces

$$= P(E_1) \cdot P(E_2^c) \cdot P(E_3^c)$$

Como solo una de ellas entrega un resultado positivo, se puede suponer que esta será la persona 1, entonces:

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= p \cdot q \cdot q \\ &= p \cdot q^2 \end{aligned}$$

Ahora bien, como el resultado aplica solo para el caso de que la persona 1 sea quién entrega el resultado positivo y, como se mencionó anteriormente también puede ser que la persona 2 o la persona 3 sean quienes obtengan el resultado positivo, se debe considerar el valor obtenido por la combinatoria, que considera las tres formas de obtener un resultado positivo y multiplicar este valor por las probabilidades de éxito o fracaso asociadas al caso, quedando expresado en la siguiente igualdad:

$$P(X = 1) = 3 \cdot p \cdot q^2$$

Se sugiere de inmediato introducir el número combinatorio en la igualdad anterior para visibilizar esa parte del cálculo.

$$P(X = 1) = C_1^3 \cdot p \cdot q^2$$

$$= 0,37$$

- Caso 3: “2 personas obtienen un resultado positivo”

Análogamente, considerando el caso anterior, para que 2 de las personas entreguen un resultado positivo en su test, estas pueden ser, por ejemplo, la persona 1 y la persona 2, o bien, la persona 3 y la persona 1, entre otros casos. Así, para conocer de cuántas maneras pueden ser dos de las tres personas que obtengan un resultado positivo en el test utilizamos el método combinatorio, eligiendo 2 personas de un total de 3:

$$C_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$$

Sin embargo, en este caso, en el cálculo de las probabilidades, hay que considerar que **2 de ellas obtendrán un resultado positivo y solo 1 uno negativo**, como se calculó en la combinatoria en el caso anterior, existen tres formas entonces de tener este resultado.

$$P(X = 2) = P(E_1 \cap E_2 \cap E^c_3)$$

Como son sucesos independientes, entonces

$$= P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E^c_3)$$

Como solo una de ellas entrega un resultado negativo, se puede considerar que esta será la persona 3, entonces:

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= p \cdot p \cdot q \\ &= p^2 \cdot q \end{aligned}$$

Así, tomando en cuenta que hay tres maneras de que 2 de las personas entreguen un resultado positivo (obtenida a través de la combinatoria de 3 sobre 2) se obtiene la probabilidad a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= 3 \cdot p \cdot q^2 \\ &= C_2^3 \cdot p \cdot q^2 \\ &= 0,085 \end{aligned}$$

- Caso 4: “3 personas obtienen resultado positivo”

Es necesario comprender que la única forma de que 3 de las personas testeadas arrojen resultado positivo, es que **todos resulten positivo a la enfermedad**, particularmente, **la primera, la**

segunda y la tercera están contagiados. Como la probabilidad de obtener un resultado positivo es de $p = 0,187$ para las tres personas, la probabilidad resulta la siguiente igualdad:

$$P(X = 3) = P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

Luego, como son sucesos independientes entonces

$$= P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$$

$$= p \cdot p \cdot p = p^3$$

En este caso no hay que considerar alguna otra ordenación de los resultados, sin embargo, si se quisiera calcular de la misma manera que en los casos anteriores se recurre nuevamente al uso del cálculo combinatorio para argumentar esto:

$$C_3^3 = \frac{3!}{(3-3)! 3!} = 1$$

***Nota al docente:** Si bien no es necesario utilizar el valor obtenido en el cálculo de la probabilidad, debido que no afectará al resultado, es importante considerarlo para luego generalizar el cálculo de las probabilidades en una función de probabilidad.*

De esta manera, el cálculo de la probabilidad deseada queda dado por:

$$P(X = 3) = 1 \cdot p^3$$

$$= C_3^3 \cdot p^3$$

$$= 0,006$$

Parte 4: Al obtener todas las probabilidades asociadas el recorrido de la variable aleatoria se generará el gráfico que permitirá comparar los resultados obtenidos.

Para la construcción utilizaremos una tabla que permita organizar los datos:

Tabla 14. Representación de los valores con la probabilidad asociada.

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,539	0,37	0,085	0,006

Con los valores obtenidos en la tabla se procede a realizar el gráfico de las distribuciones de la variable aleatoria discreta en estudio.

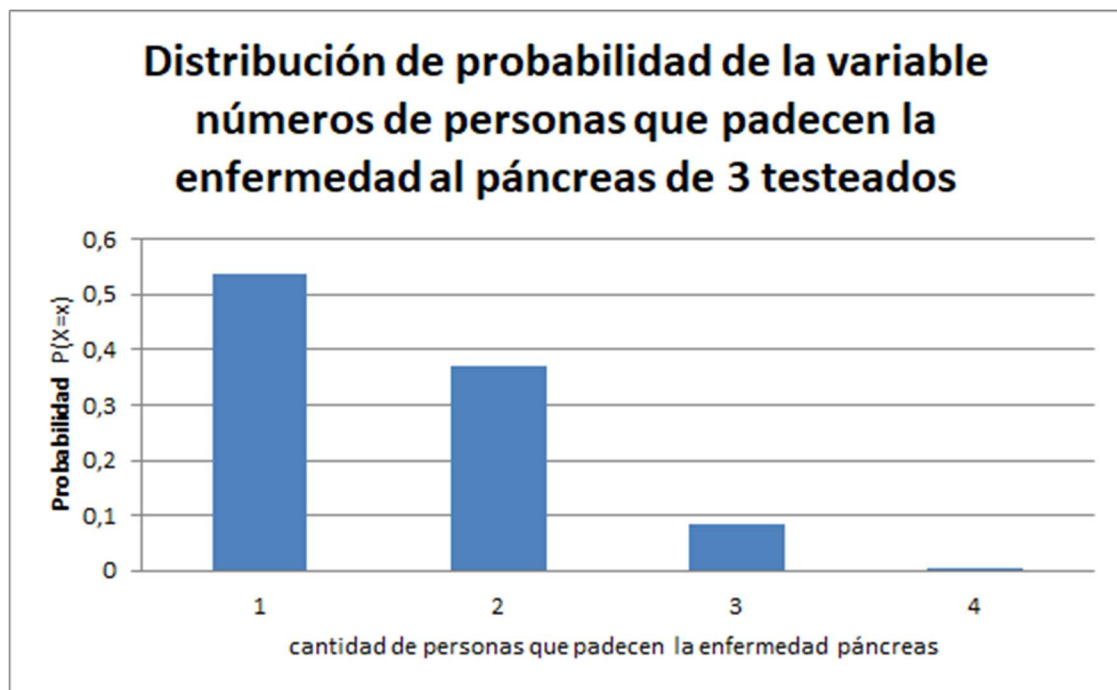


Gráfico 3. Fuente: *Elaboración Propia*

El gráfico permite ilustrar todas las opciones que tiene la variable aleatoria, particularmente la cantidad de personas cuyo resultado obtenido en el test es positivo y su probabilidad de acuerdo a cada caso. Lo que permite graficar la variable aleatoria es el tener todas las probabilidades asociadas a los elementos del recorrido, esto entrega un espectro completo de todos los elementos y sus probabilidades, hecho que permitirá obtener conclusiones e interpretaciones de la función de probabilidad.

Nota al docente: *Se sugiere proponer preguntas orientadoras que aluden a la presencia de todos los elementos del recorrido y al hecho de que la suma de las probabilidades de todos los elementos del recorrido es 1.*

CONCLUSIÓN:

- Considerar que el análisis realizado por parte de los estudiantes y la obtención de la respuesta se basa implícitamente **en la construcción de la distribución binomial**. Con esto considerar a su vez que los estudiantes logran el cálculo de lo solicitado utilizando la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria, incluyendo elementos como sucesos, recorrido e independencia. Además, se trabaja el cálculo a través de las probabilidades de éxito y fracaso, y cómo estas se van utilizando conforme al elemento del recorrido de la variable aleatoria a observar. Finalmente, se le entrega un rol importante al uso del número combinatorio presente en los cálculos, con esto, además, la articulación de todos estos elementos permite entonces trabajar implícitamente en los cálculos asociados a la variable aleatoria modelada por una distribución binomial.
- Mediante el cálculo y el análisis visual que entrega el gráfico, los estudiantes deben lograr realizar la **comparación de las probabilidades** asociadas a la variable aleatoria planteada en la situación. Respondiendo a la pregunta, finalmente lo más probable sería que ninguna persona haya obtenido la enfermedad, es decir, que ninguno de los testeados les resultó el test positivo, cuya probabilidad es de 53,9%.

***Nota al docente:** Se sugiere que, desde esta actividad y considerando el análisis detallado para cada caso, se defina la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria presente, buscando generalizar para otras variables aleatorias con distribución binomial. Para esto se sugiere considerar las siguientes definiciones:*

- *Sea la variable aleatoria X : "Número de personas con resultados positivos, entre los tres testeados"*
- *n : número de personas testeadas = 3*
- *p : probabilidad de que el resultado sea positivo.*
- *q : probabilidad de que el resultado sea negativo.*
- *x : valor que toma la variable.*
- *$Rec(X)$: posibles valores que puede tomar la variable = $\{0,1,2,3\}$*

Se sugiere considerar el siguiente resumen:

Caso 1: “0 personas obtienen resultados positivos”

$$P(X = 0) = q^3$$

$$P(X = 0) = C_0^3 \cdot p^0 \cdot q^3$$

Recordar que $C_3^3 = p^0 = 1$

Caso 2: “1 persona obtiene resultado positivo”

$$P(X = 1) = C_1^3 \cdot p \cdot q^2$$

Caso 3: “2 personas obtienen resultados positivos”

$$P(X = 2) = C_2^3 \cdot p^2 \cdot q$$

Caso 4: “3 personas obtienen resultados positivos”

$$P(X = 3) = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^0$$

Recordar que $C_3^3 = q^0 = 1$

Se sugiere realizar el siguiente análisis: Vemos que la variable aleatoria toma valores discretos entre 0 y 3, dichos valores son representados de forma genérica con la letra x .

Así:

- *cuando x es 0 la expresión que determina el resultado de su probabilidad es*

$$P(X = 0) = C_0^3 \cdot p^0 \cdot q^3$$

reemplazando para generalizar:

$$P(X = 0) = C_0^3 \cdot p^0 \cdot q^{3-0}$$

- *cuando x es 1 la expresión que determina el resultado de su probabilidad es*

$$P(X = 1) = C_1^3 \cdot p^1 \cdot q^2$$

reemplazando para generalizar:

$$P(X = 1) = C_1^3 \cdot p^1 \cdot q^{3-1}$$

- cuando x es 2 la expresión que determina el resultado de su probabilidad es

$$P(X = 2) = C_2^3 \cdot p^2 \cdot q^1$$

reemplazando para generalizar:

$$P(X = 2) = C_2^3 \cdot p^2 \cdot q^{3-2}$$

- cuando x es 3 la expresión que determina el resultado de su probabilidad es

$$P(X = 3) = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^0$$

reemplazando para generalizar:

$$P(X = 3) = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^{3-3}$$

Lo anterior puede ser resumido en la función, llamada función de probabilidad, siguiente, considerando $n=3$ personas testeadas (3 repeticiones del experimento):

$$P(X = k) = \begin{cases} C_k^3 \cdot p^k \cdot q^{3-k}, & \text{con } k \in \text{Rec}(x) \\ 0, & x \notin \text{Rec}(x) \end{cases}$$

En general la función de probabilidad para cualquier distribución binomial con n números de repeticiones está determinada por:

$$P(X = k) = \begin{cases} C_k^n \cdot p^k \cdot q^{n-k}, & \text{con } k \in \text{Rec}(x) \\ 0, & x \notin \text{Rec}(x) \end{cases}$$

ACTIVIDAD N°3: ESPERANZA Y VARIANZA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Objetivo de la actividad: Comprender los conceptos de esperanza y varianza de una distribución binomial, a través del cálculo de estos utilizando la variable aleatoria discreta relacionada a un contexto, su función de probabilidad y conceptos previos asociados a dichos estadísticos, de manera intuitiva y cotidiana.

CONTEXTO: En un parque de entreteniciones hay una ruleta con números del 1 al 10 como muestra la imagen. Para jugar debes apostar por alguna de estas opciones:

(a) el número resultante es múltiplo de 3.

(b) el número resultante es múltiplo de 2.

Se debe repetir el lanzamiento de la ruleta 5 veces.

La persona gana si la opción que apuesta aparece al menos tres veces tras tirar la ruleta del juego.

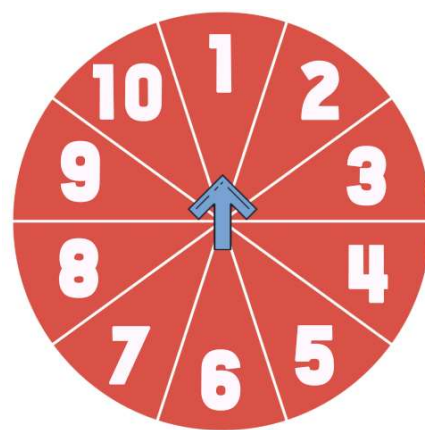


Figura 28.

PREGUNTA:

¿Si una persona escoge la opción (a), se espera que gane el juego?, En media, ¿Cuánto varían los resultados con respecto al valor esperado?

***Nota al docente:** Toda la actividad es análoga si se trabaja analizando la opción (b). Por lo mismo se aconseja también poder realizar la actividad utilizando grupos, donde algunos analicen la opción (a) y otros la opción (b).*

PLAN: ¿Qué datos necesitamos?

- Comprender que la pregunta está relacionada a la esperanza y desviación estándar de una variable aleatoria.
- Definir la variable aleatoria, recorrido y sus parámetros asociados al experimento Bernoulli de la distribución Binomial presente.
- Definir la función de probabilidad deseada a partir de los elementos identificados anteriormente.

DATOS: Es importante identificar la variable aleatoria correspondiente a una distribución binomial, ya que a pesar de que una ruleta posee varias opciones, al apostar por **una** de las opciones (a) o (b) el resultado puede ser beneficioso o no, lo que comúnmente se define en una variable aleatoria discreta con distribución binomial como éxito o fracaso.

Considerando lo anterior identificar en el enunciado los **parámetros** de una variable aleatoria con distribución binomial para construir la función de probabilidad asociada.

ANÁLISIS:

Parte 1: Para lograr responder la pregunta planteada es necesario comprender que apunta explícitamente al valor esperado (“se **espera** ganar”), por lo que para responder la primera parte de la pregunta se resume al cálculo de la esperanza de la variable aleatoria que está presente en el juego. Para la segunda parte de la pregunta, donde se hace referencia a la variabilidad de los datos, es también explícita la referencia a la desviación estándar de una variable aleatoria, específicamente discreta y con una función de probabilidad que distribuye binomial.

Parte 2: Para la problemática planteada se sugiere utilizar las siguientes definiciones:

X: Número de veces que el número resultante de la ruleta es múltiplo de 3, en las cinco repeticiones.

Como la cantidad de repeticiones del experimento es de cinco veces, se sugiere definir $n = 5$. Se debe considerar que una persona que juega el juego observará los resultados ocurridos tras tirar cinco veces la ruleta, por lo que los valores del recorrido de la variable aleatoria serán:

$$Rec(X) = \{0,1,2,3,4,5\}.$$

Por otra parte, se sugiere definir el experimento Bernoulli asociado a la variable aleatoria y sus parámetros como:

E: Lanzar la ruleta y observar el número resultante

Éxito: El resultado es múltiplo de 3

Luego, la probabilidad de obtener un valor múltiplo de 3, considerando la Regla de Laplace, sería tres casos (3,6 y 9) dentro de un total de diez posibles resultados de la ruleta (1,2,3,4,5,6,7,8,9 y 10), así se define

$$P(\text{Éxito}) = p = 3/10.$$

Por complemento, se define la probabilidad de **no obtener** un múltiplo de 3 como

$$P(\text{Fracaso}) = q = 7/10.$$

Parte 3: Se sugiere plantear la función de la variable aleatoria asociada a los parámetros recién definidos como:

$$P(X = k) = \begin{cases} C_k^5 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^k \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{5-k}, & k \in Rec(X) \\ 0, & k \notin Rec(X) \end{cases}$$

Al calcular todas probabilidades de esta función de probabilidad se obtiene la siguiente tabla resumen:

Tabla 15. Resumen de los resultados de los valores k y la probabilidad asociada.

k	$P(X = k)$
0	$P(X = 0) = C_0^5 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^5 = 0,168$
1	$P(X = 1) = C_1^5 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^4 = 0,36015$
2	$P(X = 2) = C_2^5 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^3 = 0,3087$
3	$P(X = 3) = C_3^5 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 = 0,1323$
4	$P(X = 4) = C_4^5 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^1 = 0,02835$
5	$P(X = 5) = C_5^5 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^0 = 0,00243$

Parte 4: Los cálculos que se realicen serán a través del conocimiento previo que poseen de la esperanza de una variable aleatoria y desviación estándar, considerando los elementos introducidos en el curso relacionados con uso de la distribución binomial, conseguir los elementos necesarios para este cálculo. Además, se debe considerar que se debe utilizar el valor de la desviación estándar para efectos de interpretación, considerando la siguiente igualdad.

$$Var(x) = \sigma^2 \Rightarrow \text{Desviación Estándar}(X) = \sigma$$

Nota al docente: Es importante en este punto no acercar aún a los estudiantes a la generalización del cálculo de la esperanza como $E(X) = n \cdot p$ y la varianza como $Var(X) = n \cdot p \cdot q$, pues se espera encauzar el cálculo a través de un análisis de manera más intuitiva para la comprensión de la representación de la esperanza y varianza en un contexto dado, **utilizando los conceptos aprendidos previamente**. Por otra parte, se sugiere utilizar la tabla

para ubicar el valor intuitivo de la esperanza, por ejemplo, el decir “Por las probabilidades se puede esperar que el valor esté entre 1 y 2”, para luego ser comparado con el valor real que será calculado.

Parte 5: Utilizando la fórmula obtenida en niveles anteriores para el cálculo de la esperanza de la variable aleatoria en estudio, se prosigue a calcular:

$$E(X) = 0 \cdot 0,168 + 1 \cdot 0,36015 + 2 \cdot 0,3087 + 3 \cdot 0,1323 + 4 \cdot 0,02835 + 5 \cdot 0,00243$$

Obteniendo así $E(X) = 1,5$.

Parte 6: El cálculo de la varianza en los niveles anteriores se generalizó como:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

De esta manera, con los cálculos anteriores de la esperanza, se espera que los estudiantes logren comprender que:

$$E^2(X) = (1,5)^2 = 2,25$$

Ahora bien, el cálculo de $E(X^2)$, se espera que los estudiantes lo resuelvan de la siguiente manera:

$$E(X^2) = 0^2 \cdot 0,168 + 1^2 \cdot 0,36015 + 2^2 \cdot 0,3087 + 3^2 \cdot 0,1323 + 4^2 \cdot 0,02835 + 5^2 \cdot 0,00243 = 3,2956$$

Reemplazando en los resultados obtenidos, resulta:

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 3,2956 - 2,25 = 1,0456 \approx 1,05$$

Ahora bien, para poder responder la pregunta planteada respecto a la cantidad que varían los resultados respecto al valor esperado se debe utilizar el valor de la desviación estándar para efectos de interpretación, considerando la siguiente igualdad.

$$Var(x) = \sigma^2 \Rightarrow \text{Desviación Estándar}(X) = \sigma$$

Procediendo al cálculo se obtiene que $\sigma = 1,024$

CONCLUSIÓN:

- Considerando los valores obtenidos tras utilizar las expresiones algebraicas conocidas que nos permiten calcular la Esperanza $E(X)$, la Varianza (σ^2) y la desviación estándar (σ) se sugiere interpretarlos de la siguiente forma para responder a la problemática planteada:

- Se espera que, al apostar por la opción (a), se obtengan 1,5 múltiplos de 3 en cinco repeticiones.

Más correctamente considerando que no pueden obtenerse 1,5 repeticiones se sugiere la interpretación:

- Se espera que al apostar por la opción (a) se obtengan entre 1 o 2 múltiplos de 3 en cinco repeticiones.
- En media, la variabilidad del número de personas con resultado positivo obtenidos al realizar el examen es de 1,024 positivos considerando la esperanza de 1,5 exámenes positivos.

Nota al docente: Para el proceso de generalización de los parámetros de la función asociada a una distribución binomial, es decir, definir la media o esperanza como $\mu = E(X) = n \cdot p$ y la varianza como $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$ **no se sugiere** utilizar el despeje de la fórmula obtenida por la sumatoria general, pues podría resultar un proceso confuso para los estudiantes, sino más bien establecer la generalidad y corroborar con los valores obtenidos en sus propios cálculos de este ejercicio (presentes en la tabla), así obtendrán los mismos valores que entregará el uso de la fórmula general de ambos.

IV Medio: Distribución Normal

Objetivo de aprendizaje (OA):

OA 2: Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.

Habilidades:

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA f. Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas

Actitudes:

Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

Actuar de acuerdo con los principios de la ética en el uso de la información y de la tecnología, respetando la propiedad intelectual y la privacidad de las personas.

ACTIVIDAD N°1: VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Objetivo de la actividad: Analizar el gráfico histograma y la tabla de frecuencia para resolver una problemática asociada a una variable aleatoria continua, haciendo uso del programa de GeoGebra, de forma crítica y colaborativa.

CONTEXTO: En la actualidad, gran mayoría de las personas tienen una mascota, entre ellos, un gran número prefiere gatos por distintas razones. Cierta veterinaria realiza un examen general a un grupo de felinos, dentro de dicho examen está incluida la masa que tienen. Las masas de los gatos estudiados durante el último año están resumidos en un documento GeoGebra adjunto a la actividad, con una base de datos sobre la masa de 100 gatos. Utilizando los datos adjuntos.

***Nota al docente:** Para esta actividad es necesario el uso del programa GeoGebra, para que los estudiantes puedan experimentar y descubrir mejor la estadística, utilizando herramientas tecnológicas.*

PREGUNTA: Si se elige un gato de los examinados al azar ¿Qué probabilidad hay de que tenga masa esté entre 3,17 kg y 4,55 kg?

PLAN: ¿Qué datos necesitamos?

- Comprender la pregunta planteada.
- Definir variable aleatoria de la situación.
- Graficar y analizar el histograma de la situación planteada.
- Visualizar en el gráfico y calcular los porcentajes solicitados en el problema.

DATOS: Es importante identificar la variable aleatoria correspondiente como una variable aleatoria continua, recopilar los parámetros asociados a la variable aleatoria, utilizando las medidas de dispersión, de tendencia central y la forma del histograma asociado a la variable aleatoria, para ello se sugiere utilizar las herramientas que dispone GeoGebra en hoja de cálculo.

ANÁLISIS:

Parte 1: Se debe identificar y definir la variable aleatoria asociada al contexto en trabajo. Así, se sugiere definir de la siguiente forma

X: Masa de un gato en kg

Al definir la variable aleatoria es necesario definir entonces el recorrido de esta. Considerando que el conjunto no es contable (como ocurría en el caso de la variable aleatoria discreta), y tomando en cuenta algunos valores de la base de datos como 3,45 - 3,56 - 3,459, y la “exactitud” que estos tienen, es decir, siempre se podrá encontrar un siguiente decimal para darle mayor precisión a la masa de un gato, se considera entonces el recorrido utilizando intervalo de datos. De esta forma se sugiere definir el recorrido a partir de los valores presentes en la base de datos utilizando las siguientes funciones:

- Para obtener el límite inferior del intervalo del recorrido los estudiantes consideran el valor mínimo de la tabla utilizando en otra celda la función “=Mínimo(A1:A100)”.
- Para obtener el límite superior del intervalo el recorrido los estudiantes consideran el valor máximo presente en la tabla de datos, este se obtiene utilizando la función “=Máximo(A1:A100)”

Con los valores obtenidos se define el recorrido de la variable aleatoria de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Rec } X &= [\text{límite inferior}, \text{límite superior}] \\ &= [1,1; 6,63] \end{aligned}$$

Nota al docente: Se presenta una característica de la variable aleatoria continua, desde allí entonces es importante evidenciar las diferencias que tiene con las características de una variable aleatoria discreta, los valores que toma y la notación correspondiente. Con esto se

sugiere una pregunta orientadora para comprenderlo: ¿Cuál sería la probabilidad de que al elegir un gato al azar este tenga una masa de 3,456 kg?, considerar entonces que la pregunta apunta a aquel dato que difiere de 3,4561 o 3,45601, por lo que la probabilidad de la especificidad del dato en particular (considerando los infinito decimales) sería de 0.

Parte 2: Luego de definir la variable aleatoria continua y su recorrido, se sugiere que los estudiantes logren recordar la elaboración del gráfico histograma, para poder graficarlo en el programa GeoGebra ya que es “una representación gráfica de la variable aleatoria que a través de barras muestra que el área de cada rectángulo representa la frecuencia absoluta de los intervalos”, pues con esta representación es posible responder a la pregunta planteada.

Para que los estudiantes grafiquen el Histograma en GeoGebra deben seleccionar el rango de celdas desde la A1 hasta la A100 y luego hacer click en el ícono de “Análisis de una variable”

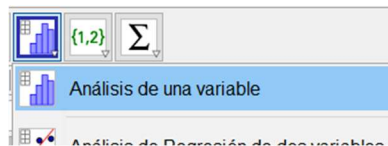


Figura 29.

Considerando el rango seleccionado, A1:A100, que aparecerá en detalle en la fuente de datos los estudiantes deben dar click a “Analiza”, como se muestra en la siguiente imagen.

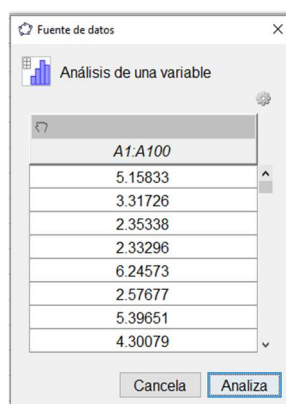


Figura 30.

Siguiendo los comandos anteriores se obtiene el gráfico de histograma, como el que se muestra a continuación.

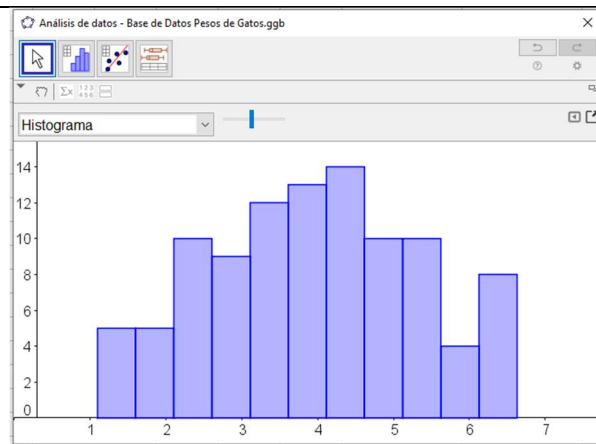


Figura 31.

Se sugiere que para obtener un análisis más completo de la variable aleatoria, se habilite la opción “mostrar estadísticas”, como lo muestra la siguiente imagen:



Figura 32.

Habilitando esta opción, se puede acceder a datos como la cantidad de datos, la media, desviación estándar, valores máximos y mínimos entre otros.

Ahora para lograr responder la pregunta y analizar de mejor manera el histograma para el cálculo de probabilidades los estudiantes desplegarán las opciones que entrega el software GeoGebra para el gráfico realizado haciendo clic en “opciones” , lo que permitirá ver diferentes herramientas para ajustar y utilizar de manera óptima el histograma. Particularmente, en la sección “Muestras” se debe habilitar la opción “Tabla de Frecuencias”. Así se desplegará una ventana que muestre diferentes datos a utilizar para responder la pregunta, entre ellos los intervalos y sus frecuencias como se muestra a continuación.

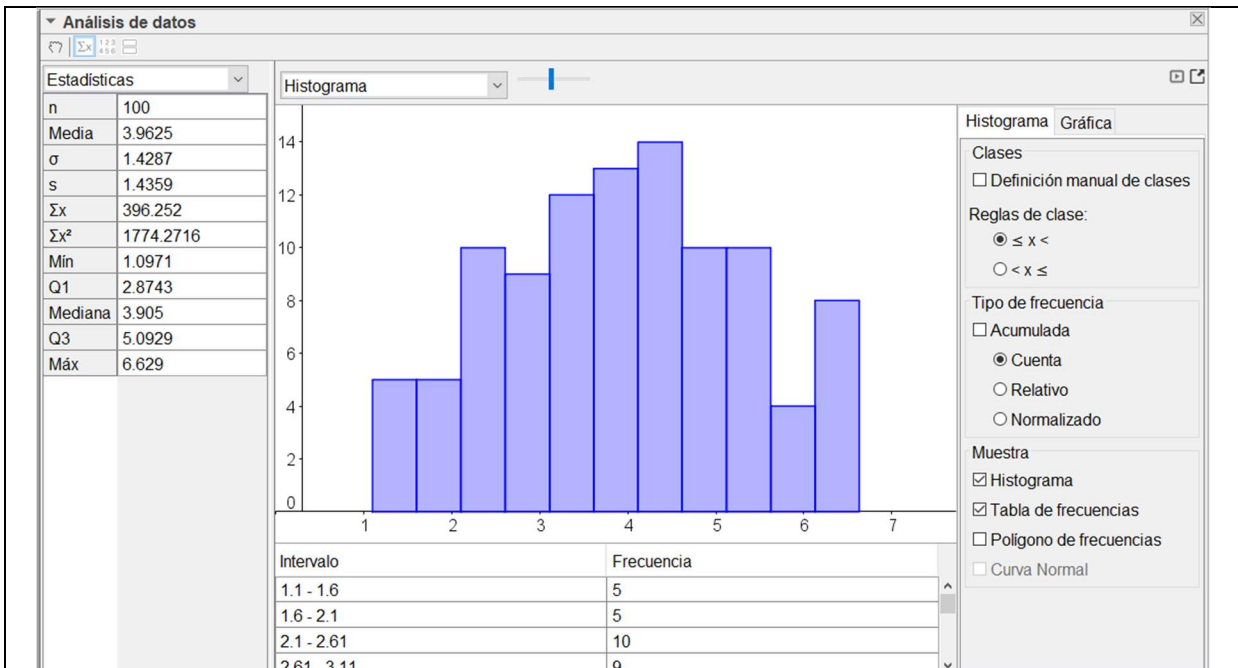


Figura 33.

Parte 3: Con la ventana del gráfico y todas las opciones presentes se espera que los estudiantes utilicen el deslizador para cambiar el número de clases e intervalos del histograma y con esto utilizar el número de clases que considera óptimo para responder con mayor exactitud la pregunta planteada.

Se espera que los estudiantes consideren óptimo 8 clases, ya que al deslizar la barra de herramientas que indica la cantidad de clases visualmente se puede considerar óptima. El deslizador de las clases indicará su número de estas, de la siguiente manera:



Figura 34.

Los intervalos generados exponen el límite inferior y límite superior respecto a la masa en kg de los gatos. De acuerdo a las clases elegidas, el software genera y define los intervalos para la masa de los gatos, de la siguiente manera:

Intervalo	Frecuencia
1.1 - 1.79	7
1.79 - 2.48	12
2.48 - 3.17	11
3.17 - 3.86	19
3.86 - 4.55	18
4.55 - 5.25	12

Figura 35.

Parte 4: Con la información recopilada, es posible responder a la pregunta planteada, ya que los intervalos 4 y 5 indican el **número** de gatos cuya masa esté entre 3,17 kg y 4,55 kg. Considerando que el total de datos disponibles son 100, basta obtener la suma de las frecuencias relativas asociadas a la probabilidad pedida.

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{37}{100} = 0,37 \Leftrightarrow 37\%$$

***Nota al docente:** En rigor esta probabilidad se debiera calcular con áreas porque la variable aleatoria es continua. Lo calculado es una aproximación a la probabilidad porque se sabe cuántos datos tienen, ya que en un ejercicio de una distribución normal nunca se tiene un total de individuos que cumplen con alguna característica. En base a lo anterior, es importante clarificar que lo calculado es una aproximación para no generar una confusión conceptual en los estudiantes.*

Se espera que los estudiantes, **visualicen** en el gráfico histograma generado en el programa GeoGebra, el área comprendida por el rectángulo entre los intervalos 3,17 kg y 4,55 kg está asociada a la probabilidad solicitada.

Además, se sugiere habilitar la opción “Relativo” en el Tipo de frecuencia que muestran las opciones del histograma, para poder visualizar la probabilidad asociada a cada intervalo de manera más clara, como se muestra en la imagen:

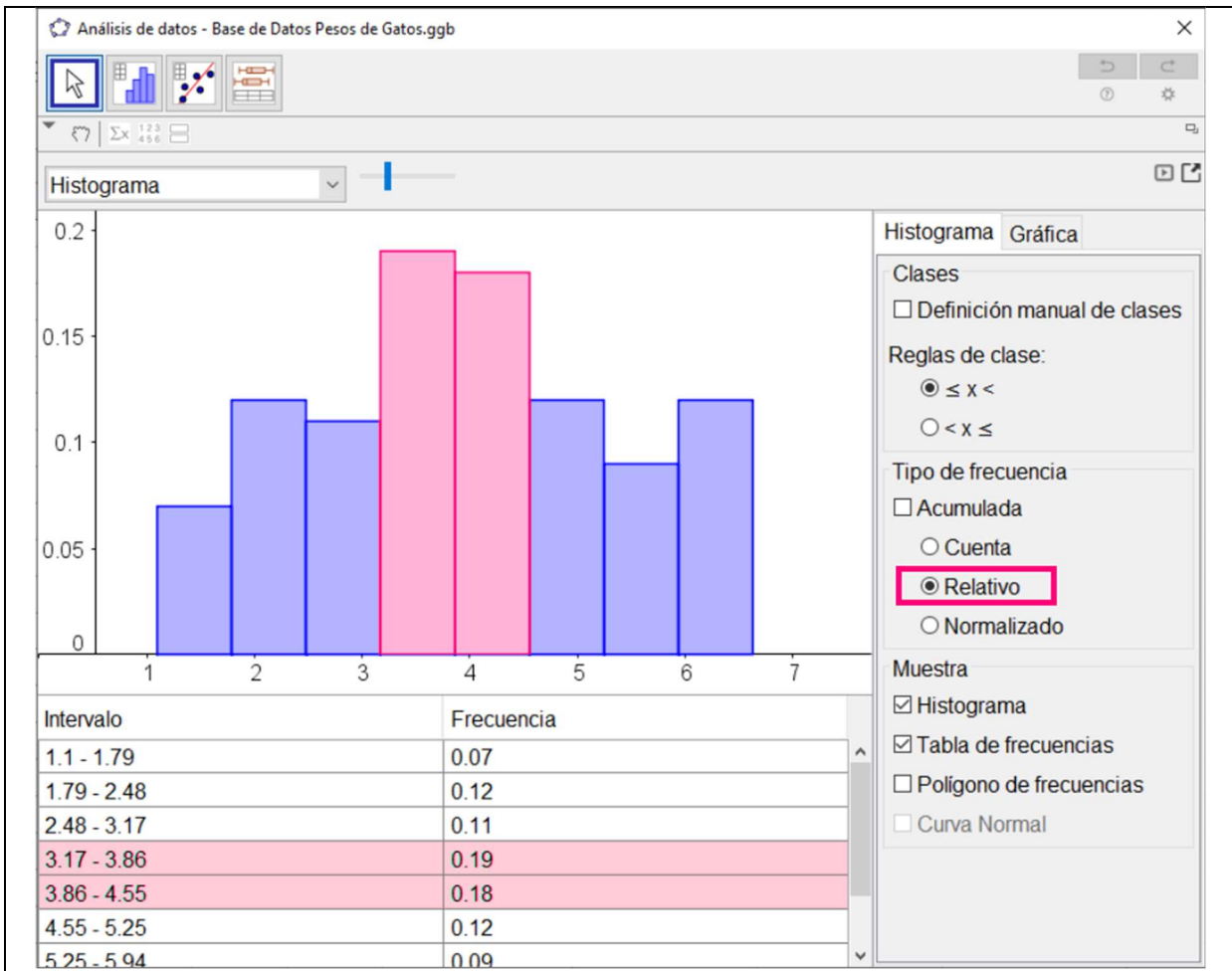


Figura 36.

Por otra parte, es importante observar en la gráfica la probabilidad de un dato en específico, por ejemplo $P(X = 2)$. Se debe considerar que el área bajo un punto es cero, por lo que no es posible interpretar la probabilidad de un dato en específico para una variable aleatoria continua calcular la probabilidad puntual, es decir no es útil para este tipo de variables.

CONCLUSIÓN:

- Mediante el análisis realizado, queda evidenciado que es posible calcular probabilidades de intervalos de datos asociados a **variables aleatorias continuas** utilizando el gráfico histograma, ya que dichas probabilidades están representadas a través del área de los

rectángulos del histograma formados por los intervalos de interés y las frecuencias relativas acumuladas entre los límites de cada intervalo.

- Se espera que los estudiantes comprendan que en una **variable aleatoria discreta** los elementos del recorrido son valores puntuales, es decir, se podría calcular la probabilidad de un valor en específico. En cambio, en la **variable aleatoria continua**, si bien es posible calcular la probabilidad de un valor en específico que siempre es cero, solo es interpretable calcular la probabilidad de valores que están comprendidos entre intervalos, utilizando área bajo curva que esté presente en dicho tramo de valores.
- Conforme a lo anterior, se espera que los estudiantes consideren el uso de registros como tablas de frecuencias y gráficos, para estimar el cálculo calcular y visualizar probabilidades asociadas a una variable aleatoria continua.
- La probabilidad de que al elegir un gato al azar su masa esté entre 3,17 kg y 4,55 kg es de un 37% aproximadamente.

***Nota al docente:** El problema planteado permite ser profundizado eligiendo distintos tramos de masa de los gatos, esto permitirá que los estudiantes trabajen con distintas clases para el histograma, realizar distintos cálculos y sumas que equivalen a la “**suma de áreas bajo la curva**” en un intervalo establecido, lo que conecta directamente con el uso de un gráfico de la función de densidad para el cálculo de probabilidad de una variable aleatoria continua. Se sugiere poder profundizar el ejercicio mediante el cálculo de las áreas del histograma y corroborar que el resultado sería el mismo aproximadamente.*

ACTIVIDAD N°2: GRÁFICO DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Objetivo de la actividad: Comparar la forma de los polígonos de frecuencias y las medidas de resumen o estadísticas obtenidas de muestras aleatorias de distintos tamaños para una variable aleatoria continua con una distribución normal, mediante el uso de software.

CONTEXTO: Se realizó un estudio a un grupo de 350 personas en periodo de cuarentena, acerca del tiempo de horas semanales que utilizan la plataforma Netflix, se adjunta una base de datos en GeoGebra con la información recaudada. Se sabe que dicha variable distribuye normal con parámetros $\mu = 11,87$ y $\sigma^2 = 2,96^2$. Considerar que el polígono de frecuencias asociado a dichos parámetros es el siguiente:

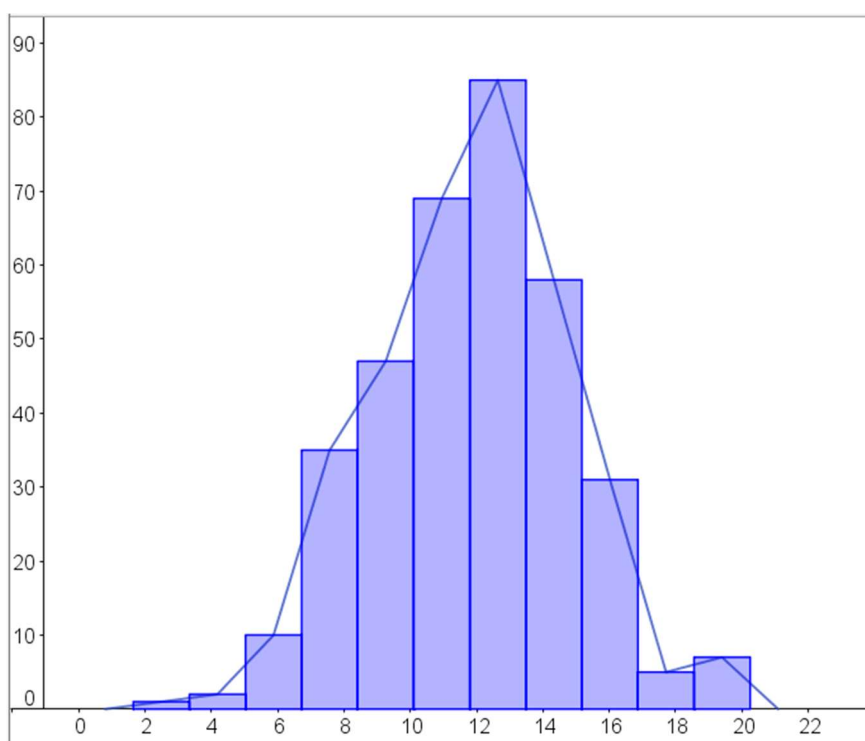


Figura 37.

PREGUNTA: ¿Qué se puede concluir al realizar una comparación entre las formas de los polígonos de frecuencias asociados a cada muestra aleatoria de tamaños 100, 200 y 300 datos

de la base adjunta, con respecto a la forma del polígono de frecuencias y las medidas de resumen de los datos dados?

PLAN: ¿Qué datos necesitamos?

- Comprender la pregunta planteada.
- Definir variable aleatoria.
- Graficar los polígonos de frecuencias correspondientes a los datos de diferentes tamaños de muestra.
- Comparar los gráficos conforme al inicial
- Establecer conclusiones a partir de la comparación realizada.

DATOS: Variable aleatoria continua con distribución normal y las medidas de resumen asociados a cada muestra de distinto tamaño, además del histograma y polígono de frecuencia relacionados a cada muestra utilizando las funciones de la hoja de cálculo de Excel o a través de las opciones que da el mismo programa GeoGebra.

ANÁLISIS:

Parte 1: Se espera que los estudiantes identifiquen que la variable en estudio corresponde a una variable aleatoria continua. Se sugiere definir la variable aleatoria continua de la siguiente forma:

Sea la v. a. X : tiempo en horas que un grupo personas utilizan la plataforma Netflix

$$\text{Con } X \sim N(11,8; 2,96^2)$$

Para realizar el análisis de cada muestra de distintos tamaños, los datos de cada muestra se deben elegir de forma aleatoria desde la base de datos adjunta, una vez elegidos los datos se sugiere realizar la gráfica y obtener los parámetros a partir de las herramientas de del software GeoGebra.

Ya que se considerarán tres tamaños de muestras distintos para realizar el mismo análisis en cada caso, se especificará en el presente documento solo uno de los tres casos asociados, ya que los otros dos pueden ser realizados de forma análoga.

Parte 2: Para generar el histograma se sugiere utilizar el software GeoGebra. Los estudiantes abrirán la base de datos adjunta, llamada “Base de datos Horas uso Netflix”. Considerando como primer caso un tamaño de muestra 100, en la hoja de cálculo se seleccionará un rango que incluya 100 datos. Como la pregunta hace referencia a muestras aleatorias entonces se dejará a criterio del estudiante que rango seleccionar. Particularmente se trabajará con el rango *A1:A150*. Tras seleccionar el rango de datos se utilizará la herramienta “*Análisis de una variable*”, como se muestra a continuación.

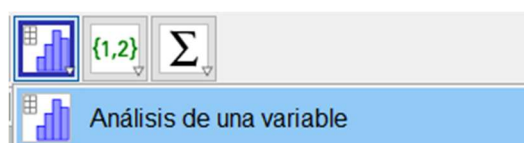


Figura 38.

El rango seleccionado como fuente para analizar será utilizado por el software, dando click a “Analizar” para obtener el gráfico asociado, como se muestra a continuación.

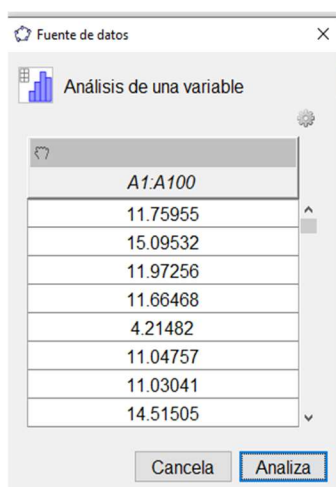


Figura 39.

Se espera que los estudiantes consideren 11 clases o intervalos. El deslizador de las clases indicará el número de estas, de la siguiente manera:

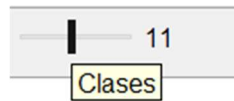


Figura 40.

Para activar la vista del polígono de frecuencias, el cual corresponde a una estimación del gráfico de la función de densidad de los datos en estudio, se dará click en el botón “Opciones”



en la esquina superior derecha, habilitando en “Muestra” la opción “Polígono de Frecuencias”

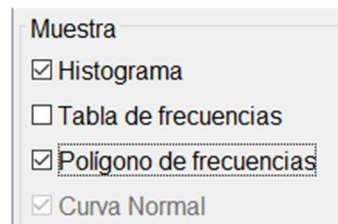


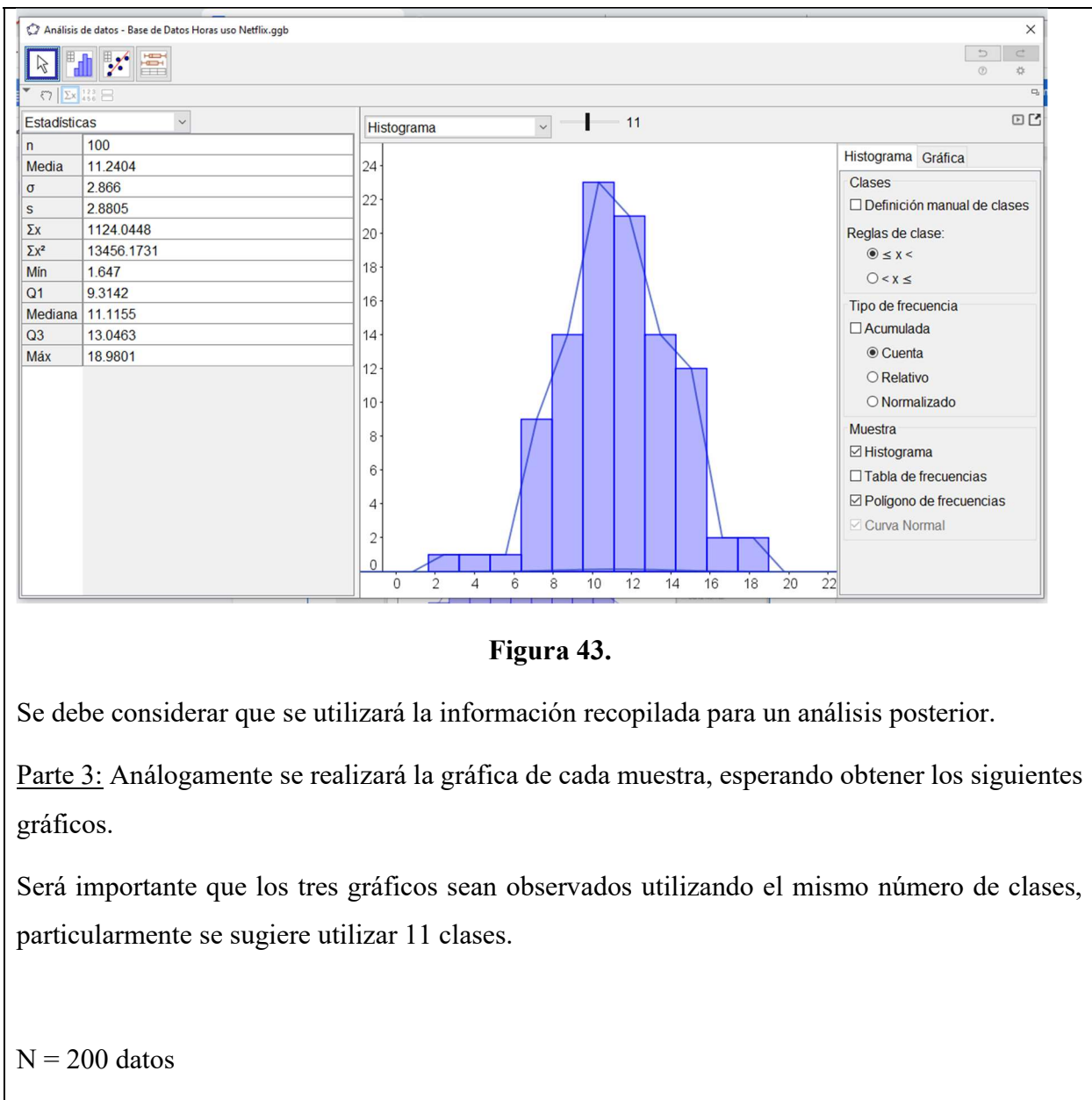
Figura 41.

Además, para conocer las medidas de resumen asociados al gráfico se sugiere utilizar la opción “Mostrar Estadísticas” mediante el botón de la figura 42.



Figura 42.

Con esto se obtiene la siguiente vista gráfica.



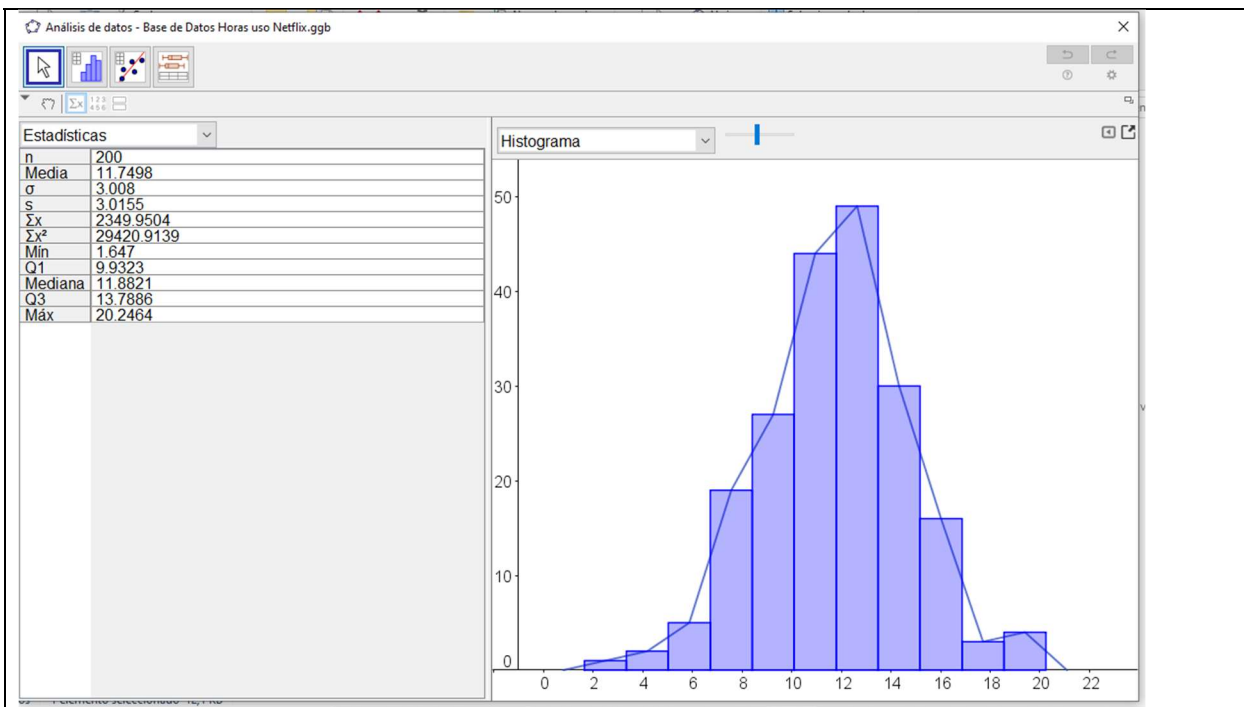


Figura 44.

N = 300 datos

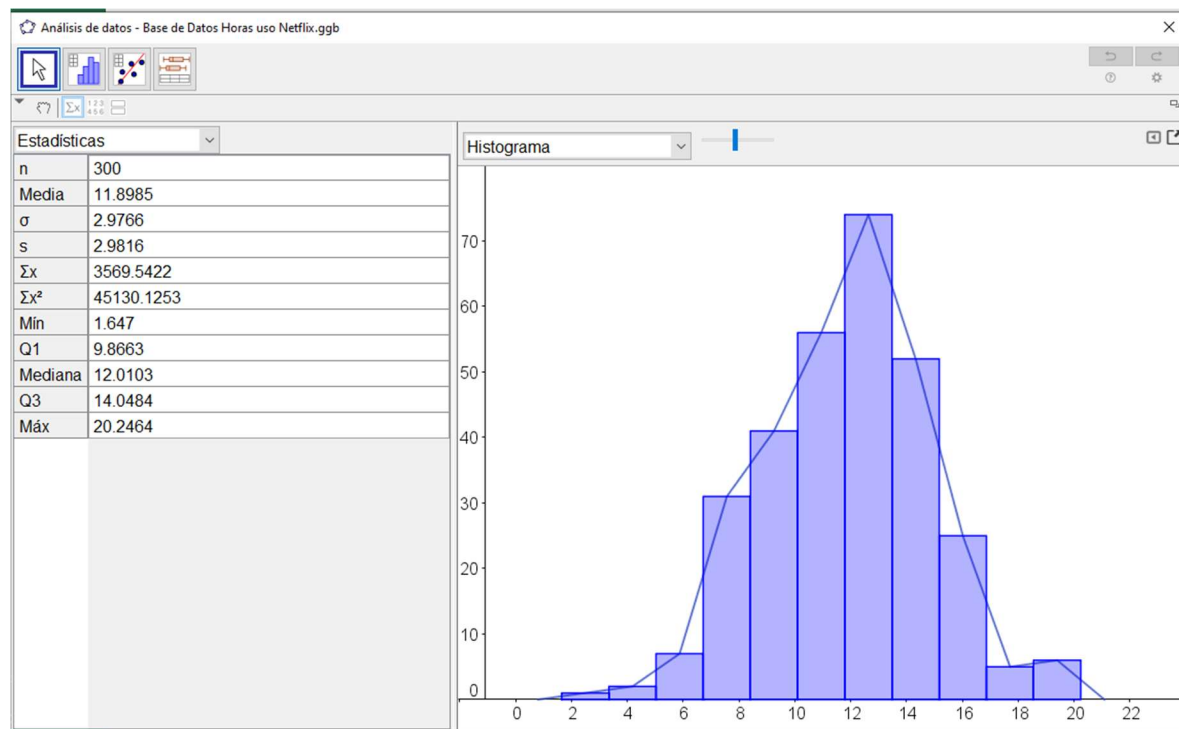


Figura 45.

Parte 4: Considerando los tres gráficos, se espera que los estudiantes comparen y analicen con el gráfico inicial del problema, con la muestra de 350 datos presentado a continuación:

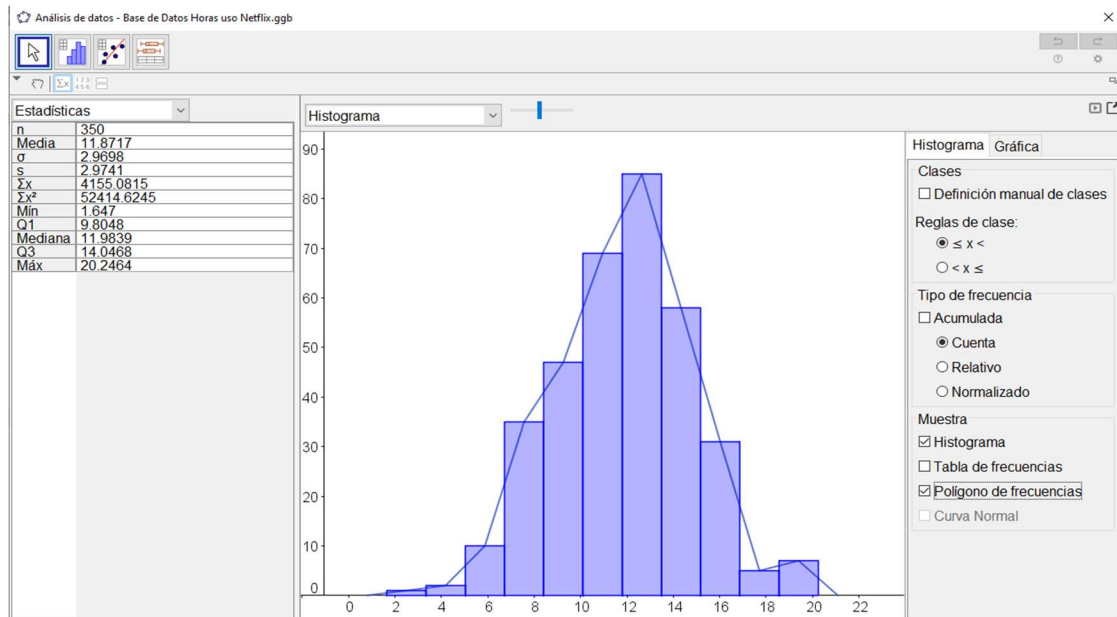


Figura 46.

Se espera que lo estudiantes, definan los parámetros de los tres gráficos, como se muestra a continuación:

1. Gráfico 1: Tamaño de la muestra 100

Para esta muestra asociada a 100 datos se presentan las medidas de resumen para caracterizar la muestra se presentan de la siguiente manera:

Tabla 16. Resumen de las medidas estadísticas del experimento.

Medidas de resumen o estadísticos	Datos
n	100
$\bar{x}$	11,2
s^2	2,88 ²

2. Gráfico 2: Tamaño de la muestra 200

Para esta muestra asociada a 200 datos se presentan las medidas de resumen para caracterizar la muestra se presentan de la siguiente manera:

Tabla 17. Resumen de las medidas estadísticas del experimento.

Medidas de resumen o estadísticos	Datos
n	200
$\bar{x}$	11,7
s^2	3,015 ²

3. Gráfico 3: Tamaño de la muestra 300

Para esta muestra asociada a 300 datos se presentan las medidas de resumen para caracterizar la muestra se presentan de la siguiente manera:

Tabla 18. Resumen de las medidas estadísticas del experimento.

Medidas de resumen o estadísticos	Datos
n	300
$\bar{x}$	11,8
s^2	2,98 ²

Se espera que los estudiantes, comparen con la cantidad de datos a estudiar y los parámetros de la distribución normal, para lograr concluir de buena forma.

CONCLUSIONES:

- A mayor tamaño de muestra es posible observar un polígono de frecuencias simétrico más acentuado considerando el valor de la media como eje de simetría en la gráfica.
- Se puede observar que las medidas de resumen calculados para cada tamaño de muestra no difieren en más de una unidad de los parámetros dados inicialmente (en el gráfico presente en el contexto). Se sugiere enfatizar que esto ocurre por la aleatoriedad presente al elegir los datos en cada muestra.
- La forma de los polígonos de frecuencias es similar a la inicial, con pequeñas variaciones, a medida que aumenta el tamaño de la muestra se puede observar que la forma de los gráficos se irá asemejando al de tamaño de muestra 350. Se sugiere enfatizar en esto ocurre por la aleatoriedad presente al elegir de los datos en cada muestra.
- A mayor tamaño de la muestra es posible observar que las medidas de resumen de estas se acercan cada vez más a los parámetros de la población. Así también la forma del gráfico.

***Nota al docente:** Para entender con más profundidad la distribución normal, se sugiere al docente plantear a los estudiantes una problemática que considere una base de datos con una cantidad mayor que la utilizada de elementos para lograr visualizar la forma del polígono de frecuencia similar a la Campana de Gauss asociada a la distribución normal. Se sugiere al docente plantear de acuerdo al contexto una pregunta abierta a los estudiantes similar a la siguiente ¿A mayor tamaño de la muestra, ¿cómo es la forma del gráfico (polígono de frecuencia) formado? Considerar para esto, la variabilidad de los datos presentes, asociarlos con la distribución normal y la similitud aproximada a la forma de la campana de Gauss, analizando simetría y la distribución de los datos.*

A modo de institucionalizar la definición formal de la distribución normal, se sugiere utilizar la siguiente:

Sea X variable aleatoria con $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, con $\mu \in R$ y $\sigma^2 > 0$

Con el siguiente gráfico:

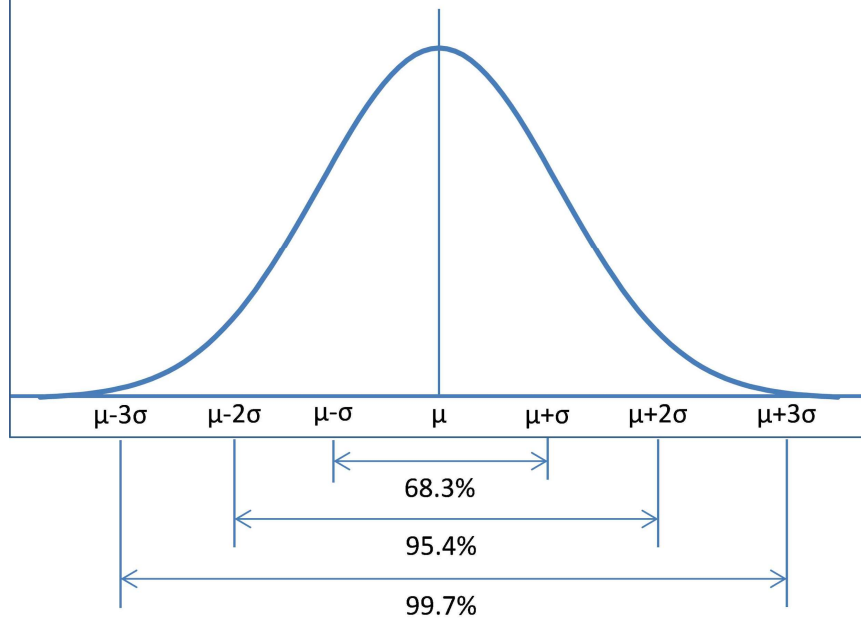


Figura 47.

ACTIVIDAD N°3: DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

Objetivo de la actividad: Calcular probabilidades de una distribución normal utilizando la estandarización de esta, asociada a un contexto cotidiano, de forma reflexiva y colaborativa.

Nota al docente: Antes de realizar la actividad, se sugiere considerar la siguiente información:

La siguiente función representa la función de densidad de una variable aleatoria que distribuye Normal con parámetros μ y σ^2 :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \mu \text{ y } \sigma^2 \text{ reales}$$

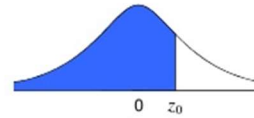
Para calcular probabilidades utilizando esta función es necesario calcular áreas bajo la curva, lo que se obtiene utilizando la integral de la función de densidad, considerando como límites de integración los valores de interés de probabilidad. Para simplificar los cálculos las variables aleatorias que distribuyen normal se utiliza la función estandarizada, que básicamente transforma los valores de la variable en estudio e valores que distribuyen considerando media 0 y desviación estándar 1. El valor del área bajo la curva asociada a la probabilidad acumulada está resumido en la siguiente tabla.

TABLA DE VALORES DE LA PROBABILIDAD ACUMULADA PARA LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR.

μ = Media

σ = Desviación típica

$$P(z \leq z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



Tipificación: $z_0 = \frac{x - \mu}{\sigma}$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	3,0
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	3,1
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	3,2
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	3,3
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	3,4
3,5	0,99977	0,99978	0,99979	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	3,5
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	3,6
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	3,7
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	3,8
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	0,99997	3,9

De esta manera, para realizar cálculos de una probabilidad de una distribución normal con media y desviación estándar conocida es necesario transformarla en una variable Z (estandarizada) de distribución $N(0,1)$ mediante la siguiente relación:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

A esta transformación se le conoce como estandarización o tipificación y permite calcular probabilidades del tipo $P(Z \leq z)$, utilizando la tabla para valores reales. Considerando la simetría que presenta el gráfico de una distribución normal estándar respecto a la media, la

tabla considera solo los valores positivos para z , cuya probabilidad es la misma para el caso de $P(Z \leq -z)$ respecto a la media, es decir $P(Z \leq -z) = 1 - P(Z \leq z)$.

CONTEXTO: El test para conocer coeficiente intelectual (C.I) utilizando en todo el mundo ha arrojado resultados que tras ser analizados tienen una distribución normal con media 100 puntos y desviación estándar 15 puntos. La puntuación obtenida encasilla los resultados en los siguientes tramos.

Tabla 19. Descripción del coeficiente intelectual con respecto al puntaje obtenido.

Descripción	Puntaje obtenido
Superdotado	130 o superior
Brillante	[120 - 130[
Inteligente	[110 - 120[
Normal	[90 - 110[
Poco inteligente	[80 - 90[
Limítrofe (Borderline o fronterizo)	[70 - 80[
Deficiencia mental superficial	[60 - 70[
Deficiencia mental media	[50 - 60[
Deficiencia mental profunda	50 o inferior

PREGUNTA: ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir a una persona al azar, esta posea un CI en el rango “Limítrofe”?

PLAN: ¿Qué datos necesitamos?

- Comprender la pregunta planteada.

- Definir la variable aleatoria con distribución normal y sus parámetros
- Determinar los rangos de valores en estudio.
- Transformar los valores de la variable en estudio a la forma estándar.
- Visualizar los valores transformados en la tabla de distribución normal estándar e identificar sus probabilidades acumuladas.
- Calcular las probabilidades solicitadas.

DATOS: El rango que clasifica el CI de alguien como “Limítrofe” es cuyo puntaje obtenido en el test es de 70 a 80 puntos, por ende, la probabilidad solicitada apuntará a ese tramo. Además, los parámetros de la distribución son $\mu = 100$ y $\sigma = 15$.

ANÁLISIS:

Parte 1: Se espera que los estudiantes identifiquen que la variable en estudio corresponde a una variable aleatoria continua que distribuye Normal. Se sugiere definir la variable aleatoria de la siguiente forma:

Sea X variable aleatoria donde
 X : Puntos obtenidos en el test de coeficiente intelectual
Con $X \sim N(100, 15^2)$

Parte 2: Se utilizará el intervalo de interés comprendido entre 70 y 80 puntos ya que corresponde al rango considerado “limítrofe”, esto considera entonces el cálculo de $P(70 \leq X \leq 80)$, como se observa de manera gráfica en la siguiente imagen:

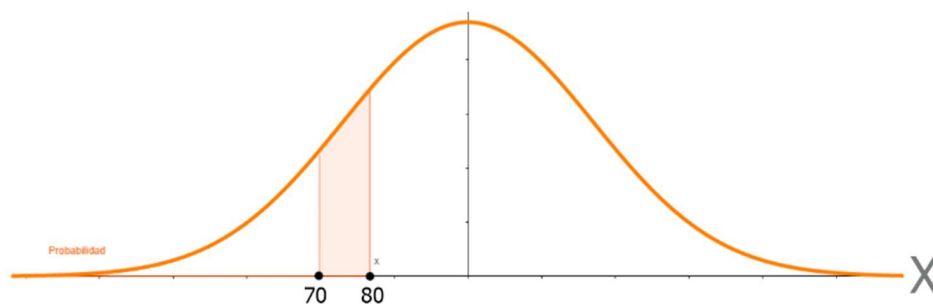


Figura 48.

Para calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar pertenezca al rango de interés, es necesario considerar los parámetros $\mu = 100$ y $\sigma = 15$ de la variable aleatoria y realizar la estandarización de los valores de la variable aleatoria $X_1 = 70$ y $X_2 = 80$ para obtener las nuevas variables Z_1 y Z_2 . La estandarización correspondiente se realiza de la siguiente forma:

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma} = \frac{70 - 100}{15} = \frac{-30}{15} = -2$$

$$Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma} = \frac{80 - 100}{15} = \frac{-20}{15} = \frac{-4}{3} = -1,3\bar{3}$$

Observando gráficamente se puede ver que el área bajo la curva corresponde al mismo que previo a la estandarización, como se observa en el siguiente gráfico.

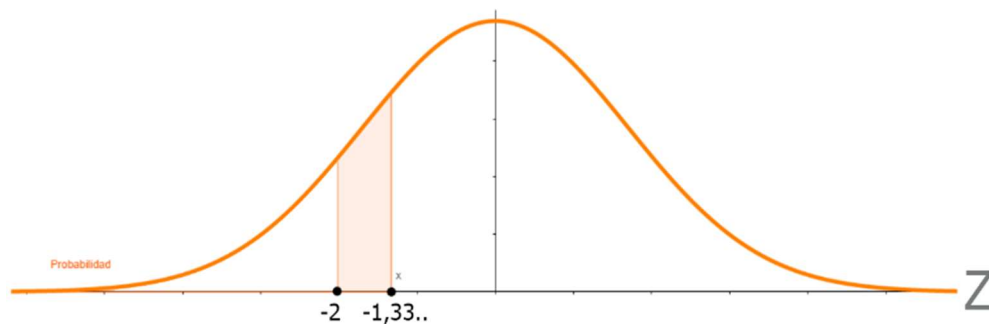


Figura 49.

De esta manera, comparando ambos gráficos, se desprende la siguiente igualdad:

$$P(70 \leq X \leq 80) = P(-2 \leq Z \leq -1, \bar{3})$$

Es posible calcular la probabilidad del intervalo $[-2; -1, \bar{3}]$ observando la probabilidad acumulada dada por la tabla asociada a la distribución normal estándar para $P(Z \leq z)$. Específicamente de la siguiente forma:

Para el valor de Z_1 se debe buscar el valor -2 a los costados de la tabla, como se mencionó anteriormente, las probabilidades arrojadas por la tabla son simétricas con respecto al 0, se considerará la siguiente igualdad:

$$P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2)$$

El valor de $Z_1 = -2$ se observa en el gráfico de densidad que se presenta a continuación:

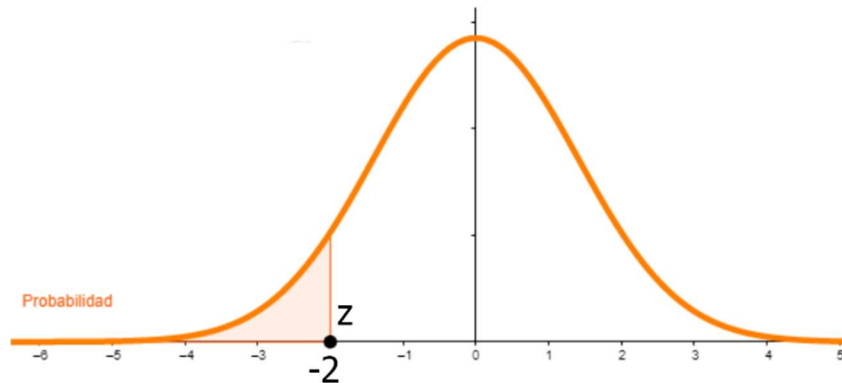


Figura 50.

Como la tabla adjunta muestra solo probabilidades del lado positivo se utilizará la propiedad mencionada. Se utilizará entonces el valor de:

$$P(Z \leq 2) = P(Z \leq 2,000) = 0.9772$$

Que se encuentra en el siguiente tramo de la tabla:

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	3,0
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	3,1
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	3,2
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	3,3
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	3,4
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	3,5
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	3,6
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	3,7
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	3,8
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	3,9

Nota al docente: La parte superior de la tabla adjunta indica los decimales de la variable aleatoria, en el caso anterior se utiliza el primer valor correspondiente al número entero.

Para el valor de Z_2 se debe buscar el valor $-1, \bar{3}$ a los costados de la tabla, como se mencionó anteriormente. Las probabilidades arrojadas por la tabla son simétricas con respecto al 0, se considerará la siguiente igualdad:

$$P(Z \leq -1, \bar{3}) = 1 - P(Z \leq 1, \bar{3})$$

El valor de $Z_2 = -1, \bar{3}$ se observa en el gráfico de densidad que se presenta a continuación:

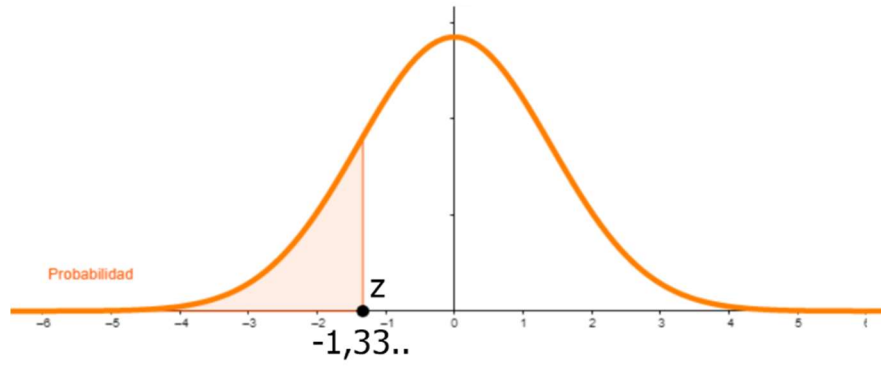


Figura 51.

Como la tabla adjunta muestra solo probabilidades del lado positivo se utilizará el valor de:

$$P(Z \leq 1, \bar{3}) = P(Z \leq 1,33) = 0,9082$$

Que se encuentra en el siguiente tramo de la tabla:

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	3,0
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	3,1
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	3,2
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	3,3
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	3,4
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	3,5
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	3,6
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	3,7
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	3,8
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	3,9

Parte 3: Considerando lo anterior, las probabilidades serán:

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 70) &= P(Z \leq -2) \\
 &= 1 - P(Z \leq 2) \\
 &= 0,0228
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 80) &= P(Z \leq -1, \bar{3}) \\
 &= 1 - P(Z \leq 1, \bar{3}) \\
 &= 0,0918
 \end{aligned}$$

Como la tabla arroja la probabilidad acumulada hasta el valor de la variable en estudio, se debe realizar la resta de las probabilidades acumuladas para obtener la probabilidad asociada al intervalo $[-2; -1, \underline{3}]$, es decir

$$\begin{aligned}P(70 \leq X \leq 80) &= P(X \leq 80) - P(X \leq 70) \\&= P(X \leq -1, \bar{3}) - P(X \leq -2) \\&= 0,0918 - 0,0228 \\&= 0,069\end{aligned}$$

Nota al docente: Se sugiere, luego de terminar el cálculo de la probabilidad solicitada, que el docente les plantee a los estudiantes una pregunta orientadora del tipo: ¿Se puede decir que existe la misma probabilidad de pertenecer al rango de “Inteligente” respecto al rango “límitrofe” ?, ¿Cómo se puede validar esa afirmación? Con el fin de fomentar el análisis y cálculo de probabilidades utilizando la función de densidad de distribución normal estandarizada, la gráfica y la tabla adjunta.

CONCLUSIONES:

- Para conocer la probabilidad entre dos valores del recorrido de la variable aleatoria continua se utilizará la igualdad $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$, pues no se puede realizar el cálculo de manera directa. Además, al considerar la simetría en el gráfico de la función de densidad de una distribución normal, ya sea tipificada o no, los cálculos para probabilidades siguen la siguiente igualdad $P(X \leq -a) = P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$, todo esto para facilitar los cálculos mediante la tabla de valores para $P(Z \leq z)$.
- Para el cálculo de una probabilidad asociada a una variable con Distribución Normal sin realizar el proceso de integración asociado a la función de densidad, es necesario considerar los parámetros de dicha distribución, para luego realizar la estandarización de los valores de la variable en estudio y así calcular las probabilidades necesarias a través de la utilización de la Tabla de Distribución Acumulada de la Variable Aleatoria Normal Estándar.

- Considerando la igualdad $P(70 \leq X \leq 79) = 0,058$ es posible responder a la pregunta planteada de la siguiente forma. La probabilidad de que una persona elegida al azar obtenga un puntaje de CI perteneciente al rango “límitrofe” es de aproximadamente 5,8%.

ACTIVIDAD N°4: CONVERGENCIA DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL A UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Objetivo de la actividad: Evidenciar la convergencia de la distribución binomial a una distribución normal con $np > 5$ y $nq > 5$ utilizando software educativo, de forma colaborativa.

CONTEXTO: En un parque de entreteniciones, hay un juego llamado “La Pirámide”, este consiste en lanzar poco a poco 100 canicas en un tablero, en cada piso la canica choca con un tope que determinará si la canica sigue su camino hacia la izquierda o a la derecha. Como se muestra en la siguiente imagen:

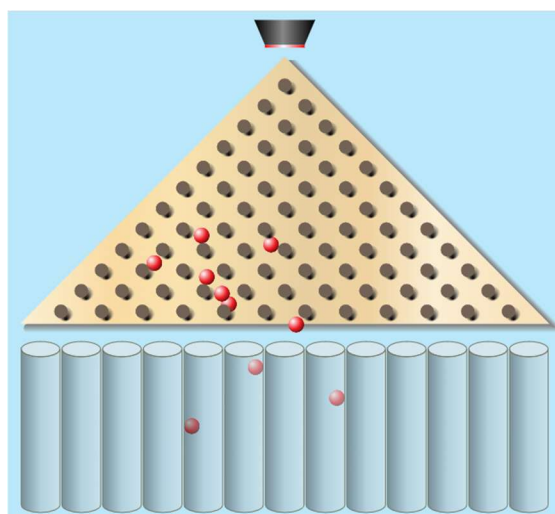


Figura 52.

Cada canica chocará con una cantidad de topes según el nivel de dificultad que elija el jugador. Existen tres niveles: el fácil incluye 9 pisos, el intermedio 16 pisos y el difícil 26 pisos. Finalmente, las canicas serán recolectadas en un bandejón agrupadas según el trayecto hecho por cada una, y se enumeran de izquierda a derecha de forma ascendente. A continuación, se muestra el juego de una manera más general:

Nota al docente: Para poder trabajar con el software y que los estudiantes puedan visualizar el juego, se sugiere ingresar al recurso digital “Plinko Probability” mediante el siguiente link:

https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_en.html

PREGUNTA: ¿Cómo es la distribución de las canicas en el bandejón final para cada nivel?

PLAN: ¿Qué datos necesitamos?

- Comprender el funcionamiento del juego.
- Utilizar las herramientas del juego para experimentar en cada nivel.
- Observar la distribución de las canicas en el bandejón final en cada nivel.
- Caracterizar la distribución de las canicas en el bandejón final para cada nivel realizando comparaciones entre niveles, fácil, medio y difícil.

DATOS: Reconocer el número de canicas que se utilizará en el juego, que en este caso será $n = 100$. Considerar las características de cada nivel, específicamente la cantidad de pisos que posee cada uno, que serán 9, 16 y 26 pisos. Es importante considerar que el número de pisos es equivalente al número de veces que la canica chocará con un clavo, es decir el número de veces que la canica podrá “ir a la derecha o ir a la izquierda”.

ANÁLISIS:

Parte 1: Los estudiantes abrirán el software “Plinko Probability”, a través del link enunciado en el contexto, luego deben seleccionar la vista “Intro”. Como se muestra en la siguiente imagen:

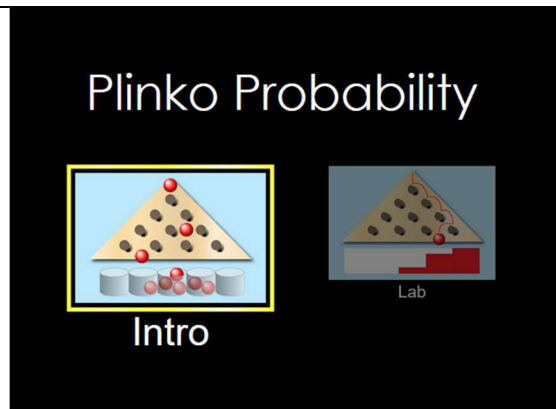


Figura 53.

Se sugiere que los estudiantes lancen 100 canicas para probar el juego sin considerar los niveles ni la cantidad de pisos que están predeterminados por la plataforma, para ello se sugiere lanzar 10 veces una cantidad de 10 canicas, utilizando el botón “x10” que se muestra a continuación.

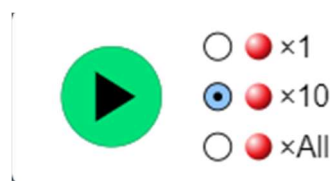


Figura 54.

Obteniéndose así una distribución de las canicas conforme a cien lanzamientos, que quedan explicitados de la manera $N = 100$, como se muestra en la siguiente imagen.

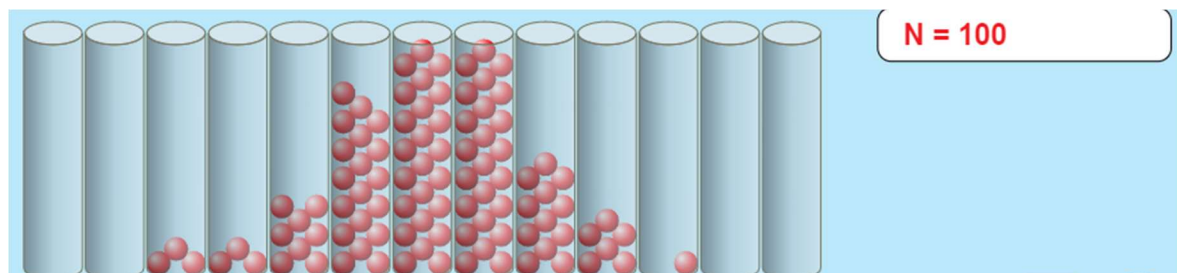


Figura 55.

Parte 2: Tras familiarizarse con el funcionamiento del juego y la plataforma, se procederá a realizar el experimento para cada uno de los tres niveles. Para esto, los estudiantes deben seleccionar la sección “Lab” en la parte inferior de la pantalla.



Figura 56.

Para determinar cada uno de los tres niveles que tiene el juego, la plataforma “Plinko Probability” presenta tres herramientas:

- Lanzamiento y cantidad de canicas: Allí es posible elegir lanzar las canicas de una en una o hacer un lanzamiento sin cuenta, los estudiantes irán lanzando conforme logren visualizar las cien canicas en el bandejón final, que saldrá en el panel de estadísticas.

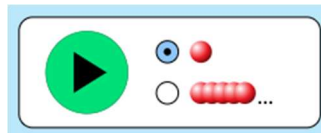


Figura 57.

- Cantidad de pisos y probabilidad: En este panel los estudiantes pueden seleccionar el número de pisos de la pirámide según cada nivel, por ejemplo, para el nivel intermedio deben mover en “Rows” el deslizador hasta el valor 16, como se muestra a continuación.

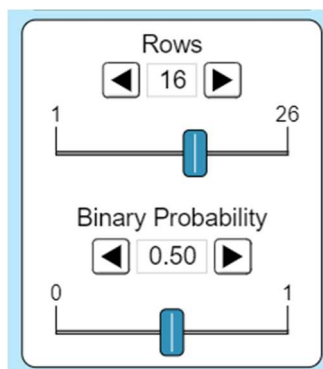


Figura 58.

Nota al docente: Es importante no mover el deslizador asociado a “Binary Probability” en esta actividad, pues indica la probabilidad de que las canicas vayan a la derecha o a la izquierda, por lo que al mover el deslizador las canicas podrán estar más cargadas hacia la derecha o a la izquierda, lo que altera el funcionamiento

justo e ideal del juego. Se sugiere orientar esta indicación para que los estudiantes consideren la equiprobabilidad en cada suceso.

- Panel de estadísticas: Esta herramienta permite mostrar los valores estadísticos asociados a la distribución de las canicas en el bandejón final, indicando la cantidad total, media y desviación estándar específicos del lanzamiento.

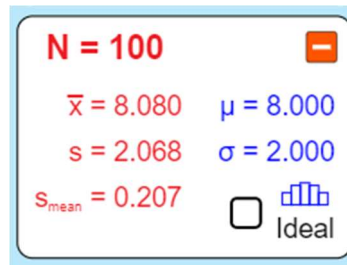


Figura 59.

Parte 3: Con lo anterior, ya conocidas todas las herramientas dentro de la plataforma, los estudiantes podrán observar las distribuciones que tendrá cada uno de los niveles.

- Para el **nivel fácil**, con 9 pisos, se espera que los estudiantes logren observar una distribución semejante a la siguiente:

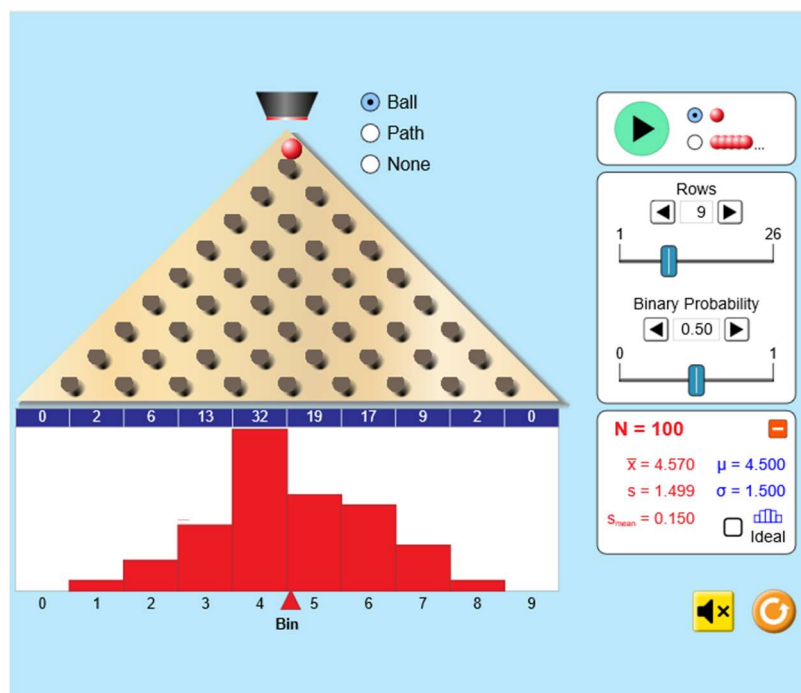


Figura 60.

A partir de esto, los estudiantes podrán caracterizar el lanzamiento asociado a dicho nivel, observando la forma que tienen las barras que representan el bandejón final y los valores estadísticos asociados que se presentan en el panel de estadísticas.

→ Para el **nivel medio** 16 pisos, se espera que los estudiantes logren observar una distribución semejante a la siguiente:

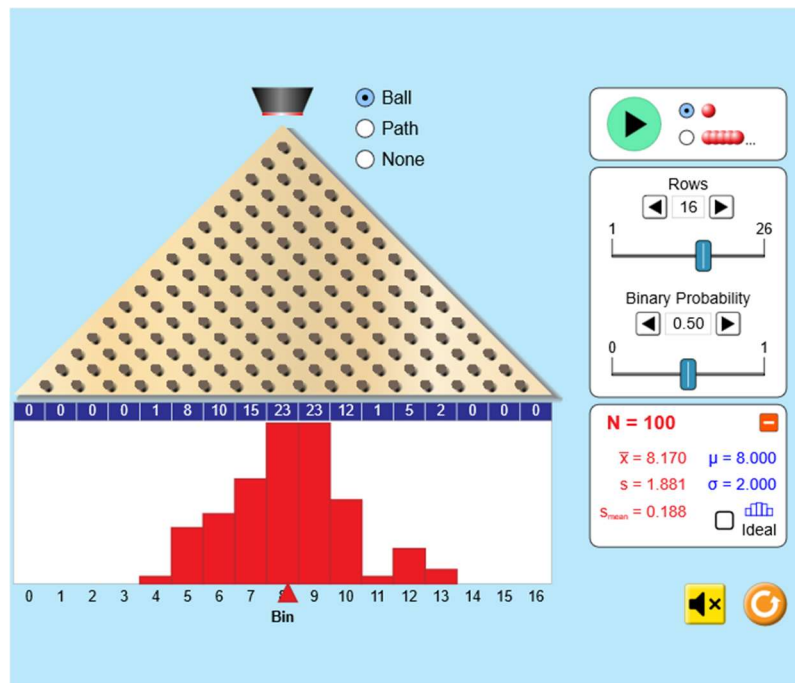


Figura 61.

→ Y finalmente para el nivel difícil, se espera que los estudiantes logren observar una distribución semejante a la siguiente:

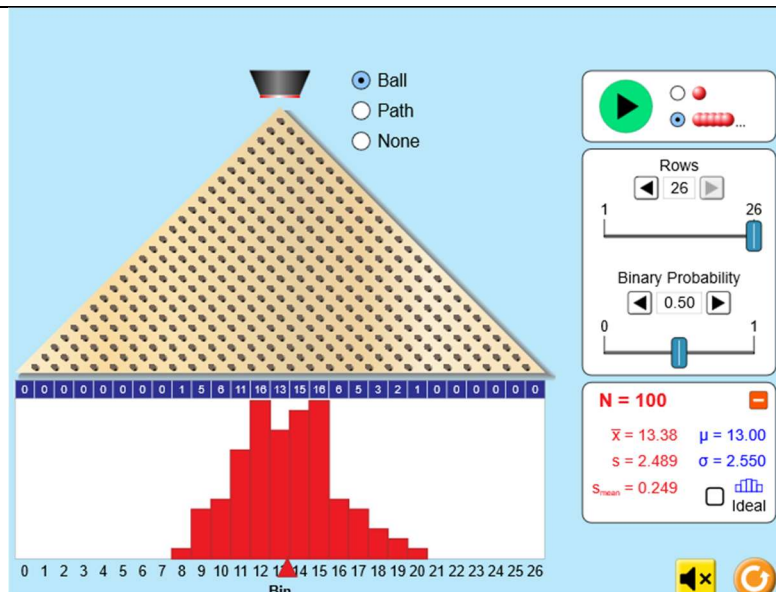


Figura 62.

Parte 4: Considerando las características obtenidas a partir de cada nivel del juego “La Pirámide”, se sugiere realizar una comparación en lo observado en los tres gráficos de distribución de canicas en el bandejón final, considerando los siguientes elementos:

- Relación entre los valores de la media y desviación estándar.
- Relación entre la distribución de las canicas, observando formas y cantidad en las que están depositadas en el bandejón final.

CONCLUSIONES:

- Para la comparación de las distribuciones por cada nivel del juego, se espera que los estudiantes puedan conjeturar que “mientras mayor cantidad de niveles”, la canica dentro del experimento logrará tener una mayor concentración del número de canicas al centro de la bandeja final.
- Es posible identificar el polígono de frecuencias en el conjunto de canicas recolectadas en la bandeja final para uno de los niveles, teniendo semejanza con la distribución ideal cuyo gráfico se acerca a una campana de Gauss.

- Además, el identificar la variable aleatoria con distribución binomial asociada al juego, que puede ser definida de la siguiente forma:

Sea X : Número de canicas que “van hacia la derecha” en 100 canicas.

Para comprender cómo actúa esta variable aleatoria en la realización del juego en cualquiera de los niveles, se sugiere lanzar una canica, pero en el modo “Path”, el cual mostrará la trayectoria de esta, y se podrá conocer cuántas veces “fue a la derecha” y cuántas “no fue a la derecha” (o “ir a la izquierda”)

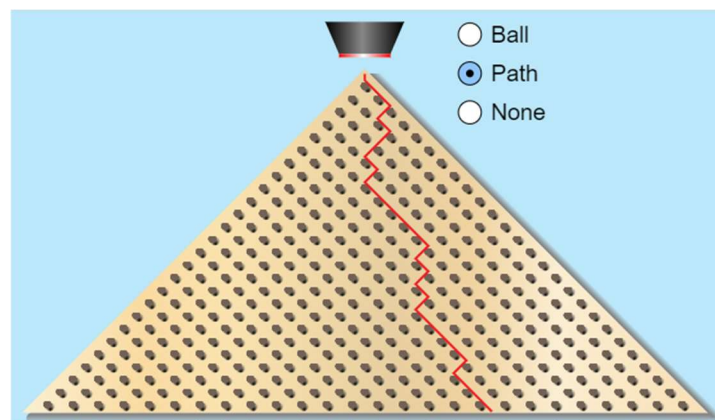


Figura 63.

- Es importante que, al identificar la variable aleatoria con distribución binomial presente en el juego, se pueda reconocer que dicho experimento se repite la cantidad de veces correspondiente al nivel de dificultad. Es decir, para el nivel fácil, el experimento “lanzar una canica y observar si va a la derecha o a la izquierda” se repite 9 veces, ya que cada canica podrá “ir a la derecha o la izquierda” en cada uno de los 9 pisos.
- Se puede concluir, que al repetir un experimento con distribución binomial con un “ n ” mayor que 30, se podrá visualizar una Distribución Normal, es decir, existe la convergencia de la Distribución Binomial a la Distribución Normal.

Nota al docente: Para poder mostrar con mayor claridad la aproximación que tiene la distribución de las canicas con el gráfico de la campana de Gauss se sugiere dejar caer una gran cantidad de bolitas e ir observando cómo se va formando.

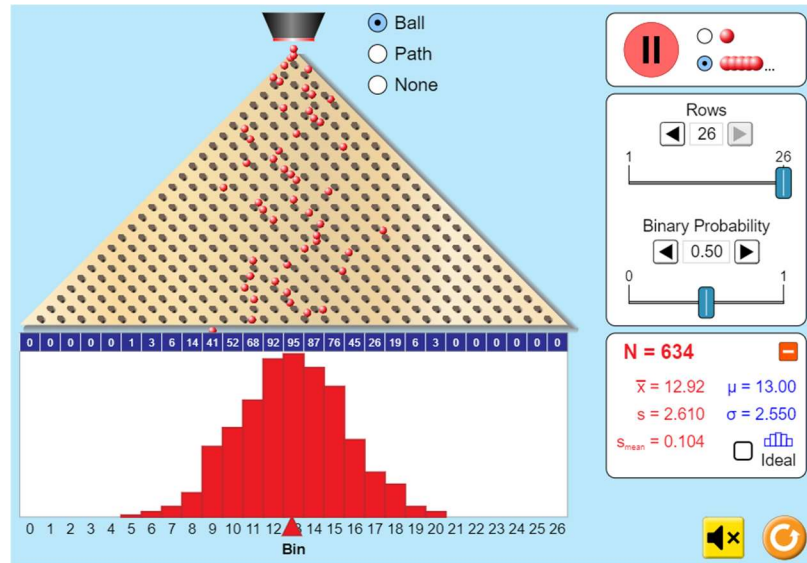


Figura 64.

Nota al docente: Se sugiere que para profundizar el análisis y comprensión de la aproximación que posee la distribución binomial a la distribución normal cuando $nq > 5$ o $np > 5$, el profesor solicite calcular la probabilidad de que una bolita caiga en la casilla 8 del bandejón central, utilizando la regla de Laplace y compararlo con la calculada mediante el ajuste normal, considerando los parámetros que considere pertinente según el nivel del juego “La Pirámide”.

Anexo 4. Lista de Cotejo para Retroalimentar Actividades.

Anexo 4.1 Lista de Cotejo

ACTIVIDADES PARA REVISIÓN

Primero que todo agradecemos enormemente su colaboración a la revisión de las actividades propuestas en nuestra tesina titulada “PROPUESTA DE SECUENCIACIÓN DE ACTIVIDADES PARA LA ENSEÑANZA DE CONTENIDOS A PARTIR DE LA ACTUALIZACIÓN DE LAS BASES CURRICULARES 2020 PARA EL EJE DE DATOS Y AZAR EN LOS NIVELES DE TERCERO Y CUARTO AÑO MEDIO PARA LA FORMACIÓN GENERAL”.

Instrucciones:

1. Leer la actividad completa, rellenar los datos correspondientes a esta y luego contesta la lista de cotejo presentada sobre la actividad.
2. Marcar la celda para cada indicador en la tabla de aspectos observables de la actividad.

Título de la actividad:		
Aspectos Observables		
Indicadores	Si	No
1. Considera que la actividad cumple el objetivo planteado.		
2. Las instrucciones de la actividad son claras, y por tanto podría aplicarse sin problemas.		
3. Considera útil la actividad para la enseñanza del contenido asociado.		
4. Recomendaría la actividad para la enseñanza del contenido asociado.		

5. Considera que la metodología y estructura utilizada favorece el aprendizaje de los estudiantes.		
Observación o Comentario:		

Anexo 4.2 Observaciones o Comentarios

N° de Actividad	Observación o Comentario
1	Se ve claramente cada uno de los pasos de la probabilidad condicionada, mostrando sus variables claras y con una redacción adecuada para el planteamiento del problema.
2	Muy escueto respecto al planteamiento, define excelentemente bien cada uno de los procesos, para probar la independencia de los sucesos.
3	Ayuda mucho una red de árbol, y en este caso, está muy bien confeccionado.
4	Se definen unas variables de forma inicial y en el diagrama de árbol se ocupa otra. Se recomienda utilizar la definida en el diagrama de árbol. E: el individuo está enfermo. S: el individuo está sano (no enfermo).
5	Es importante indicar el tiempo con el que se cuenta o se espera lograr el objetivo de la actividad. Como observación positiva, muy buenas las actividades, motivan a desarrollar habilidades construyendo el conocimiento, lo que es realmente importante en la educación de hoy.
6	No se emitió comentario u observación a la actividad.
7	Se debe tener presente la extensión de la actividad, el objetivo de ella y el tiempo con el que se cuenta. Quizás puede ser demasiado larga y con mucha especificidad para realizarlo en el tiempo de una clase, considerando todas las acciones extras que se deben llevar a cabo.

8	En “DATOS” confunde la palabra “obteniéndose”, se puede eliminar de la redacción. No queda tan claro que seleccionen “al azar” en la experiencia, tal vez ver una forma de favorecer una selección completamente random.
9	Masa y peso no son lo mismo físicamente, por ello, en la tabla no se debería hablar de pesos, como se expresa en este documento, sino que de la masa de los gatos. En la parte 4 dice que se pueden sumar las frecuencias relativas, pero ahí se presentan las frecuencias absolutas, por lo que no queda claro que se sumen de esa forma, porque se pueden sumar las frecuencias relativas y basta con ello o se pueden sumar las absolutas y dividir las por los casos totales.
10	Las actividades ayudan mucho a los profesores que tenemos debilidad en esta área, está muy bien explicado para no cometer errores en su aplicación y se pueden complementar muy bien con las clases de los contenidos a enseñar y los recursos son pertinentes, incluso se podría cambiar solo el contexto y cumpliría el objetivo de todas formas.
11	Me gustó mucho la actividad. Puede variar el contexto para replicar otros años.