UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA RECTA A TRAVÉS DE LA TEORÍA DE MODOS DE PENSAMIENTO PARA LOS ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

TESINA PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTORA:
CAMILA IVONNE ITURRA TAPIA

PROFESORA GUÍA:
CLAUDIA VALENZUELA GAETE

SANTIAGO DE CHILE, MARZO DE 2021

2021, Camila Iturra Tapia. Propuesta didáctica para la enseñanza de la recta a través de la teoría de modos de pensamiento para los estudiantes de pedagogía en matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación.

Dedico esta tesina a:

Mi hija Julieta Catalina,
quien me ha dado vida
(aunque diga que yo se la di a ella).

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi familia por apoyarme en esta decisión de ser profesora y por amar y cuidar tan bien a mi hija.

A mi profesora guía Claudia Valenzuela Gaete, por aceptar inmediatamente cuando le propuse acompañarme en este proceso y ser realmente una guía en todo este camino.

A mis amigos por apoyarme y creer siempre en mí.

Y a Dios por darme las fuerzas para continuar a pesar de todos los obstáculos que se presentaron.

Camila Ivonne Iturra Tapia.

INDICE

RESUMEN

La investigación abarca un estudio que se realizó a estudiantes de Pedagogía en Matemática de la UMCE sobre el concepto Recta. Esta investigación se construye en base a un enfoque cualitativo, puesto que el interés principal es el de conocer de qué manera se comprende aquel objeto matemático. Además, como marco teórico se utiliza la teoría Modos de Pensamiento y un cuestionario como diseño metodológico.

La problemática se justifica en el hecho de que la geometría siempre ha sido el área de la matemática en la que menos puntaje se obtiene en las pruebas estandarizadas (PSU, PDT y END). Se escogió la recta, puesto que es un concepto común desarrollado en las evaluaciones nombradas.

Por otro lado, se observa que este contenido se muestra y enseña principalmente de forma analítica dentro del currículum nacional y la UMCE. Es posible asegurar que esto no permite una real comprensión del concepto y es que, posicionándose en la teoría escogida, para que esto ocurra, se debe comprender la recta en los tres modos: Sintético-geométrico (gráfico que la representa en el plano), Analítico-aritmético (pares ordenados que satisfacen la ecuación de la recta) y Analítico-estructural (lugar geométrico de los puntos tales que, tomados dos cualesquiera, el valor de la pendiente siempre resulta constante).

En base a lo anterior, se desarrolla una propuesta didáctica que permite el tránsito entre los tres modos de pensamiento para comprender con profundidad el concepto de Recta.

PALABRAS CLAVES: Educación, Teoría de los modos de pensamiento, La Recta, Didáctica de la matemática, Chile.

ABSTRACT

The investigation includes a study that was carried out with students of Mathematics Pedagogy of the UMCE on the concept of Line. This investigation is built based on a qualitative approach, since the main interest is to know how that mathematical object is understood. In addition, as a theoretical framework, the Modes of Thought theory and a questionnaire are used as a methodological design.

The problem is justified by the fact that geometry has always been the area of mathematics in which the lowest score is obtained in standardized tests (PSU, PDT and END). The line was chosen, since it is a common concept developed in the named evaluations.

On the other hand, it is observed that this content is shown and taught mainly in an analytical way within the national curriculum and the UMCE. It is possible to assure that this does not allow a real understanding of the concept and it is that, positioning itself in the chosen theory, for this to happen, the line must be understood in the three ways: Synthetic-geometric (graph that represents it in the plane) , Analytical-arithmetic (ordered pairs that satisfy the equation of the line) and Analytical-structural (locus of points such that, taking any two, the value of the slope is always constant).

Based on the above, a didactic proposal is developed that allows the transit between the three modes of thought to understand in depth the concept of Line.

KEY WORDS: Education, Theory of the modes of thought, The Line, Didactics of mathematics, Chile.

INTRODUCCIÓN

El paso por la escolaridad chilena les otorga a los estudiantes una variada gama de aprendizajes y conocimientos en diferentes áreas. Específicamente en matemática, existen cuatro ejes temáticos que contribuyen a ello: Números, Álgebra, Geometría y Datos y Azar.

Ahora bien, al enfocarse específicamente en el área de la geometría (área de interés para esta investigación), se plantean temáticas referentes a la geometría euclidiana (o sintética), geometría analítica y geometría vectorial, las cuales se van desarrollando a lo largo de los 12 años obligatorios de escolaridad. Sin embargo, se observa que, durante todo el proceso, no existe una correlación entre estas 3 geometrías lo que no puede suceder ya que, como señala Gascón (2003) existe una continuidad y hasta complementariedad entre la geometría sintética y la geometría analítica. Pero se estudian por separado, lo que no ha cambiado a lo largo del tiempo.

Lo esencial en este sentido, es que a un mismo problema se puedan dar respuestas en base a la geometría sintética y geometría analítica en conjunto, como una forma de reforzar y/o ayudar al estudiante a construir una respuesta más completa y es que "*son precisamente las limitaciones de las técnicas sintéticas las que dan sentido (son las razones de ser) a las técnicas analíticas"* (Gascón, 2003). Es decir, no puede negarse que una es el complemento de la otra y es que también se señala que el previo uso y trabajo de las técnicas analíticas da paso a la aplicación de las técnicas sintéticas.

Y como es de esperarse, este déficit de complementariedad está presente en la Recta, que viene siendo nuestro objeto matemático de estudio.

Para justificar la elección de este objeto, es que se investigó en qué área de la matemática existe una dificultad en el aprendizaje por parte de los estudiantes y de los futuros docentes de matemática. Lo que pudo ser resuelto en base a los resultados obtenidos en la PSU (actual PDT) por estudiantes que finalizaron su etapa escolar y en la prueba END de matemática, prueba que se realiza a los futuros docentes de educación media. Luego, en ambas evaluaciones estandarizadas, se logró concluir que la geometría es un área que presenta conflictos y en ambas evaluaciones se encuentra presente el tema de Geometría Analítica, el cual es considerado como una base para entender muchos otros conceptos del área.

Desde la teoría de Modos de Pensamiento de Anna Sierpinska, se analiza la forma que tienen los futuros docentes para comprender el objeto matemático y si existe un claro tránsito entre los modos a través de los articuladores propuestos para la recta.

Para llevar a cabo este análisis, se realiza un cuestionario a futuros docentes de matemática de educación media de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. El cuestionario fue realizado en base a la teoría escogida y es que las preguntas fueron construidas con el objetivo de "obligar" a los encuestados a realizar el tránsito para responder. Inicialmente se presenta un análisis a priori, el cual muestra las posibles respuestas que pueden presentar los estudiantes al posicionarse en uno u otro modo. Luego, se presenta un análisis a posteriori, el que otorga toda la información sobre cómo respondieron los estudiantes y si fueron capaces de transitar o posicionarse eficazmente en los modos de pensar la recta. Para finalizar, se realiza una conclusión de todo lo visto en las respuestas dadas por los encuestados y se señalan sugerencias de actividades para abordar con los estudiantes y con los futuros docentes.

CAPÍTULO 1: PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Antecedentes de la investigación

Prueba de Selección Universitaria

El Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (DEMRE) es el organismo encargado de la realización de instrumentos de evaluación que permiten a los interesados el ingreso a la Educación Superior.

La Prueba de Selección Universitaria (PSU) es una evaluación creada por el DEMRE, la cual tiene por objetivo "*la selección de postulantes a la Educación Superior, se elabora sobre la base del currículum vigente, específicamente en Objetivos Fundamentales (OF) y Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) del plan de formación general de 4 sectores de aprendizaje: Lenguaje y Comunicación, Matemática, Historia, Geografía y Ciencias Sociales y Ciencias Naturales (Biología, Física y Química), en función de la noción de referencia curricular.*" (MINEDUC, 2018)

En caso particular, la prueba de Matemática tiene como base el razonamiento matemático. Está conformada por cuatro Ejes Temáticos (Números, Álgebra, Geometría y Datos y Azar) y por 80 preguntas, de las cuales 75 son consideradas para el cálculo del puntaje y las otras 5 son de carácter experimental. Todas las preguntas son de naturaleza de selección múltiple con cinco opciones y corresponden a preguntas de respuesta simple, combinadas y de suficiencia de datos.

Cabe destacar que para el caso de la admisión del 2021 se creó un instrumento de evaluación llamado **Pruebas de Transición** (PDT). Este instrumento se elaboró con el objetivo de nivelar hacia una futura Prueba de Acceso debido al contexto actual nacional. En base a lo anterior, los contenidos a evaluar en esta prueba se redujeron a un tercio de los que se estaban evaluando anteriormente. Además, el DEMRE en conjunto con el MINEDUC, estipularon que debido a la emergencia por COVID-19 se debía realizar un ajuste a los temarios para una priorización de los contenidos de IV Medio que resultan fundamentales para la educación superior.[1]

[1] Ante la necesidad de conocer mejor los cambios que se realizaron, visitar el siguiente enlace que proporciona DEMRE con una tabla comparativa. https://demre.cl/documentos/2020-07-03-tabla-comparativa-procesos-2020-2021.pdf

A continuación, se presentan los contenidos que se evaluaron en el proceso de admisión 2020 (PSU) y admisión 2021 (PDT):

Contenidos de la PSU (Eje temático: Geometría)

NIVEL	GEOMETRÍA POSICIONAL Y MÉTRICA	GEOMETRÍA POSICIONAL
Iº MEDIO	• Identificación del plano cartesiano y su uso para representar puntos y figuras geométricas manualmente. • Notación y representación gráfica de vectores en el plano cartesiano y aplicación de la suma de vectores para describir traslaciones de figuras geométricas. • Formulación de conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de traslaciones, reflexiones y rotaciones sobre figuras geométricas en el plano cartesiano y verificación, en casos particulares, de dichas conjeturas. Aplicación de la composición de funciones a las transformaciones isométricas.	• Relación del concepto de congruencia de figuras planas con las transformaciones isométricas; formulación y verificación de conjeturas, en casos particulares, acerca de criterios de congruencia en triángulos; y, utilización de estos criterios en la resolución de problemas y en la demostración de propiedades en polígonos.
IIº MEDIO	• Identificación de ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia; demostración del teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la del correspondiente ángulo inscrito.	• Exploración de diversas situaciones que involucran el concepto de semejanza y su relación con formas presentes en el entorno. • Identificación y utilización de criterios de semejanza de

		triángulos para el análisis de la semejanza en diferentes figuras planas. • Aplicación del teorema de Thales sobre trazos proporcionales. División interior de un trazo en una razón dada y verificar relaciones en casos particulares. • Demostración de los teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad de trazos en el triángulo rectángulo; demostración del teorema de Pitágoras y del teorema recíproco de Pitágoras. • Aplicación de la noción de semejanza a la demostración de relaciones entre segmentos en cuerdas y secantes en una circunferencia y a la homotecia de figuras planas.
III° MEDIO	• Deducción de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano y su aplicación al cálculo de magnitudes lineales en figuras planas. • Determinación de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. • Deducción e interpretación de la pendiente y del intercepto de una	• Descripción de la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar; visualizar las relaciones que se producen al desplazar figuras homotéticas en el plano.

	recta con el eje de las ordenadas y la relación de estos valores con las distintas formas de la ecuación de la recta. • Análisis gráfico de las soluciones de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y su interpretación a partir de las posiciones relativas de rectas en el plano: condiciones analíticas del paralelismo, coincidencia y de la intersección entre rectas.	
IVº MEDIO	• Deducción de la distancia entre dos puntos ubicados en un sistema de coordenadas en tres dimensiones y su aplicación al cálculo del módulo de un vector. • Identificación y descripción de puntos, rectas y planos en el espacio; deducción de la ecuación vectorial de la recta y su relación con la ecuación cartesiana. • Formulación y verificación, en casos particulares, de conjeturas respecto de los cuerpos geométricos generados a partir de traslaciones o rotaciones de figuras planas en el espacio. • Resolución de problemas sobre áreas y volúmenes de cuerpos	

	generados por rotación o traslación de figuras planas.	

Tabla N°1. Fuente: DEMRE 2019. Elaboración propia.

<u>Contenidos de la PDT (Eje temático: Geometría)</u>

UNIDADES TEMÁTICAS	**DESRIPCIÓN**
Transformaciones isométricas	• Puntos y vectores en el plano cartesiano. • Rotación, traslación y reflexión de figuras geométricas. • Problemas que involucren rotación, traslación y reflexión en diversos contextos.
Semejanza, proporcionalidad y homotecia de figuras planas	• Conceptos y criterios de semejanza. • Modelos a escala. • Problemas que involucren semejanza en diversos contextos. • Problemas que involucren el Teorema de Thales en diversos contextos. • Concepto y propiedades de homotecia. • Problemas que involucren homotecia en diversos contextos.
Geometría analítica en 2D	• Distancia entre dos puntos. • Ecuación de una recta. • Pendiente de una recta e intercepto de esta con el eje de la ordenada. • Posiciones relativas de dos rectas en el plano cartesiano. • Problemas que involucren rectas en el plano cartesiano en diversos contextos.

Tabla N°2. Fuente: DEMRE 2020. Elaboración propia.

Cabe destacar que, para efectos de esta investigación se utilizará la Prueba de Selección Universitaria, debido a que cuando se generó esta investigación, aún no se realizaba la primera PDT (admisión 2021).

Evaluación Nacional Diagnóstica

A través del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP), el Ministerio de Educación fomentó la ejecución de la prueba END con el objetivo de entregar información a las universidades formadoras del país sobre los contenidos pedagógicos y disciplinarios que debiesen manejar sus estudiantes al finalizar la formación inicial docente; beneficiándolas así para la toma de decisiones o para realizar mejoras en sus programas, si es que fuese requerido.

En la confección de esta prueba fue utilizado el currículum nacional, en específico las bases curriculares de 2009, para construir **los estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media**, los cuales otorgan un indicio de los conocimientos mínimos y habilidades que debiesen desarrollar los estudiantes de pedagogía en el ámbito de la pedagogía y la enseñanza de ésta.

Además, en los estándares orientadores (CPEIP, 2012) se manifiesta que "*la formación matemática contribuye a que los futuros profesores desarrollen su capacidad de confrontar y construir estrategias para resolver problemas y realizar un análisis crítico de diversas situaciones concretas, incorporando formas habituales de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la aplicación y el ajuste de modelos, la flexibilidad para modificar puntos de vista ante evidencias, la precisión en el lenguaje y la perseverancia en la búsqueda de soluciones*."

Por su parte, los estándares se presentan organizados en torno a cinco áreas temáticas: Sistemas Numéricos y Álgebra, Cálculo, Estructuras Algebraicas, Geometría y Datos y Azar. Como esta investigación se basa en la enseñanza de la Geometría, solo abordaremos los estándares de dicha área temática.

Estándares Orientadores de Geometría

Es necesario aclarar, que dentro del documento oficial del CPEIP, los estándares del área de la Geometría se desarrollan con los números del 11 al 16 debido al orden que se manifiesta en la formulación de los estándares.

Estándar 11	Es capaz de conducir el aprendizaje de los conceptos elementales de la Geometría.
Estándar 12	Es capaz de conducir el aprendizaje de transformaciones isométricas y homotecias de figuras en el plano.
Estándar 13	Es capaz de conducir el aprendizaje de los estudiantes en temas referidos a medida de atributos de objetos geométricos y el uso de la trigonometría.
Estándar 14	Es capaz de conducir el aprendizaje de la Geometría analítica plana.
Estándar 15	Es capaz de conducir el aprendizaje de la Geometría del espacio usando vectores y coordenadas.
Estándar 16	Comprende aspectos fundantes de la Geometría euclidiana y algunos modelos básicos de geometrías no euclidianas

Tabla N°3. Fuente: CPEIP 2019. Elaboración propia.

Cabe destacar, que para cada estándar se asocian indicadores que dan cuenta de cuándo se ve manifestado dicho estándar. En la siguiente tabla se muestra la cantidad de indicadores existentes para los seis estándares mencionados anteriormente.[2]

N° Estándar	Cantidad de indicadores asociados
11	16
12	15
13	18
14	13
15	14
16	6

[2] Cada uno de los indicadores se pueden obtener visitando el siguiente enlace creado por el CPEIP. https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2019/03/Est%C3%A1ndares_Media.pdf

Tabla N°4. Fuente: CPEIP 2019. Elaboración propia.

Programas de Estudio. Currículum Nacional

Ahora bien, al adentrarse en lo que estipulan los Programas de Estudio, lo primero que se debe mencionar es que debido al contexto nacional (COVID-19), el Ministerio de Educación (MINEDUC) ha decidido impulsar una Priorización Curricular sobre el currículum vigente.

> *"La Priorización Curricular es un marco de actuación pedagógica, que define objetivos de aprendizaje, secuenciados y adecuados a la edad de los estudiantes, procurando que puedan ser cumplidos con el máximo de realización posible en las circunstancias en que se encuentra el país. Considerando el hecho de que todavía no es posible determinar con precisión el tiempo en el que podrá desarrollarse el año escolar se adoptaron criterios flexibles sobre el plan de estudio y evaluación que permitan optimizar los procesos educativos"* (MINEDUC, 2020)

Para la construcción de esta priorización, MINEDUC (2020) plantea que se seleccionaron unos determinados criterios, entre los cuales se encuentra el mantener un equilibrio entre los objetivos de los diferentes ejes curriculares; además los objetivos priorizados siguen una línea de coherencia la cual responde a una progresión de objetivos en el ciclo, los cuales facilitan el aprendizaje.

Para una mejor organización de la Priorización Curricular, es que se han creado dos niveles para cada grado: El **nivel 1** que corresponde a los **objetivos imprescindibles**, los que son catalogados como esenciales para el avance del aprendizaje de los estudiantes. Por otro lado, está el **nivel 2**, que corresponde a los **objetivos priorizados**, estos son los que se consideran integradores y significativos, es decir, que al adquirir estos aprendizajes los estudiantes podrán integrarse como sujetos activos dentro de la sociedad y sus desafíos.

Es necesario mencionar que esta nueva herramienta de apoyo curricular es opcional para ser implementada en los establecimientos y que además tiene una duración hasta el año 2022, para luego dar paso a la utilización del currículum anterior vigente.

Ahora bien, al enfocarse en la investigación que se ha llevado a cabo, y si se busca dentro del Programa de Estudio de matemática lo que se plantea como objetivo para este contenido, en el nivel de octavo básico se encuentra el siguiente objetivo de aprendizaje:

"MA08 OA 07: *Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: Utilizando tablas. Usando metáforas de máquinas. Estableciendo reglas entre x e y. Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de venn), de manera manual y/o con software educativo." (MINEDUC, 2016)*

Es necesario destacar, que el objetivo descrito anteriormente, se encuentra dentro del nivel 2 de la priorización curricular planteado por el Ministerio de Educación.

Definición del problema de investigación

Con respecto a lo planteado anteriormente es que surge la siguiente interrogante:

Pregunta de investigación

¿Los estudiantes de Pedagogía en Matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación comprenden en profundidad el concepto de Recta?

Justificación de la investigación

Textos escolares

Siguiendo en la misma línea de lo planteado en los antecedentes, y si se profundiza más en la búsqueda dentro de los documentos que otorga el MINEDUC, se encuentran los textos escolares. Estos buscan fomentar una garantía de oportunidades de aprendizajes de calidad para la totalidad de los educandos, independiente de la condición social, económica o territorial. (Superintendencia de Educación, 2012)

Por otro lado, este instrumento se transforma en un complemento a la hora del proceso enseñanza-aprendizaje que se genera en las aulas. También se le facilita uno a los docentes que corresponde a una guía didáctica que sirve de ayuda en el proceso mencionado anteriormente. Cabe destacar, además, que se cuenta con un cuadernillo de actividades, el cual sirve a los estudiantes como modo de ejercitación de los contenidos vistos recientemente.

El concepto de recta como tal no se enseña en este nivel debido a que, se relaciona inicialmente con la función lineal. Este contenido, se ve plasmado en el texto de matemática para los estudiantes de octavo básico en la unidad 2, correspondiente a la Lección 3: “La función”. Esta tiene como objetivo comprender el concepto de función y conocer la función lineal y afín y sus representaciones. (MINEDUC, 2019)

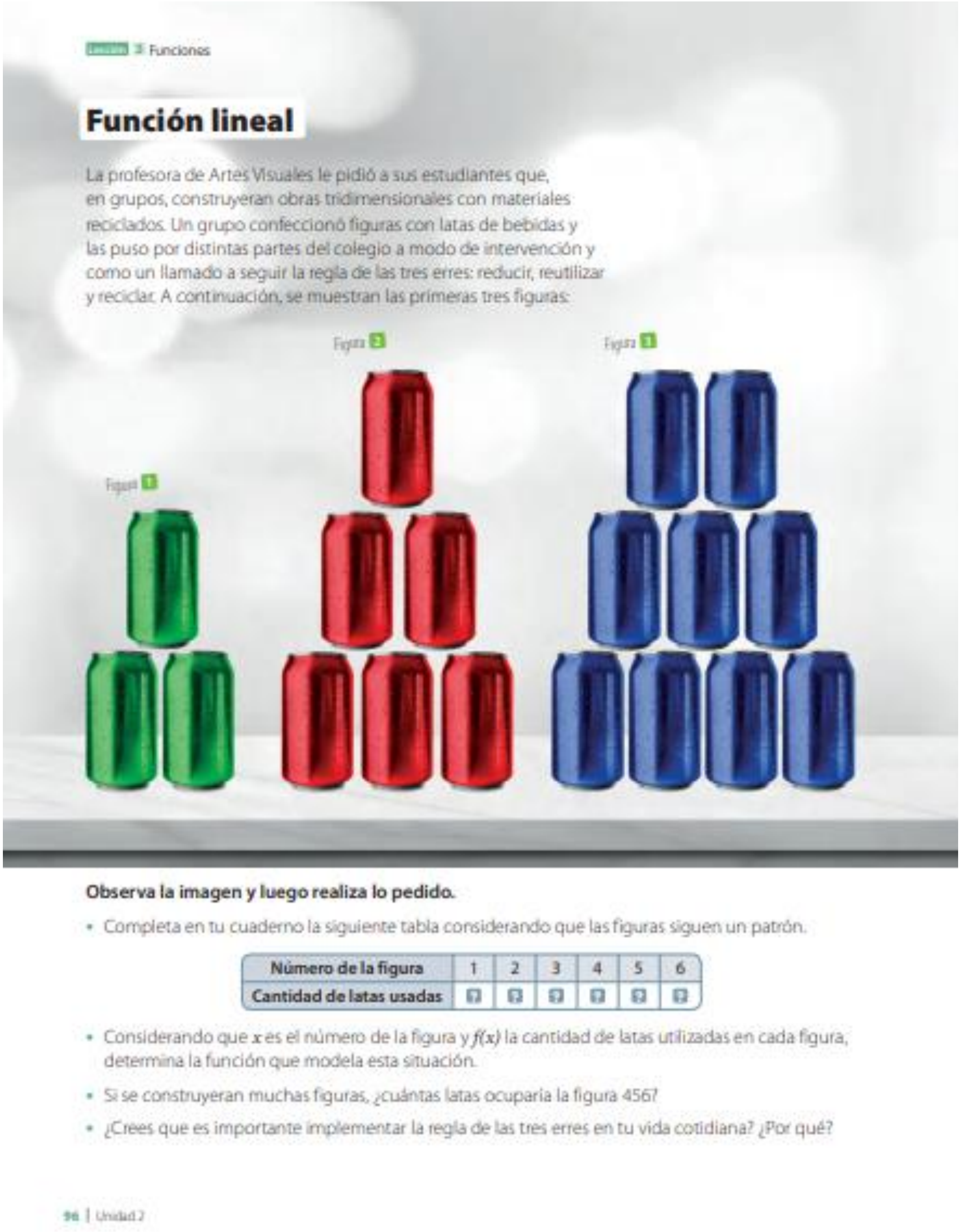
A continuación, se presentan imágenes con el lineamiento sugerido para enseñar el concepto de recta, junto con actividades que ayudan a ejercitar lo visto.

Como se dijo anteriormente, se inicia revisando el concepto de función y los elementos que la conforman (variable independiente y variable dependiente, imagen y preimagen, etc.), además de presentar al gráfico, la expresión algebraica y la tabla de valores como formas de representarla. Mediante una situación introductoria y una selección de ejercicios que ponen en práctica lo visto. Cuando ya es tiempo de estudiar el concepto de función lineal, el texto del estudiante [3] propone la siguiente secuencia:

Con el fin de conocer cuál es la sugerencia de inicio al contenido de *función lineal*, se puede hallar que, a modo de introducir el contenido, el texto plantea una actividad de problematización, con la cual se espera que las y los estudiantes puedan responder activando sus conocimientos previos.

El ejercicio en cuestión abarca una situación con un contexto interesante para los educandos, puesto que, al ser una situación donde una docente propone una actividad a sus estudiantes, el contexto se vuelve más cercano o conocido para ellos.

[3] Texto del estudiante. Matemática 8° básico.


Lección 3 Funciones

Función lineal

La profesora de Artes Visuales le pidió a sus estudiantes que, en grupos, construyeran obras tridimensionales con materiales reciclados. Un grupo confeccionó figuras con latas de bebidas y las puso por distintas partes del colegio a modo de intervención y como un llamado a seguir la regla de las tres erres: reducir, reutilizar y reciclar. A continuación, se muestran las primeras tres figuras:

Figura 1 Figura 2 Figura 3

Observa la imagen y luego realiza lo pedido.

- Completa en tu cuaderno la siguiente tabla considerando que las figuras siguen un patrón.

Número de la figura	1	2	3	4	5	6
Cantidad de latas usadas	?	?	?	?	?	?

- Considerando que x es el número de la figura y $f(x)$ la cantidad de latas utilizadas en cada figura, determina la función que modela esta situación.
- Si se construyeran muchas figuras, ¿cuántas latas ocuparía la figura 456?
- ¿Crees que es importante implementar la regla de las tres erres en tu vida cotidiana? ¿Por qué?

96 | Unidad 2

La siguiente actividad propuesta por el texto escolar es el ejemplo 1. Este tiene por objetivo hallar la representación algebraica de la función lineal a través del razonamiento requerido para resolver un problema. Por lo que se presenta una situación junto a su resolución para que los estudiantes apliquen lo realizado, en ejercicios posteriores. Al finalizar este ejemplo, se presenta un cuadro con la información relevante para a resolución del problema, es decir, se menciona la forma que tiene la función lineal además de sus propiedades aditiva y homogénea.

En la misma página, se expone el ejemplo 2, el cual presenta una breve demostración de las propiedades mencionadas anteriormente.

2

Ejemplo 1

Se tiene un proyector que puede triplicar el tamaño de las letras de un documento según los requerimientos de los usuarios. Si se decide aumentar seis veces el tamaño original de las letras de un escrito, ¿cuál debe ser el aumento previo?

1. El tamaño original del documento se relaciona de manera directamente proporcional con el tamaño en la proyección, por lo tanto podemos representar la función que modela la proyección del documento.

$$f(x) = 3 \cdot x \longrightarrow \text{Función que triplica el tamaño de las letras.}$$

2. Si x representa el tamaño original de las letras y a el tamaño con el aumento previo para que en la proyección el tamaño sea 6 veces el del original, analizamos la siguiente igualdad:

$$f(a) = 6 \cdot x = 3 \cdot 2 \cdot x \;\blacktriangleright\; a = 2 \cdot x \longrightarrow \text{El doble del tamaño original de las letras.}$$

3. El tamaño original debe duplicarse para obtener una proyección en la que el tamaño de las letras sea 6 veces el original.

Aprende

Una **función lineal** f es una función que puede escribirse de la forma: $f(x) = m \cdot x$, con $m \neq 0$.

Una función lineal cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad aditiva: $f(x + z) = f(x) + f(z)$
- Propiedad homogénea: $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$, con $c \neq 0$.

Ejemplo 2

Se tiene la función f definida como $f(x) = 16 \cdot x$. Si a, b, c son números cualquiera, verifica que:

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$
$$f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$$

1. Calculamos el valor de $f(a + b)$ y $f(c \cdot x)$ aplicando propiedades numéricas.

$$f(a + b) = 16 \cdot (a + b) = \underbrace{16 \cdot a + 16 \cdot b}_{\text{Propiedad distributiva}} \qquad f(c \cdot x) = 16 \cdot (c \cdot x) = \underbrace{c \cdot (16 \cdot x)}_{\text{Propiedad asociativa}}$$

2. Calculamos $f(a) + f(b)$ y $c \cdot f(x)$.

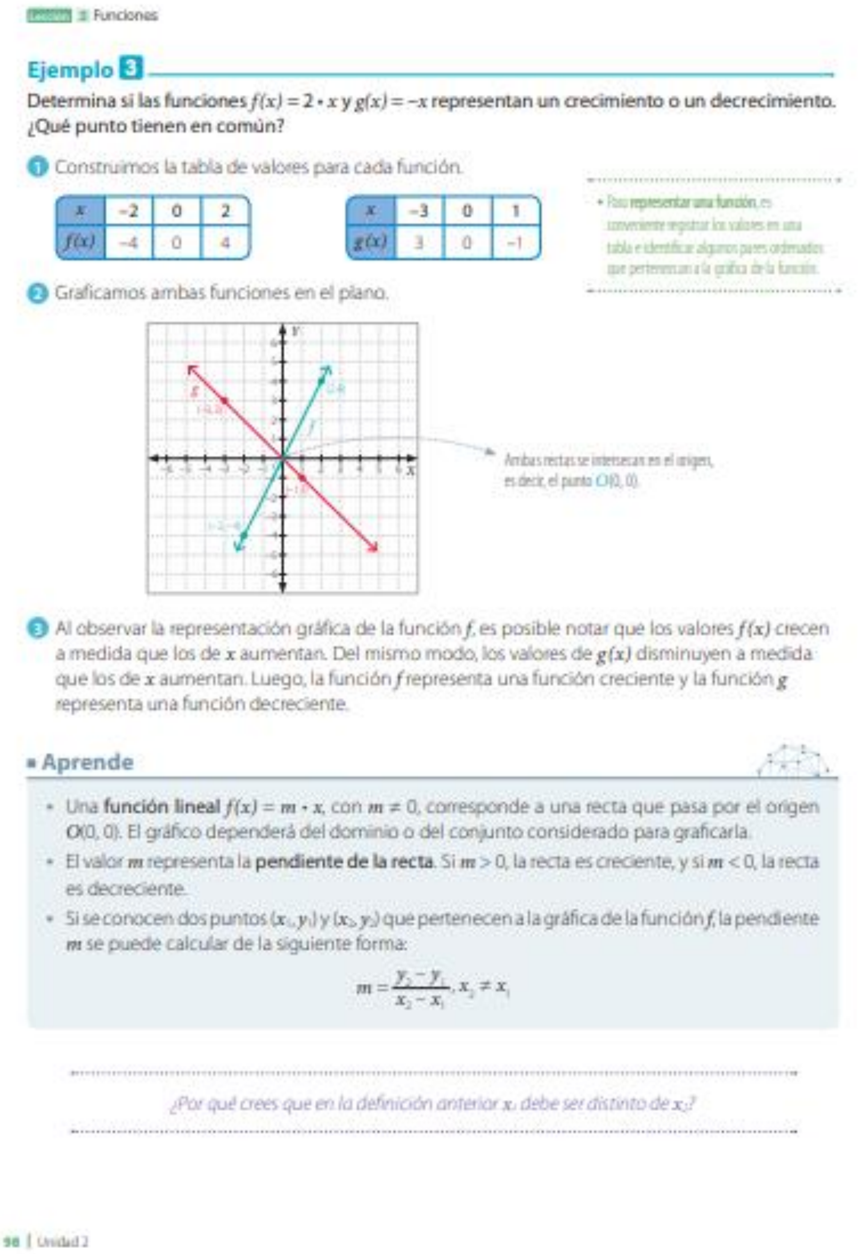
$$f(a) + f(b) = 16 \cdot a + 16 \cdot b$$
$$c \cdot f(x) = c \cdot (16 \cdot x)$$

3. Verificamos que los resultados obtenidos en 1 coincidan con los obtenidos en 2.

Luego, se cumple que $f(a + b) = f(a) + f(b)$ y que $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$.

Lección 3 • Funciones | 97

Por otra parte, en el ejemplo 3 que se presenta a continuación, se tiene un problema el cual tiene por objetivo determinar si una función es decreciente o creciente. Para ello, inicialmente se menciona que la manera conveniente de representar una función lineal es registrar los valores en una tabla y luego identificar algunos pares ordenados que pertenezcan a la gráfica de la función. Luego, y solo observando la imagen, se determina si las funciones decrecen o crecen. Además, en la misma página, se muestra la definición de función lineal y la forma algebraica de representarla; junto a esto se presenta la pendiente, haciendo énfasis en que con ella es muy útil determinar si una función crece o decrece. Asimismo, se presenta la ecuación para calcularla conociendo dos puntos de la gráfica.



Lección 2 Funciones

Ejemplo 3

Determina si las funciones $f(x) = 2 \cdot x$ y $g(x) = -x$ representan un crecimiento o un decrecimiento. ¿Qué punto tienen en común?

1 Construimos la tabla de valores para cada función.

x	−2	0	2
$f(x)$	−4	0	4

x	−3	0	1
$g(x)$	3	0	−1

- Para **representar una función**, es conveniente registrar los valores en una tabla e identificar algunos pares ordenados que pertenezcan a la gráfica de la función.

2 Graficamos ambas funciones en el plano.

Ambas rectas se intersecan en el origen, es decir, el punto O(0, 0).

3 Al observar la representación gráfica de la función f, es posible notar que los valores $f(x)$ crecen a medida que los de x aumentan. Del mismo modo, los valores de $g(x)$ disminuyen a medida que los de x aumentan. Luego, la función f representa una función creciente y la función g representa una función decreciente.

Aprende

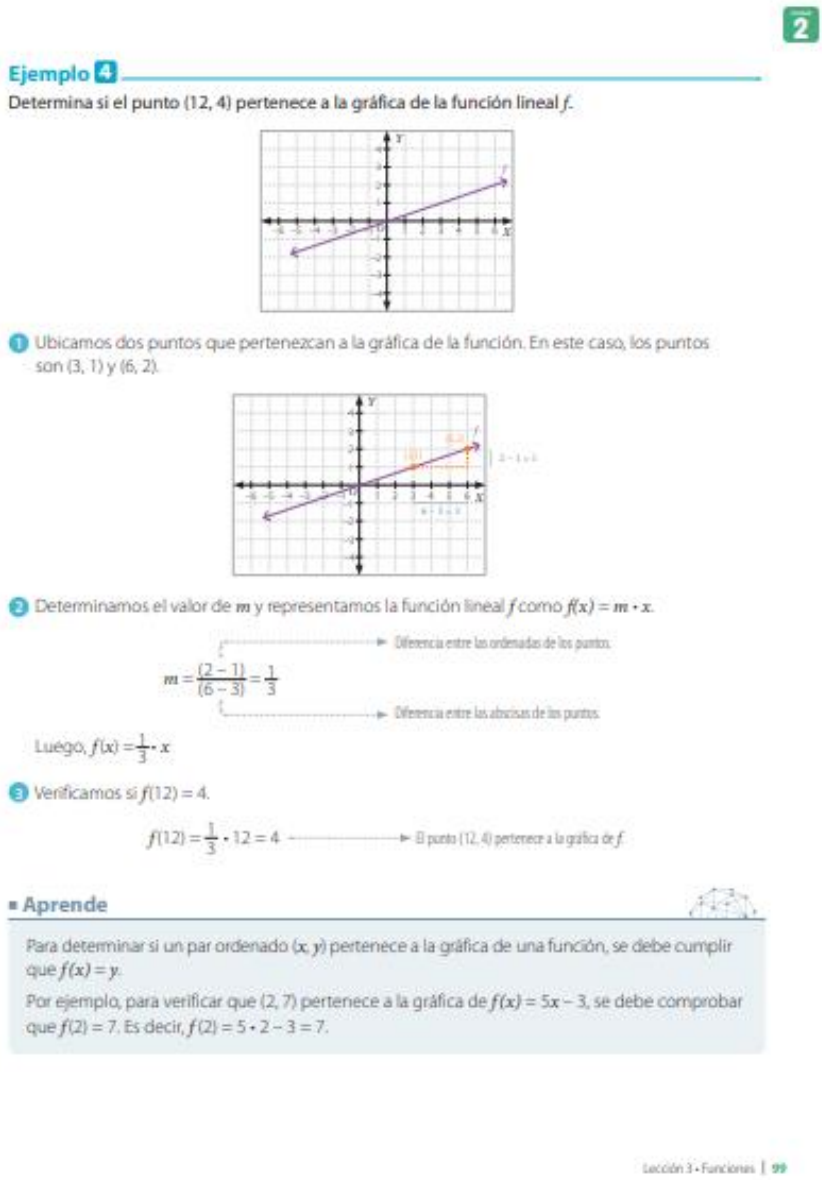
- Una **función lineal** $f(x) = m \cdot x$, con $m \neq 0$, corresponde a una recta que pasa por el origen O(0, 0). El gráfico dependerá del dominio o del conjunto considerado para graficarla.
- El valor m representa la **pendiente de la recta**. Si $m > 0$, la recta es creciente, y si $m < 0$, la recta es decreciente.
- Si se conocen dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que pertenecen a la gráfica de la función f, la pendiente m se puede calcular de la siguiente forma:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$$

¿Por qué crees que en la definición anterior x_1 debe ser distinto de x_2?

98 | Unidad 2

En el ejemplo 4 que se muestra en la siguiente imagen, se les pide a los estudiantes determinar si cierto punto pertenece a la gráfica de una función lineal dada. Para este caso, lo primero que muestra que se debe hacer es ubicar dos puntos cualesquiera que pertenezcan a la gráfica dada, luego se determina el valor de la pendiente empleando su ecuación y luego se representa la función lineal como $f(x) = m \cdot x$. Posterior a ello, se verifica si los puntos dados en el enunciado cumplen con ser parte de la función determinada; si es así, entonces los puntos pertenecen. Este procedimiento, se argumenta en 3 pasos y después de esto, se presenta de manera formal lo que se utilizó al resolver el ejemplo.


2

Ejemplo 4

Determina si el punto (12, 4) pertenece a la gráfica de la función lineal f.

1 Ubicamos dos puntos que pertenezcan a la gráfica de la función. En este caso, los puntos son (3, 1) y (6, 2).

2 Determinamos el valor de m y representamos la función lineal f como $f(x) = m \cdot x$.

$$m = \frac{(2-1)}{(6-3)} = \frac{1}{3}$$

Diferencia entre las ordenadas de los puntos.

Diferencia entre las abscisas de los puntos.

Luego, $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x$

3 Verificamos si $f(12) = 4$.

$f(12) = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ → El punto (12, 4) pertenece a la gráfica de f.

Aprende

Para determinar si un par ordenado (x, y) pertenece a la gráfica de una función, se debe cumplir que $f(x) = y$.

Por ejemplo, para verificar que (2, 7) pertenece a la gráfica de $f(x) = 5x - 3$, se debe comprobar que $f(2) = 7$. Es decir, $f(2) = 5 \cdot 2 - 3 = 7$.

Lección 3 • Funciones | 99

Para finalizar con este tipo de función y dar paso a la función afín, se plantean una selección de ocho problemas[4] para poner en práctica lo visto y/o aprendido.

[4] Para conocer estos problemas, revisar páginas 100 y 101 del texto del estudiante de 8vo básico.

Finalmente, y en base a lo expuesto anteriormente, es posible concluir que el texto ofrece una gama diversa de ejercicios para aprender y reforzar todo lo necesario con respecto a la función lineal, obteniendo formas de representarla (gráfico y ecuación) además de elementos importantes que la componen (pendiente, pares ordenados, propiedades) que son muy útiles a la hora de resolver problemas de este contenido.

Resultados evaluaciones estandarizadas

Al realizar diferentes búsquedas, se concluye que debe existir algún factor que incide en que el área de la geometría sea la más descendida por los estudiantes, significando así que es la que tiene más bajo rendimiento en evaluaciones estandarizadas por parte de los agentes que responden dichas evaluaciones.

Justificando esto, el DEMRE en sus *Publicaciones PSU N°19 del 2013 – Admisión 2014,* afirma que: *"De los cuatro Ejes Temáticos evaluados en la PSU de Matemática, Geometría es el que presenta, año a año, el menor porcentaje medio de respuestas correctas y el mayor porcentaje medio de respuestas omitidas (…)".*

Por otro lado, en la END 2018 y 2019[5], específicamente en la Prueba de Conocimientos Disciplinarios y Didácticos de Matemática, los resultados a nivel nacional fueron los siguientes:

[5] Se utilizan los datos de la END llevada a cabo estos años debido a que se suspende la realización de esta a los y las estudiantes de la cohorte 2020 debido al COVID-19.

Resultados 2018

Tema	Programa	% de Respuesta Correcta	Mediana	Mínimo Institucional	Máximo Institucional
Sistemas numéricos y álgebra	Regular	56,0%	54,2%	29,2%	69,9%
	Prosecución	53,2%	54,2%	45,5%	78,0%
Cálculo	Regular	56,5%	50,0%	25,0%	74,4%
	Prosecución	47,7%	50,0%	12,5%	70,0%
Estructuras algebraicas	Regular	61,8%	75,0%	25,0%	75,0%
	Prosecución	57,1%	50,0%	40,9%	100,0%
Geometría	Regular	44,4%	40,0%	6,7%	53,1%
	Prosecución	42,8%	40,0%	36,3%	64,0%
Datos y azar	Regular	50,4%	53,9%	23,1%	66,3%
	Prosecución	48,6%	46,2%	41,2%	84,6%

Tabla N°5. Fuente: Informe Nacional END-FID 2018. (CPEIP, 2018)

Se observa que el área con menor porcentaje de logro en el programa regular y de prosecución es Geometría con un 44,4% y un 42,8%, respectivamente.

Por otro lado, el tema que presenta mayor porcentaje de logro en ambos programas es Estructuras algebraicas, con un 61,8% en el programa regular y un 57,1% en el de prosecución.

Además, se puede observar en la siguiente tabla los resultados expresados en porcentajes de cada uno de los estándares evaluados en las preguntas de selección múltiple para las carreras de Pedagogía en Media – Matemática. Esta tabla muestra que el estándar que presenta menor porcentaje promedio en los estudiantes de programa regular y de prosecución pertenece al área de Geometría, el cual estipula que el estudiante "Es capaz de conducir el aprendizaje de la Geometría analítica plana", correspondiente al estándar 14, con un porcentaje de logro respectivo a 38,4% y 33,0%.

Estándar	Programa	% de Respuesta Correcta Nacional	Mínimo Institucional	Máximo Institucional
1. Es capaz de conducir el aprendizaje de los sistemas de numéricos N, Z, Q, R y C	Regular	48,9%	20,0%	63,1%
	Prosecución de estudios	52,1%	36,4%	80,0%
2. Es capaz de conducir el aprendizaje de las operaciones del álgebra elemental y sus aplicaciones a la resolución de ecuaciones e inecuaciones	Regular	59,9%	37,5%	73,1%
	Prosecución de estudios	57,1%	46,6%	80,4%
3. Es capaz de conducir el aprendizaje del concepto de función, sus propiedades y representaciones	Regular	60,9%	20,0%	80,0%
	Prosecución de estudios	58,0%	50,0%	90,0%
4. Demuestra competencia disciplinaria en álgebra lineal y es capaz de conducir el aprendizaje de sus aplicaciones en la Matemática escolar	Regular	52,5%	16,7%	70,8%
	Prosecución de estudios	44,8%	40,0%	69,0%
5. Es capaz de conducir el aprendizaje de los números reales, sucesiones, sumatorias y series	Regular	52,9%	0,0%	75,0%
	Prosecución de estudios	52,8%	25,0%	90,0%
6. Demuestra competencia disciplinaria en cálculo diferencial y aplicaciones	Regular	60,0%	0,0%	100,0%
	Prosecución de estudios	42,7%	0,0%	66,7%
8. Es capaz de conducir el aprendizaje de la divisibilidad de números enteros y de polinomios y demuestra competencia disciplinaria en su generalización a la estructura de anillo	Regular	61,8%	25,0%	75,0%
	Prosecución de estudios	57,1%	40,9%	100,0%
11. Es capaz de conducir el aprendizaje de los conceptos elementales de la Geometría	Regular	46,9%	11,1%	57,0%
	Prosecución de estudios	45,4%	39,4%	83,3%
12. Es capaz de conducir el aprendizaje de transformaciones isométricas y homotecias de figuras en el plano	Regular	41,5%	0,0%	58,3%
	Prosecución de estudios	42,0%	25,0%	64,3%
14. Es capaz de conducir el aprendizaje de la Geometría analítica plana	Regular	38,4%	0,0%	54,8%
	Prosecución de estudios	33,0%	0,0%	70,0%
17. Es capaz de motivar la recolección y estudio de datos y de conducir el aprendizaje de las herramientas básicas de su representación y análisis	Regular	50,8%	0,0%	68,8%
	Prosecución de estudios	53,5%	40,3%	100,0%
18. Es capaz de conducir el aprendizaje de las probabilidades discretas	Regular	61,2%	33,3%	100,0%
	Prosecución de estudios	58,7%	50,0%	100,0%
20. Está preparado para conducir el aprendizaje de la distribución normal y teoremas límite	Regular	52,6%	25,0%	66,7%
	Prosecución de estudios	45,3%	38,2%	66,7%
21. Está preparado para conducir el aprendizaje de inferencia estadística	Regular	40,4%	22,7%	68,8%
	Prosecución de estudios	39,7%	29,2%	100,0%

Tabla N°6. Fuente: Informe Nacional END-FID 2018. (CPEIP, 2018)

Resultados 2019

Tema	Programa	% de Respuesta Correcta	Mediana	Mínimo Institucional	Máximo Institucional
Sistemas numéricos y álgebra	Regular	52,3%	52,2%	21,3%	71,3%
	Prosecución	50,2%	47,8%	34,8%	76,8%
Cálculo	Regular	53,2%	50,0%	7,8%	78,6%
	Prosecución	44,3%	50,0%	25,0%	62,5%
Estructuras algebraicas	Regular	56,2%	50,0%	7,0%	83,3%
	Prosecución	54,2%	50,0%	0,0%	80,0%
Geometría	Regular	40,2%	42,8%	16,5%	59,5%
	Prosecución	40,2%	42,8%	30,4%	60,0%
Datos y azar	Regular	47,4%	46,2%	26,0%	61,2%
	Prosecución	44,0%	46,2%	19,2%	61,5%

Tabla N°7. Fuente: Informe Nacional END-FID 2019. (CPEIP, 2019)

Al igual que en la tabla de los resultados del 2018, se puede observar que el tema con menor porcentaje de logro en el programa regular y de prosecución es Geometría, con un 40,2% en cada uno de los programas.

Por otra parte, el área que presenta mayor porcentaje de logro en el programa regular y de prosecución es el de Estructuras algebraicas, obteniendo un 56,2% y un 54,2%, respectivamente.

Ahora bien, al analizar el promedio porcentual de logro de los estándares estipulados por el CPEIP y gracias a la tabla que se presenta a continuación, es que se puede afirmar que para el programa regular y el de prosecución el estándar 14 sigue siendo el que presenta un menor porcentaje de logro.

Estándar	Programa	% de Respuesta Correcta Nacional	Mínimo Institucional	Máximo Institucional
1. Es capaz de conducir el aprendizaje de los sistemas de numéricos N, Z, Q, R y C	Regular	46,4%	21,7%	64,2%
	Prosecución	48,1%	25,0%	75,0%
2. Es capaz de conducir el aprendizaje de las operaciones del álgebra elemental y sus aplicaciones a la resolución de ecuaciones e inecuaciones	Regular	54,8%	10,9%	83,3%
	Prosecución	49,4%	33,3%	83,3%
3. Es capaz de conducir el aprendizaje del concepto de función, sus propiedades y representaciones	Regular	59,0%	20,0%	77,3%
	Prosecución	57,2%	0,0%	86,7%
4. Demuestra competencia disciplinaria en álgebra lineal y es capaz de conducir el aprendizaje de sus aplicaciones en la Matemática escolar	Regular	47,5%	8,3%	72,7%
	Prosecución	46,8%	25,0%	69,4%
5. Es capaz de conducir el aprendizaje de los números reales, sucesiones, sumatorias y series	Regular	51,0%	7,8%	88,9%
	Prosecución	45,8%	0,0%	66,7%
6. Demuestra competencia disciplinaria en cálculo diferencial y aplicaciones	Regular	55,4%	7,8%	78,6%
	Prosecución	42,9%	25,0%	100,0%
8. Es capaz de conducir el aprendizaje de la divisibilidad de números enteros y de polinomios y demuestra competencia disciplinaria en su generalización a la estructura de anillo	Regular	56,2%	7,0%	83,3%
	Prosecución	54,2%	0,0%	80,0%
11. Es capaz de conducir el aprendizaje de los conceptos elementales de la Geometría	Regular	42,5%	12,5%	62,5%
	Prosecución	43,0%	28,1%	65,0%
12. Es capaz de conducir el aprendizaje de transformaciones isométricas y homotecias de figuras en el plano	Regular	38,4%	20,8%	66,7%
	Prosecución	39,6%	12,5%	50,0%
14. Es capaz de conducir el aprendizaje de la Geometría analítica plana	Regular	34,6%	0,0%	77,8%
	Prosecución	29,7%	0,0%	75,0%
17. Es capaz de motivar la recolección y estudio de datos y de conducir el aprendizaje de las herramientas básicas de su representación y análisis	Regular	50,7%	33,3%	88,9%
	Prosecución	46,2%	16,7%	66,7%
18. Es capaz de conducir el aprendizaje de las probabilidades discretas	Regular	57,3%	7,3%	77,8%
	Prosecución	50,3%	33,3%	77,8%
20. Está preparado para conducir el aprendizaje de la distribución normal y teoremas límite	Regular	49,7%	8,3%	70,6%
	Prosecución	45,6%	16,7%	66,7%
21. Está preparado para conducir el aprendizaje de inferencia estadística	Regular	35,6%	12,5%	50,0%
	Prosecución	36,6%	12,5%	75,0%

Tabla N°8. Fuente: Informe Nacional END-FID 2019. (CPEIP, 2019)

Junto con todas las tablas vistas anteriormente se suma la siguiente, en la cual se puede observar una comparación entre los porcentajes promedio de logro obtenidos a nivel institucional (UMCE) y a nivel nacional en el año 2019.

Tema	Promedio institución	Promedio nacional
Sistemas numéricos y álgebra	56,8%	51,9%
Cálculo	66,9%	51,3%
Estructuras algebraicas	68,4%	55,8%
Geometría	46,2%	40,2%
Datos y azar	58,1%	46,6%

Tabla N°9. Fuente: Informe Nacional END-FID 2019. Elaboración propia.

La tabla anterior muestra que, en ambos promedios, el menor porcentaje se obtuvo en el área de la geometría con un 46,2% en el porcentaje promedio de la UMCE y un 40,2% en el porcentaje promedio nacional. Asimismo, el que tuvo el mayor porcentaje promedio en ambos niveles fue "Estructuras algebraicas".

Al analizar las tres tablas que plantean un promedio porcentual de logro, se puede afirmar que todas presentan algo en común, y es que en cada una se refleja que el menor desempeño y manejo por parte de los estudiantes es el área de la Geometría. Caso contrario a lo que ocurre con el área de Estructuras algebraicas, ya que esta es la que presenta un mayor manejo entre los estudiantes.

Se concluye entonces, que en ambos instrumentos analizados el desempeño más bajo fue en el área de la geometría. Además, gracias a lo analizado anteriormente, se declara que, dentro de la geometría, el área más descendida en los estudiantes es la geometría analítica plana (análisis de los estándares asociados a END).

Por lo anterior, es que se hace necesario diseñar un modelo que se pueda implementar en los futuros docentes para una mejora en la enseñanza-aprendizaje de esta área y así obtener una comprensión profunda del objeto matemático escogido.

Programa de la carrera de Pedagogía en Matemática

En el año 1889 se fundó el Instituto Pedagógico para entregar formación a futuros docentes de la educación secundaria, este formaba parte de la Facultad de Filosofía, Humanidades y Bellas Artes de la Universidad de Chile. En 1981 se dio origen a un instituto llamado "Academia Superior de Ciencias Pedagógicas". Posteriormente, en 1985 esta academia recuperaría su carácter universitario convirtiéndose así en la actual Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. (UMCE, 2020)

Esta universidad tenía como objetivo fundamental el atender la docencia, la investigación y la extensión de las disciplinas relacionadas con la educación y la cultura. Ya para la década del 90' este propósito crece, y lleva a pensar en qué profesores debían formarse en sus aulas debido al constante cambio y desarrollo del país. (UMCE, 2020)

En la actualidad, la UMCE[6] define su identidad reafirmando el compromiso con la educación pública y los desafíos que deben ser enfrentados por la enseñanza y el aprendizaje en el siglo XXI. Es por lo que el desarrollo que se quiere generar en los estudiantes es de forma integral en su formación pedagógica y de especialidad. (UMCE, 2020).

Debido a todo lo anterior, es que se crearon variadas carreras de pedagogía para las diferentes disciplinas dentro de los establecimientos; una de ellas, la matemática. Esta carrera es en la cual se desarrollan diferentes habilidades y competencias matemáticas y pedagógicas en los estudiantes que eligen cursarla.

Los propósitos actuales del Departamento de Matemática se relacionan con los objetivos de la Facultad de Ciencias Básicas y con los objetivos de la UMCE. Estos propósitos, extraídos de la página de la universidad, son:

> *"- La formación de profesores en el ámbito de la Educación Matemática que se desempeñen exitosamente en el Sistema Nacional de Educación de manera creativa e innovadora.*
>
> *- El desarrollo de la investigación en el campo de la educación matemática.*

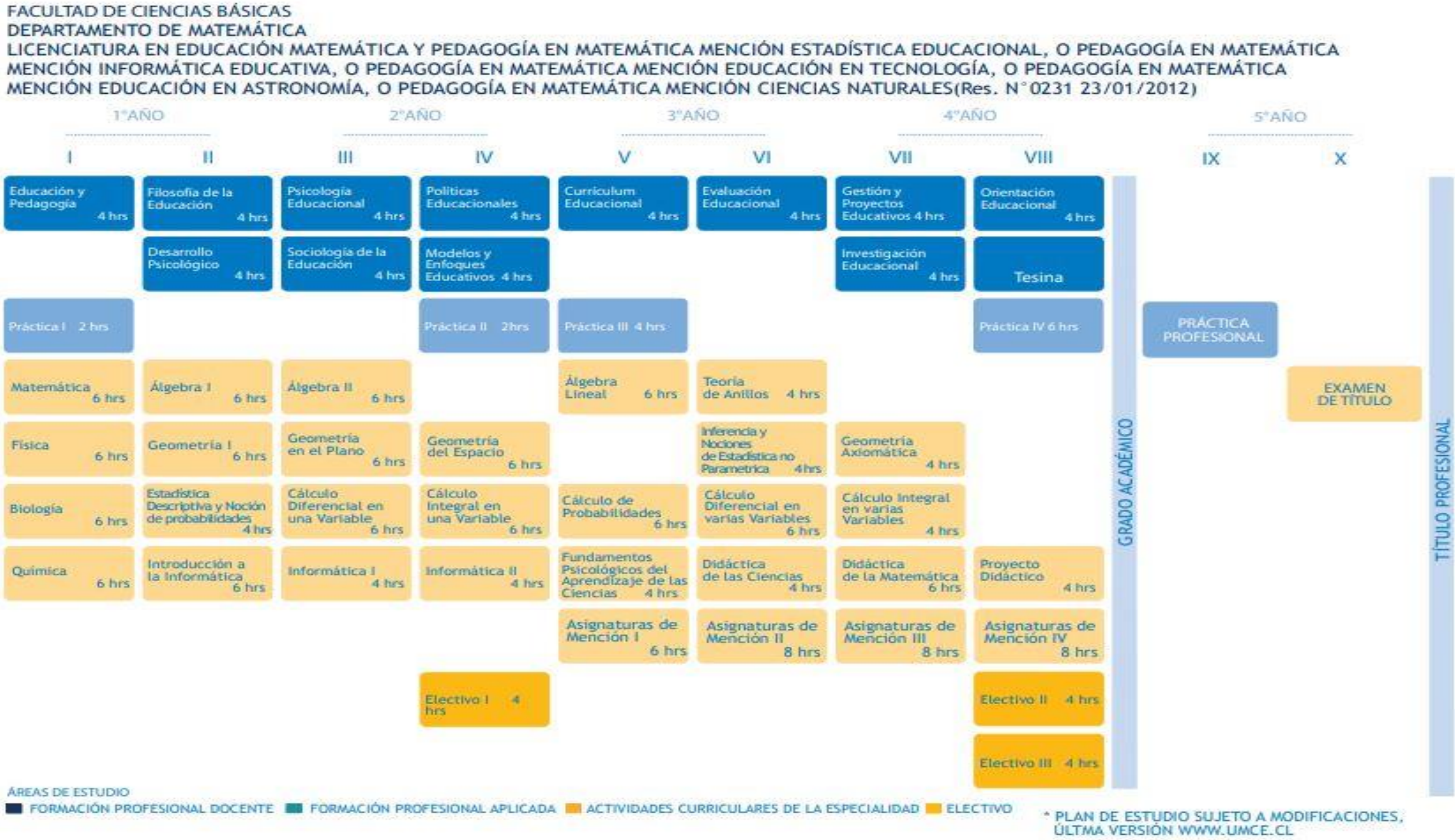
[6] Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación.

- *Vincular nuestro quehacer con el medio científico y educativo nacional e internacional a través de proyectos de investigación divulgación de la ciencia y la tecnología, proyectos de intervención educativa, memorias, seminarios de título, publicaciones, seminarios, cursos, asesorías, talleres y otros."* (UMCE, 2018)

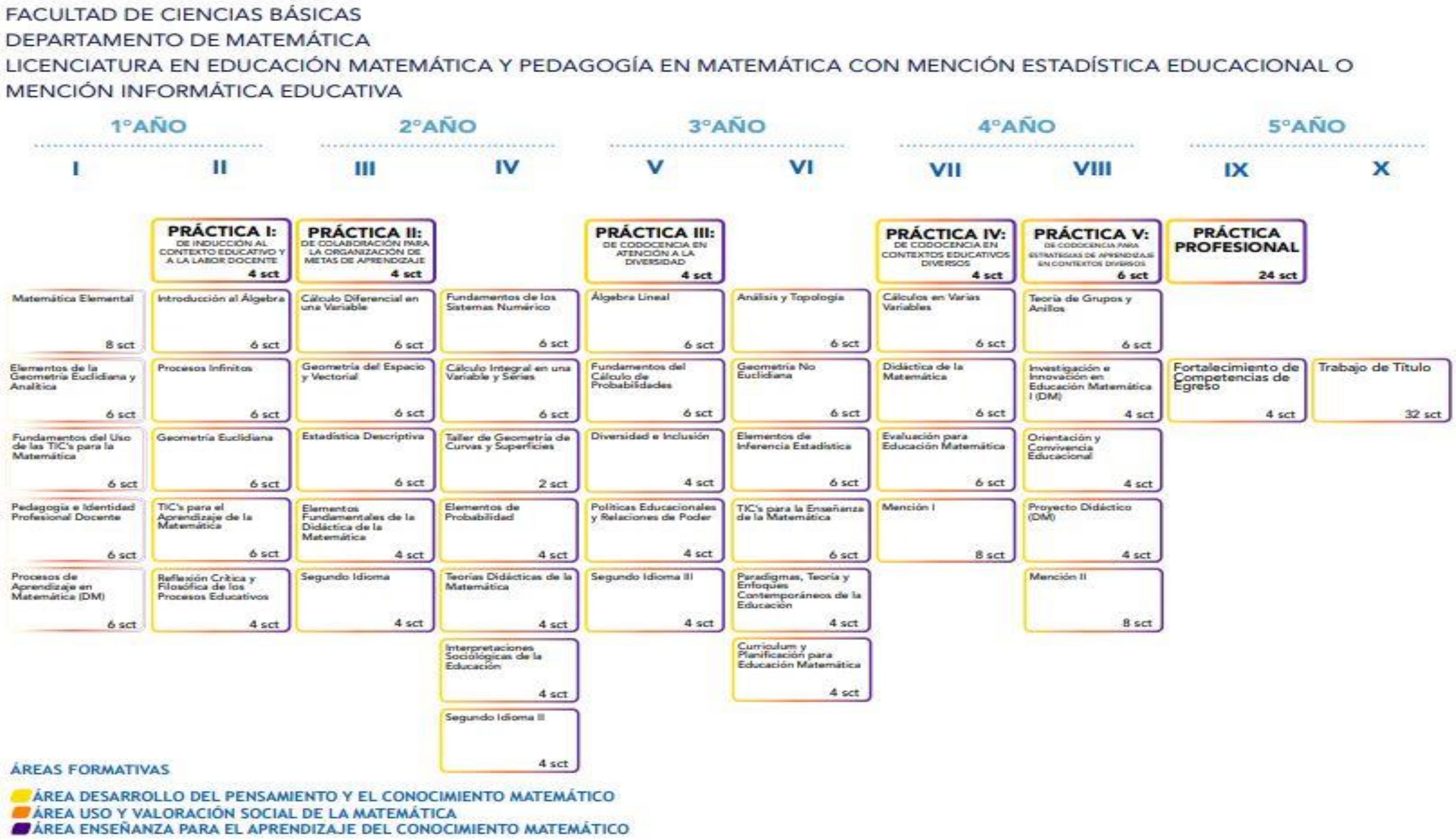
Ahora bien, si se dirige la atención al objeto matemático que se ha estado estudiando durante esta investigación, se vuelve imprescindible conocer el contexto y el manejo que deberían tener los sujetos que responderán las preguntas que serán redactadas en nuestro cuestionario.[7] Es por lo que, al buscar dentro de la página de la universidad el programa que la carrera de Pedagogía en Matemática ofrece a sus estudiantes, es posible encontrar dos mallas que se están implementando en paralelo. Esto se debe a que la malla antigua estuvo vigente solo hasta el año 2018 para luego empezar a utilizar otra, y como aún hay estudiantes que siguen estudiando con la antigua malla, esta se emplea en paralelo con la nueva. A continuación, se muestran las dos mallas implementadas hasta por lo menos el 2020:

[7] Metodología utilizada para llevar a cabo la investigación.

Malla vigente hasta el 2018



Malla actual desde el 2019



Como se observa en la primera imagen, dentro de la malla que estuvo vigente hasta el año 2018, se tiene que la geometría analítica, donde se enseña la recta (nuestro objeto en estudio), lleva por nombre *Geometría I* y se ve en el segundo semestre del primer año de la carrera.

En esta geometría, se veía todo lo referente a elementos básicos de la geometría (como puntos, segmentos, rectas, etc.) y geometría en el plano (básico), como plano cartesiano, ecuaciones de rectas, familia de rectas, perímetro y área etc.

En los ramos siguientes que tratan la geometría en esta malla, está *Geometría en el plano* que se trabaja en el tercer semestre de la carrera, *Geometría en el espacio* enseñado en el cuarto semestre y *Geometría axiomática* perteneciente al séptimo semestre de la carrera.

Por otro lado, al observar la malla nueva, se tiene que la geometría analítica se enseña en el primer semestre del primer año de carrera, bajo el nombre de *"Elementos de la geometría Euclidiana y Analítica"*. Cabe destacar que en este curso se hacen presente dos geometrías, la euclidiana y la analítica, lo que es diferente con la malla antigua. Además, para este ramo el programa también declara que se debe enseñar elementos básicos de la geometría (como recta, punto, plano, segmento, etc.), sistema de coordenadas cartesianas, distancia entre dos puntos, etc. A continuación, se muestra un extracto del programa correspondiente a esta asignatura.

IV. NÚCLEOS DE APRENDIZAJE.

Nombre del núcleo de aprendizaje: ***Elementos Básicos de la Geometría de Euclides y** el **Plano Cartesiano***

Desglose del núcleo de aprendizaje: **Elementos de la geometría** Definiciones de los elementos de la geometría; Punto, Recta, Plano, rayo, segmento, trazo. haz de rayos, haz de rectas. Posiciones relativas entre rectas. Figuras geométricas elementales y sus propiedades: Triángulos, Polígonos y Circunferencia. Perímetro y Área de figuras geometría. **Sistema coordenadas cartesiana** Sistema coordenadas cartesiana unidimensional (Noción de Vector, Relación de Chassles, Euler y Steward) Sistema de coordenadas cartesianas en el plano (Ejes coordenados, Representación gráfica) Distancia entre dos puntos. División de un segmento en una razón dada **Lugares geométricos** La Recta (Ecuación de una recta definida por su forma; pendiente y ordenada en el origen, dos puntos, simétrica y general, Posición relativa entre rectas, Forma normal de una recta, Reducción de una recta de su forma general a normal y viceversa, Distancia de un punto a una recta, Bisectrices, Familia de rectas) la Circunferencia (Ecuación de la Circunferencia, Forma general de la ecuación de una circunferencia, Familia de Circunferencias, Eje Radical, Tangentes a una curva, Tangentes a una circunferencia. Lugares Geométricos relativos a circunferencias)

Las otras geometrías que acompañan a esta en el resto de la carrera son: *Geometría euclidiana* la cual se trata el segundo semestre, *Geometría del espacio y vectorial* la que se ve el tercer semestre y *Geometría no euclidiana* correspondiente al sexto semestre.

Para la Geometría I y Elementos de la geometría Euclidiana y Analítica (ramos que tratan el tema de nuestro interés), era y es muy utilizado el libro *"Geometría analítica"* de Charles H. Lehmann. Este libro presenta conceptos de Geometría analítica plana y del espacio. El lineamiento que quiso seguir el autor en su libro debía coincidir y complementar la lección oral del docente; el método que Lehmann lleva a cabo para conseguir esto consta de una orientación (conocimientos previos), motivo (desarrollo), discusión (teoremas) y ejemplos. (Lehmann, 1989)

Al enfocarse en la Geometría Analítica Plana, más específicamente en el contenido de la investigación, y con el objetivo de conocer cuáles son a grandes rasgos los tipos de problemas propuestos en los ramos, se encuentran algunos de los siguientes ejercicios a modo de ejemplo:

SISTEMAS DE COORDENADAS 15

EJERCICIOS. Grupo 2

Dibújese una figura para cada ejercicio.

1. Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son $(-3, -1)$, $(0, 3)$, $(3, 4)$, $(4, -1)$.

2. Demostrar que los puntos $(-2, -1)$, $(2, 2)$, $(5, -2)$, son los vértices de un triángulo isósceles.

3. Demostrar que los puntos $(2, -2)$, $(-8, 4)$, $(5, 3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar su área.

4. Demostrar que los tres puntos $(12, 1)$, $(-3, -2)$, $(2, -1)$ son colineales, es decir, que están sobre una misma línea recta.

5. Demostrar que los puntos $(0, 1)$, $(3, 5)$, $(7, 2)$, $(4, -2)$ son los vértices de un cuadrado.

6. Los vértices de un triángulo son $A(3, 8)$, $B(2, -1)$ y $C(6, -1)$. Si D es el punto medio del lado BC, calcular la longitud de la mediana AD.

7. Demostrar que los cuatro puntos $(1, 1)$, $(3, 5)$, $(11, 6)$, $(9, 2)$ son los vértices de un paralelogramo.

8. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(3, -4)$. *Sugestión.* Usese la segunda fórmula del Apéndice IA, 1.

9. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto $(3, -2)$. Si la abscisa del otro extremo es 6 hallar su ordenada. (Dos soluciones.)

10. Determinar la ecuación algebraica que expresa el hecho de que el punto (x, y) equidista de los dos puntos $(-3, 5)$, $(7, -9)$.

11. Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $(-2, 3)$ y $(6, -3)$.

12. Los puntos extremos de un segmento son $P_1(2, 4)$ y $P_2(8, -4)$. Hallar el punto $P(x, y)$ que divide a este segmento en dos partes tales que $\overline{P_2P} : \overline{PP_1} = -2$.

13. Uno de los puntos extremos de un segmento es el punto $(7, 8)$, y su punto medio es $(4, 3)$. Hallar el otro extremo.

14. Los extremos de un segmento son los puntos $P_1(7, 4)$ y $P_2(-1, -4)$. Hallar la razón $\overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ en que el punto $P(1, -2)$ divide al segmento.

15. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $(2, 5)$, $(4, 2)$ y $(1, 1)$. Hallar las coordenadas de los tres vértices.

16. Los vértices de un triángulo son $A(-1, 3)$, $B(3, 5)$ y $C(7, -1)$. Si D es el punto medio del lado AB y E es el punto medio del lado BC, demostrar que la longitud del segmento DE es la mitad de la longitud del lado AC.

17. En el triángulo rectángulo del ejercicio 3, demostrar que el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices.

10. Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos $(-2, 1)$, $(3, 4)$ y $(5, -2)$. Comprobar los resultados.

11. Demostrar que los puntos $(1, 1)$, $(5, 3)$, $(8, 0)$ y $(4, -2)$ son vértices de un paralelogramo, y hallar su ángulo obtuso.

12. Demostrar que los puntos $(1, 1)$, $(5, 3)$ y $(6, -4)$ son vértices de un triángulo isósceles, y hallar uno de los ángulos iguales.

13. Hallar los ángulos del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $(2, 5)$, $(7, 3)$, $(6, 1)$ y $(0, 0)$. Comprobar los resultados.

14. Dos rectas se cortan formando un ángulo de $135°$. Sabiendo que la recta final tiene una pendiente de -3, calcular la pendiente de la recta inicial.

15. Dos rectas se cortan formando un ángulo de $45°$. La recta inicial pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(9, 7)$ y la recta final pasa por el punto $(3, 9)$ y por el punto A cuya abscisa es -2. Hallar la ordenada de A.

16. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $A(1, -3)$, $B(3, 3)$ y $C(6, -1)$ empleando el seno del ángulo BAC. *Sugestión.* Ver Apéndice IC, 12.

17. Por medio de las pendientes demuéstrese que los tres puntos $(6, -2)$, $(2, 1)$ y $(-2, 4)$ son colineales.

18. Una recta pasa por los dos puntos $(-2, -3)$, $(4, 1)$. Si un punto de abscisa 10 pertenece a la recta, ¿cuál es su ordenada?

19. Hallar la ecuación a la cual debe satisfacer cualquier punto $P(x, y)$ que pertenezca a la recta que pasa por los dos puntos $(2, -1)$, $(7, 3)$.

20. Hallar la ecuación a la cual debe satisfacer cualquier punto $P(x, y)$ que pertenezca a la recta que pasa por el punto $(3, -1)$ y que tiene una pendiente igual a 4.

21. Demostrar que la recta que pasa por los dos puntos $(-2, 5)$ y $(4, 1)$ es perpendicular a la que pasa por los dos puntos $(-1, 1)$ y $(3, 7)$.

22. Una recta l_1 pasa por los puntos $(3, 2)$ y $(-4, -6)$, y otra recta l_2 pasa por el punto $(-7, 1)$ y el punto A cuya ordenada es -6. Hallar la abscisa del punto A, sabiendo que l_1 es perpendicular a l_2.

23. Demostrar que los tres puntos $(2, 5)$, $(8, -1)$ y $(-2, 1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar sus ángulos agudos.

24. Demostrar que los cuatro puntos $(2, 4)$, $(7, 3)$, $(6, -2)$ y $(1, -1)$ son vértices de un cuadrado y que sus diagonales son perpendiculares y se dividen mutuamente en partes iguales.

25. Demostrar que los cuatro puntos $(2, 2)$, $(5, 6)$, $(9, 9)$ y $(6, 5)$ son vértices de un rombo y que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en su punto medio.

Se puede notar, que la mayoría de los ejercicios presentes en ambas imágenes, hacen referencia al tener que trabajar con pares ordenados y luego determinar alguna ecuación que cumpla con determinadas condiciones o hacer uso de propiedades vistas hasta ese momento.

Si se observa la imagen que se muestra a continuación, se aprecia que en esta parte del libro se plantean ejercicios que invitan a los lectores a realizar discusiones con respecto a teoremas y a demostrarlos, luego les solicita realizar la gráfica correspondiente en cada caso.

EJERCICIOS. Grupo 5

En cada uno de los ejercicios 1-25 discútase la ecuación estudiando las intercepciones, simetría y extensión. Después trácese la gráfica correspondiente.

1. $5x + 4y - 20 = 0.$
2. $3x - 2y = 0.$
3. $3x^2 + 3y^2 - 10 = 0.$
4. $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0.$
5. $4x^2 + 3y^2 - 12 = 0.$
6. $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0.$
7. $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0.$
8. $16x^2 - y = 0.$
9. $16y^2 - x = 0.$
10. $x^2 - y^2 - 9 = 0.$
11. $y = x^3 + x^2 - 9x - 9.$
12. $8x^3 - y = 0.$
13. $x^3 - x - y = 0.$
14. $x^4 - 9x^2 - y = 0.$
15. $x - y^4 + 9y^2 = 0.$
16. $x^2 - y^3 = 0$
17. $x^2 + y^2 - 4y = 0.$
18. $x^2 - 6x + y^2 = 0.$
19. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14$
20. $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0.$
21. $x^2 + 4x + 3y + 1 = 0.$
22. $y^2 - 2x - 8y + 12 = 0.$
23. $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0.$
24. $4x^2 - y^2 - 2y = 2.$
25. $y^2 - 9x^2 - 18x - 8y - 2 = 0.$
26. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema 1, Artículo 16.
27. Demostrar el teorema 2, Artículo 16.
28. Enunciar y demostrar el recíproco del teorema 3, Artículo 16.
29. Demostrar el siguiente teorema: Si la ecuación de una curva no se altera cuando se intercambian las variables x y y, la curva es simétrica con respecto a la recta que pasa por el origen y es bisectriz de los cuadrantes I y III.
30. Demostrar el siguiente teorema: Si la ecuación de una curva no se altera al sustituir la variable x por $-y$ y la variable y por $-x$, la curva es simétrica con respecto a la recta que pasa por el origen y es bisectriz de los cuadrantes II y IV.

En base las imágenes presentadas del libro, es posible mencionar que el trabajo que se quiere realizar con los estudiantes al utilizar este libro es el de la comprensión de la recta en su forma analítica principalmente, no se dejan de lado sus propiedades o representaciones, sin embargo, la propuesta de ejercicios, en su mayoría, son ligados a buscar la ecuación de la recta utilizando pares ordenados o determinando si cierto punto pertenece a una recta, etc.

Objetivo de la investigación

Objetivo general

Brindar actividades basadas en la investigación para la enseñanza de la Recta y para complementar el conocimiento de los futuros docentes de matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación.

Objetivos específicos

- Indagar en las bases curriculares y programas de estudio a la recta para determinar si las actividades propuestas permiten una comprensión profunda del contenido.

- Indagar en las mallas de la Universidad el contenido de la recta para analizar el lineamiento que estas siguen con respecto a la enseñanza del objeto matemático.
- Realizar un cuestionario sobre la recta a los futuros docentes de matemática, con el fin de indagar los modos de comprender el objeto en cuestión y si estos permiten movilizar la recta en sus diferentes representaciones.

CAPÍTULO 2: REFERENCIAS TEÓRICAS DE LA INVESTIGACIÓN

La Recta

Historia de la Recta

Se cree que durante los años 325-265 a.C en Alejandría (actual Egipto) vivía un matemático y geómetra griego llamado Euclides, quien hasta el día de hoy es considerado como el padre de la geometría y es a quien se le debe su nombre, Geometría Euclidiana.

Fue autor de diversos libros, pero el principal y al cual se hace referencia permanentemente se llama "Los Elementos". Existen trece compilaciones de autores dentro del libro, las seis primeras tratan de la geometría elemental en los cuales se exponen las geometrías utilizadas por lo pitagóricos para resolver lo que se conoce hoy como ecuaciones lineales y cuadráticas. De la séptima a la décima compilación, se trabajan cuestiones numéricas y las tres que restan abarcan la geometría de los sólidos.

En el texto escolar de Geometría de octavo básico que otorgó el MINEDUC en el año 2016, se expone que, para Euclides, la definición de proposición matemática trata de "*un enunciado deducido lógicamente a partir de unos principios previamente aceptados".* Y si nos adentramos en el libro los Elementos, los principios que se recogen como punto de partida son 23 definiciones, cinco postulados y cinco axiomas.

Prieto (2017) expone en su escrito "*Lo imposible en matemáticas"* los cinco postulados que fueron propuestos por Euclides:

1. Se puede trazar de cualquier punto a cualquier otro punto una línea recta.
2. Se puede prolongar cualquier línea recta acotada, de manera continua.
3. Se puede trazar un círculo con cualquier centro y cualquier distancia (radio).
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela.

A lo largo de la historia, estos cinco postulados han sido protagonistas en frecuentes discusiones, en especial el quinto debido a su condición distinta con respecto a los otros cuatro. Como consecuencia a los constantes intentos fallidos por demostrar el último postulado en base a los otros cuatro, es que Euclides decidió anotarlo como un postulado más. Sin embargo, existieron diversas intenciones de demostrarlo como un teorema por parte de diversos autores. Estos intentos prosiguieron hasta el siglo XIX cuando se pudo plasmar que era posible definir geometrías consistentes llamadas “no euclidianas", en las cuales no se cumpliría la existencia de una única paralela trazada a una recta por un punto exterior a ella.

Otro apartado importante en el libro de este matemático es la definición que le otorga a la recta: *“Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella”*.

Por otro lado, durante el transcurso de la historia hubo varias personas que también quisieron dar su propia definición:

- *“Es la línea cuyos puntos intermedios hacen sombra a sus extremos (Platón, 427-347).*
- *Es el conjunto de puntos que permanecen invariantes cuando un cuerpo gira alrededor de dos de sus puntos (Leibniz, 1646-1716).*
- *Es el camino más corto entre dos puntos (Legendre, 1752-1833)*
- *Es la línea que, trazada de un punto a otro no se vuelve ni a la derecha ni a la izquierda, y es la más corta que puede trazar entre esos dos puntos (Simpson, 1710-1761)*
- *La recta es una serie de puntos, cada uno de los cuales equidista de tres puntos dados (Fourier, 1768-1830)*
- *Es una línea homogénea, es decir, cuyas partes, tomadas indiferentemente, son semejantes entre sí y no difieren más que en su longitud (Delboeuf, 1831-1896)*
- *Es una línea indefinida tal que por dos puntos dados no se puede hacer pasar más que una (Duhamel, 1797-1872)”.*

A pesar de que la geometría avanzó muy poco desde el final de la Era Griega hasta la Edad Media, el filósofo y matemático francés René Descartes, publicó en 1637 cuyo tratado “El Discurso del Método. En este tratado se encuentra presente un apartado llamado “*La geometría”*, el cual origina una conexión entre el álgebra y objetos geométricos. Lo anterior da paso finalmente a lo que se conoce hoy en día como Geometría Analítica o Cartesiana.

La Geometría Analítica es denominada así porque implica un análisis estricto, lógico y racional para registrar en un plano de referencia los elementos geométricos básicos. El principal es el plano cartesiano, nombrado así en memoria del matemático.

En esta nueva geometría se reconocen los puntos en el plano como pares de números "(x,y)", lo que representa a un **sistema de coordenadas** en el que cada par representa la posición de un punto con respecto a dos rectas perpendiculares llamadas **ejes de coordenadas**.

Además, Descartes había construido una especie de diccionario entre la geometría y el álgebra que, además de relacionar pares de números a puntos, le permitía **dibujar líneas en el plano mediante ecuaciones** con dos variables (x e y) y viceversa.

Es entonces de esta forma que la línea recta puede ser concebida a través de los elementos que la geometría analítica declara, es decir, el poder resolver problemas geométricos mediante la manipulación de expresiones algebraicas.

Por otro lado, y a modo de complementar lo mencionado con anterioridad, al adentrarse en el texto escolar de octavo básico que proporcionó el Ministerio de Educación para el área de la geometría en el 2016, se tiene lo siguiente:

> *"Se llaman postulados o axiomas a aquellas verdades que por ser evidentes se aceptan como tales. No necesitan ser demostradas"* (Carreño y Cruz, 2016, p.14)

Junto con esto, se presentan 6 postulados que se vuelven necesarios al momento de trabajar en esta área para poder desarrollar mejor la comprensión del contenido. Los postulados mencionados son los siguientes:

1. *"Por dos puntos se puede trazar una única recta.*
2. *Por un punto fuera de una recta se puede trazar una sola perpendicular a ella.*
3. *Por un punto de una recta se puede trazar una sola perpendicular a ella.*
4. *Por un punto fuera de una recta se puede trazar una sola paralela a ella.*
5. *Dos rectas perpendiculares a una misma recta son paralelas entre sí.*
6. *Dos rectas paralelas a una misma recta son paralelas entre sí." (Carreño y Cruz, 2016, p.14)*

Definiciones

Plano cartesiano

También se le conoce como sistema cartesiano. Está compuesto por dos rectas numéricas perpendiculares entre sí, una horizontal (eje x) que llamaremos **abscisa** y otra vertical (eje y) que llamaremos **ordenada**, las cuales se cortan en un punto llamado **origen**. (Ver figura 1)

Su finalidad es describir la ubicación de un punto en el plano, la que está representada por un sistema de coordenadas. Junto con ellos, sirve también para analizar matemáticamente figuras geométricas que forman parte de la geometría analítica, como la línea, la circunferencia, la parábola, etc.

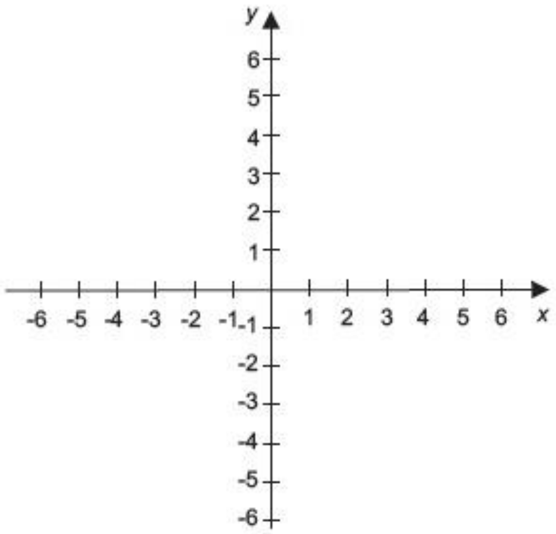


Figura N°1. Plano cartesiano.

Par ordenado

Un **punto** se diferencia de otro punto solo por su ubicación. Si se encuentra en un plano cartesiano, su posición se indica por un **par ordenado.**

Por su parte, un par ordenado hace referencia a una pareja de elementos dados de cierto orden y es representado por P(x,y). Donde (x,y) es un par ordenado cualquiera. Llamaremos a “x” como la primera componente y a “y” como segunda componente.

Además, la primera componente representa la posición que tiene el punto respecto de la **abscisa** y se ubica en el eje x; la segunda componente representa la posición que tiene el punto respecto de la **ordenada** y se ubica en el eje y.
Es importante destacar que $(x, y) \neq (y, x)$

Colinealidad

Es la propiedad según la cual un conjunto de puntos está situado en la misma recta. Si esto se cumple, se dice que los puntos son colineales o que están en una misma línea.

Pendiente de una recta

La pendiente de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación (ángulo que forma la recta con el eje x, en sentido antihorario, desde el eje x hacia la recta). Luego, la expresión que representa a la pendiente es:

$$\boxed{m = tg\alpha = \frac{BP}{PA} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

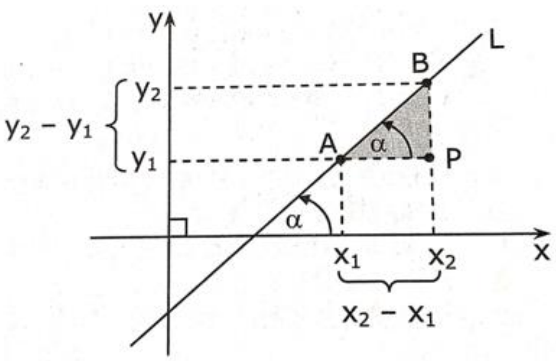


Figura N°2. Pendiente de una recta.

A continuación, se presenta un ejercicio planteado en la guía didáctica del docente de octavo básico del 2019.

Relación entre el ángulo de inclinación y la pendiente de la recta

- $(\alpha = 0°)$ $si\ y\ solo\ si$ $(m = 0)$

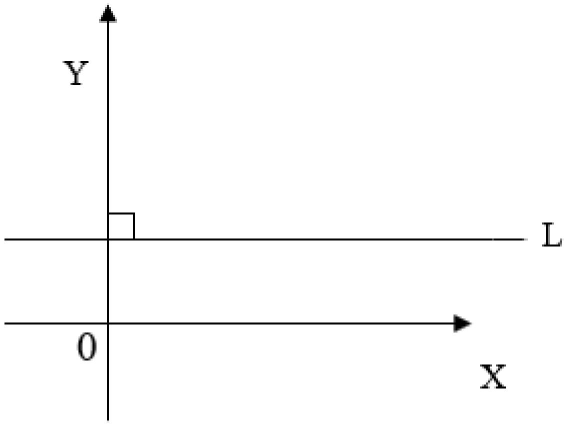


Figura N°3. Recta L es paralela al eje x.

- $(0° < \alpha < 90°)$ si y solo si $(m > 0)$

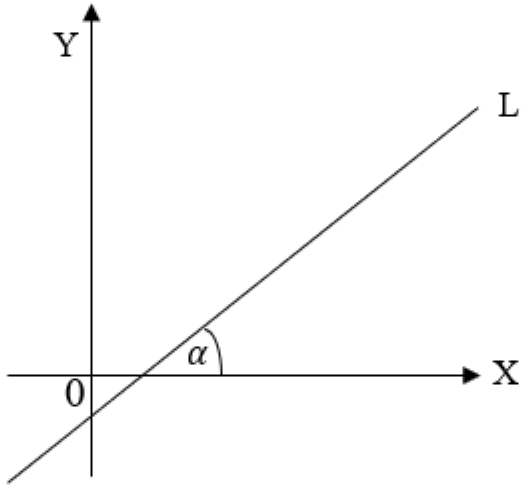


Figura N°4. Recta L tiene pendiente positiva.

- ($\alpha = 90°$) si y solo si (m no está definida)

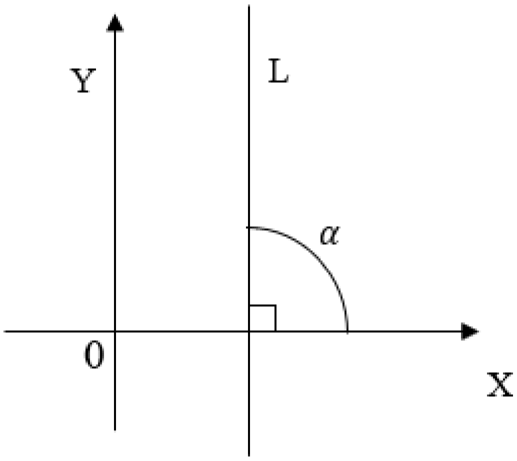


Figura N°5. Recta L es paralela al eje y.

- ($90° < \alpha < 180°$) si y solo si ($m < 0$)

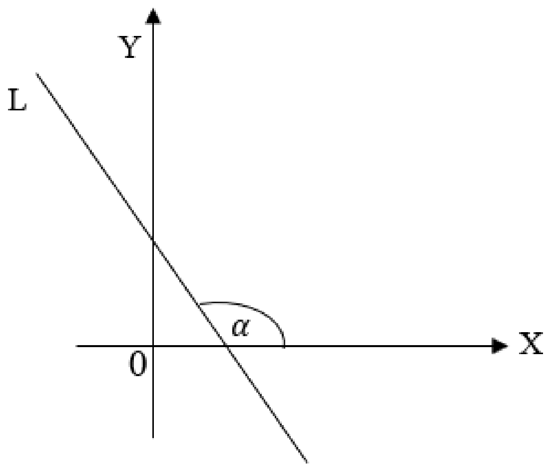


Figura N°6. Recta L tiene pendiente negativa.

Ecuación de la recta

Existen diferentes tipos para expresar la recta, los cuales se detallarán en la siguiente tabla:

Tipo	Expresión	Observación
Ecuación general de la recta.	$Ax + By + C = 0$	A, B y C son reales Si $A = 0 \Longrightarrow B \neq 0$ Si B= $0 \Longrightarrow A \neq 0$

Ecuación principal de la recta.	$y = mx + n$	m = pendiente, $m = \frac{-A}{B}$ n = coeficiente de posición
Ecuación de la recta que pasa por un punto A (x_1, y_1) y tiene pendiente dada m.	$(y - y_1) = m(x - x_1)$	
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos A (x_1, y_1) y B (x_2, y_2).	$(y - y_1) = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$	
Ecuación de segmentos o canónica: Ecuación de la recta que pasa por dos puntos que están en los ejes.	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	$a \neq 0 \; y \; b \neq 0$ (a,0) es el punto del eje x (0,b) es el punto del eje y

Tabla N°10. Fuente: Elaboración propia

Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas si las pendientes son iguales o ambas tienen pendientes que se indeterminan.

Se tiene que la recta L_1 tiene pendiente m_1 y la recta L_2 tiene pendiente m_2, luego:

Si m_1 y m_2 pertenecen a los reales, entonces $L_1 /\!/ L_2$ si y solo si $m_1 = m_2$.

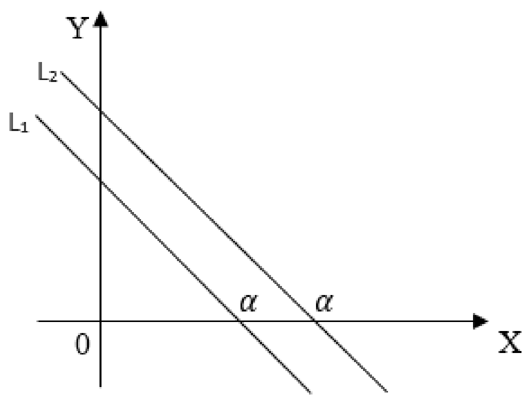


Figura N°7. Rectas paralelas.

Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1 o si en una de las rectas la pendiente es cero y en la otra se indetermina.

Se tienen las rectas L_1 y L_2, las cuales tienen pendiente m_1 y m_2, respectivamente. Luego: Si m_1 y m_2 pertenecen a los reales, entonces $L_1 \perp L_2$ si y solo si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

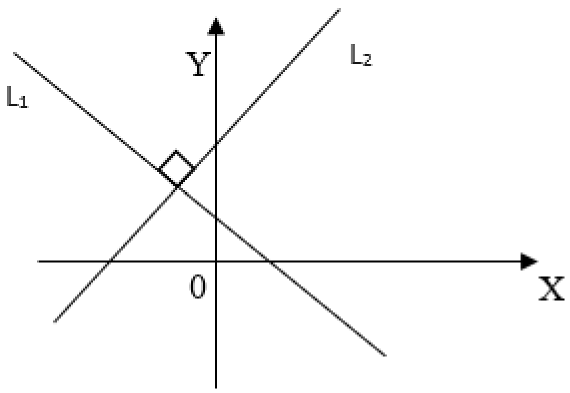


Figura N°8. Rectas perpendiculares.

Teoría Modos de Pensamiento

Justificación del Marco Teórico

Para esta investigación se decidió utilizar como marco teórico la Teoría de modos de pensamiento propuesto por Anna Sierpinska (2000). Esta elección está justificada por los objetivos de la investigación ya que, permite reconocer las diferentes maneras que tienen los estudiantes de comprender la recta, como también a observar y analizar las acciones que realizan los estudiantes al momento de desarrollar las tareas que se les proponen.

Descripción del Marco Teórico

Para Sierpinska (2000) es posible distinguir tres modos de pensamiento; dos que tienen relación con el pensamiento teórico (*analítico aritmético y analítico estructural*) y uno que tiene que ver con el pensamiento práctico (*sintético geométrico*). Además, los define como una forma de entender y ver los objetos matemáticos.

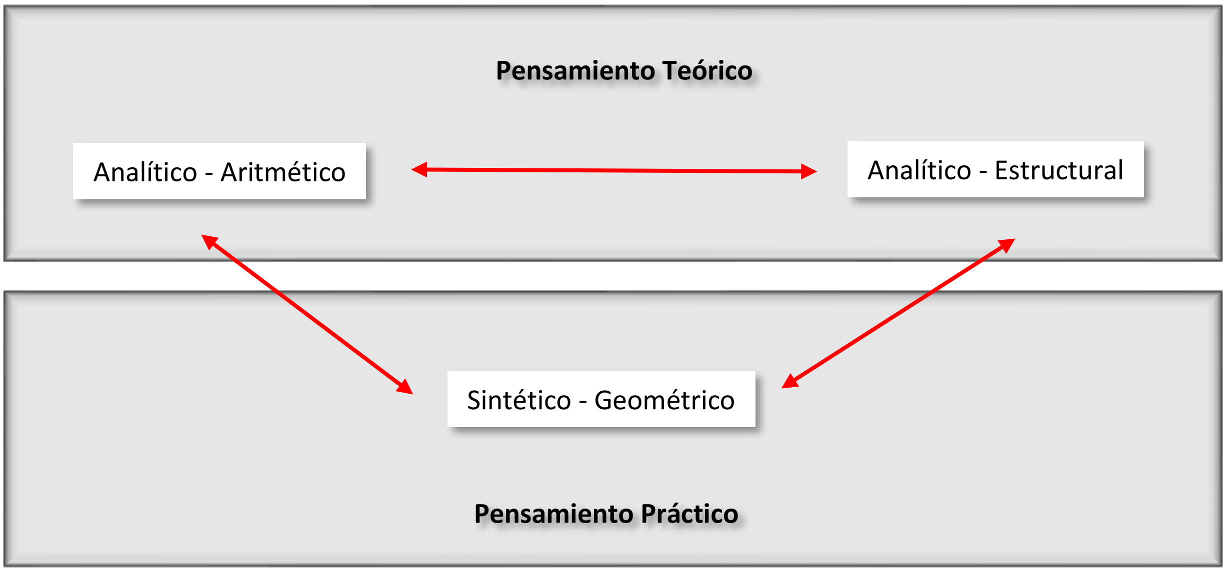


Figura N°9. Esquema Modos de Pensamiento. Fuente: Elaboración propia.

Sintético – Geométrico (SG)

Es parte del pensamiento práctico y hace referencia a los objetos que son descritos por la mente, es decir, es la imagen inmediata que se genera entre el sujeto y el objeto que se visualiza. Se hace uso del lenguaje geométrico como los planos, líneas, puntos, etc; junto con las representaciones gráficas correspondientes. (Sierpinska, 2000).

Para la recta: Para este modo, se piensa la recta como una línea que se extiende en una misma dirección.

Analítico – Aritmético (AA)

Este modo es parte del pensamiento teórico y utiliza el álgebra para la descripción de los objetos, por lo que emplea fórmulas, ecuaciones, entre otros elementos. Es en este modo donde el estudiante debe interpretar objetos a partir de determinadas definiciones o relaciones numéricas y/o simbólicas (Sierpinska, 2000).

Para la recta: Al pensar la recta en este modo, podemos decir que es un conjunto de pares ordenados que satisfacen la ecuación $y = mx + c$

Analítico – Estructural (AE)

Al ser parte del pensamiento teórico, utiliza axiomas y propiedades para describir los objetos matemáticos, los cuales se ven como un todo estructural (Sierpinska, 2000).

Para la recta: Para este modo de pensar, la recta es comprendida como el lugar geométrico de los puntos en el plano tales que, tomados dos cualesquiera, el valor de la pendiente siempre resulta constante.

Cabe destacar que estos modos no tienen un orden jerárquico que obligue a priorizar uno sobre otro; lo que sí es importante tener en cuenta que estos modos de pensamiento se utilizan de acuerdo con el contexto matemático y que la interacción y complementación entre los tres proporciona una mejor comprensión del objeto matemático a estudiar.

A modo de resumen, la siguiente tabla N°11 muestra a la recta a través de los diferentes modos de pensar:

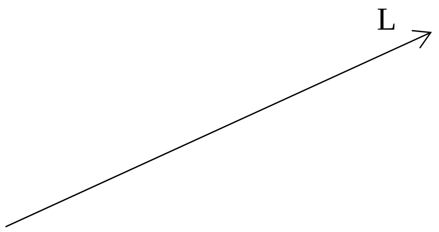
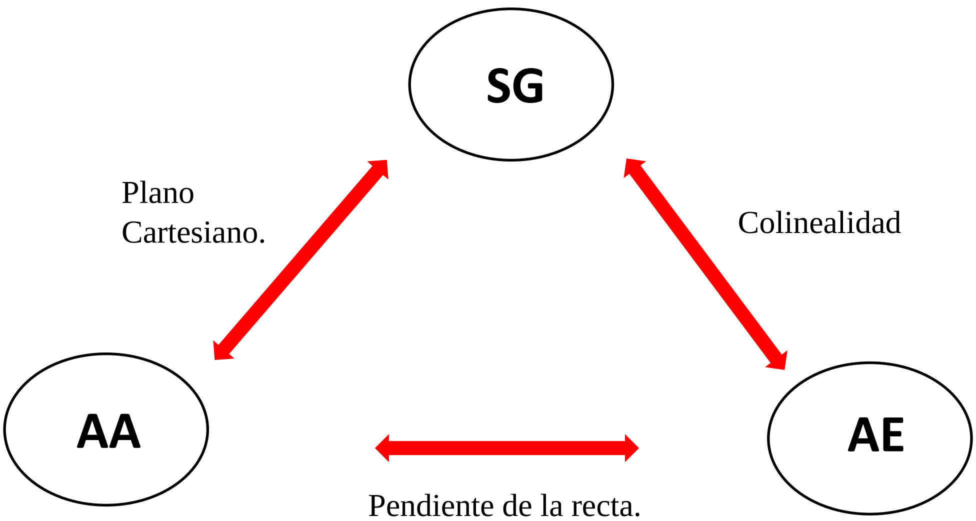
SG *Se describe a través de la siguiente figura*	**AA** *Se describe a partir de la siguiente fórmula*	**AE** *Se describe a partir de propiedades*
Siendo L una recta.  	$y = mx + c$ Siendo: - **X** e **Y** variables en el plano - **m** la pendiente de la recta - **c** el término independiente	- Lugar geométrico de los puntos en el plano tales que, tomados dos cualesquiera, el valor de la pendiente es constante.

Tabla N°11. Modos de pensar la recta. Fuente: Elaboración propia.

Ahora bien, existen elementos propios al momento de pensar la recta en alguno de los modos, los que permitirán reconocer cuándo se mantiene o transita entre los diferentes modos de pensamiento, estos son los llamados **articuladores**. Estos, actúan entre lo teórico y lo práctico y permiten comprender de una mejor manera el concepto de recta.

Para el objeto matemático en estudio, y gracias a un trabajo realizado en conjunto con la profesora guía Claudia Valenzuela, se lograron describir los siguientes elementos articuladores entre los modos de pensar el concepto de recta.



Esquema N°1. Articuladores para transitar entre los modos de pensamiento para el concepto de recta. Fuente: Elaboración propia.

CAPÍTULO 3: MARCO METODOLÓGICO

Una fase muy importante dentro de esta investigación es recopilar y analizar la información sobre el grado de comprensión de la recta que tienen los futuros docentes de Pedagogía en Matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, y así poder establecer si existen conexiones entre los modos de pensar la recta.

Recopilación de información

Diseño

La investigación es de tipo descriptivo, pues con ella se busca describir y recrear el manejo general que presentan los y las futuros y futuras docentes en el concepto específico de la Recta. El enfoque que presenta esta investigación es cualitativo pues se recolectaron datos sin medición numérica como las descripciones y observaciones. Además, el énfasis en estas investigaciones no está en medir las variables involucradas en algún fenómeno, sino en entenderlo (Sampieri R, Collado C y Lucio P, 2003). Es así como el enfoque de la investigación no se trata de conocer cuánto se sabe del objeto matemático a estudiar sino de qué manera lo comprende y lo percibe el estudiante.

Población de estudio

La población definida para esta investigación son estudiantes de Pedagogía en Matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación que hayan cursado ya la Geometría Analítica.

Muestra de estudio

Para dicha recopilación de información, se obtuvo una muestra de nueve estudiantes de la UMCE que cumplían con lo requerido para la investigación. Uno de los encuestados es de la generación del 2014, dos son de la generación del 2015 y seis del 2016, es decir, que todos los encuestados cursaron la carrera en base a la malla que tuvo vigencia hasta el 2018, por ende, debieron haber cursado la rama de Geometría Analítica en el segundo semestre de su primer año como estudiantes. (Ver capítulo 1)

Cabe destacar que todos los encuestados accedieron de manera voluntaria a responder los ejercicios.

Instrumento

Para la población de estudio se aplicó una encuesta, la cual se conformaba por una selección de cinco ejercicios que hacían referencia a la Recta, contenido específico dentro de la Geometría Analítica. El instrumento que se utilizó fue validado por Claudia Valenzuela Gaete, Profesora de Matemática por Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (1996) y Magister en Didáctica de la Matemática por Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (2013).

Es importante mencionar que cada uno de los ejercicios propuestos fueron construidos desde la teoría de modos de pensamiento de Anna Sierpinska y se puso mucho énfasis en que los desarrollos permitiesen reconocer los articuladores y los modos en que estos se presentan (Sintético-geométrico, Analítico-aritmético y Analítico-estructural) (Ver capítulo 2).

Objetivo del cuestionario

Para alcanzar el tercer objetivo específico de la investigación, el cual plantea: *"Realizar un cuestionario sobre la recta a los futuros docentes de matemática, con el fin de indagar los modos de comprender el objeto en cuestión y si estos permiten movilizar la recta en sus diferentes representaciones."*, es que se decidió por realizar un cuestionario con el fin de analizar los conocimientos y habilidades que poseen los futuros docentes de matemática para enseñar el contenido de la recta.

Descripción y fundamentación del cuestionario

La selección de los ejercicios a realizar por los futuros docentes de la UMCE se componía por cinco preguntas que fueron diseñadas para ser respondidas por aquellos estudiantes que ya han visto el contenido de la recta, que como se dijo en la justificación del problema, corresponde a Geometría I en la malla antigua y a Elementos de la geometría Euclidiana y Analítica en la nueva (Ver capítulo 1).

Las preguntas confeccionadas se realizaron de tal manera que se generara un conflicto en los estudiantes para forzar de cierta manera el tránsito entre los tres modos de pensamiento que plantea Sierpinska. Para esto, es necesario mencionar que los ejercicios no representan del todo a las actividades propuestas por el programa de estudio del MINEDUC, puesto que en ningún momento se les dijo a los encuestados que el contenido a evaluar era la recta. Además, para generar el conflicto antes mencionado, es que se emplean instrucciones en las actividades del tipo "resuelva de dos formas diferentes", "argumente su respuesta", "explique con detalles". Todas estas acciones dan cuenta de la comprensión que presentan los estudiantes sobre la recta, y permiten evidenciar en qué modo se posiciona para resolver los ejercicios y cómo va actuando y transitando para lograr interactuar con los otros modos de la teoría.

Recolección de datos

El cuestionario realizado se llevó a cabo de manera virtual debido al contexto nacional que se estaba desarrollando en el tiempo que se ejecutaba la investigación (COVID-19). Es así como se utilizó la plataforma Google Forms, para dar una adecuación digital de los ejercicios seleccionados, sin embargo, se sostiene que dicho contexto se volvió una limitante en cierta medida para una mayor efectividad en la resolución del cuestionario.

Análisis a priori del cuestionario

Para este análisis se mencionarán las posibles respuestas que podrán otorgar los encuestados al situarse en los diferentes modos de pensar.

Pregunta 1

Si la temperatura a nivel del mar es de 20°C y la temperatura a una altitud de 1 km es de 10°C, exprese la temperatura en términos de la altitud. Suponga que la relación es lineal ¿Cuál es la temperatura a 2,8 km? Resuelva de dos formas diferentes.

Como objetivo de esta pregunta, se definió el reconocer si los estudiantes logran identificar que, al ser una relación lineal, se genera una ecuación de recta. A continuación, se presentan las posibles formas de responder la pregunta anterior situándose en los diferentes modos:

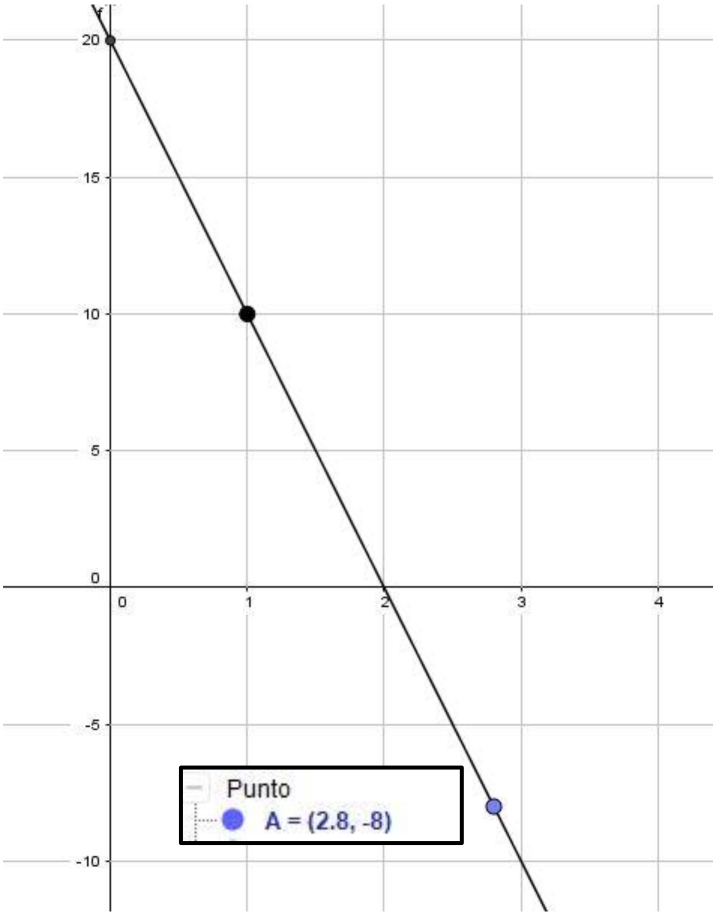
Modo Sintético – geométrico

Para posicionarse en este modo, los estudiantes pueden representar en un dibujo o bosquejo los datos de la situación planteada en el enunciado. Al realizar esto, el estudiante puede verificar que se forma una línea recta, logrando conseguir así al resultado esperado. Esto es:

A partir de la situación descrita en el enunciado, se tiene que:

Cuando la altura es 0 km, la temperatura es 20°C.

Cuando la altura es 1 km, la temperatura es 10°C.



Como se observa en la imagen, luego de realizar el dibujo, se puede notar que al posicionarse sobre el 2,8 del eje horizontal y se realiza una proyección de este en el eje vertical, se obtiene el -8. Lo que permite determinar entonces que la temperatura a una altura de 2,8 kilómetros, es -8°C.

Modo Analítico – aritmético

Es posible situarse en este modo, si el estudiante obtiene la ecuación de la recta mediante dos pares ordenados y la ecuación de la pendiente. Esto es:

A partir de los datos que entrega el enunciado, se pueden obtener los siguientes pares ordenados: P_1 (0,20) y P_2 (1,10). Con esto se logra determinar la pendiente, la cual más adelante permitirá encontrar la ecuación de la recta que representa la situación mencionada en el enunciado. Para finalizar, se utiliza la ecuación encontrada con el objetivo de responder al ejercicio propuesto.

Sean, $x: Altura\ en\ kilómetros$

$y: Temperatura\ en\ °C$

Como se dijo anteriormente, se calcula la pendiente con su respectiva ecuación:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{10 - 20}{1 - 0}$$

$$m = \frac{-10}{1} = -10$$

Siendo:

$y_2 = 10$
$y_1 = 20$
$x_2 = 1$
$x_1 = 0$

Con lo realizado se encuentra que la pendiente de la recta a hallar es -10.

Ahora, reemplazando la pendiente encontrada en la ecuación de punto-pendiente, se tiene que:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 20 = -10(x - 0)$$

$$y - 20 = -10x + 0 / +20$$

$y = -10x + 20$ → Ecuación principal

$10x + y + 20 = 0$ → Ecuación general

Luego, se utiliza la ecuación principal para obtener el resultado. Por lo que se reemplaza el dato de la altura que otorga el enunciado, es decir, para $x = 2{,}8$ se tiene que:

$$y = -10(2{,}8) + 20$$

$$y = -28 + 20$$

$$y = -8$$

Por lo tanto, se puede afirmar que a una altura de 2,8 km la temperatura es de - 8°C.

Modo Analítico – estructural

El estudiante se sitúa en este modo de pensar cuando utiliza propiedades para dar un argumento y una respuesta final. Como ya se plantea en el enunciado, la relación entre las variables es lineal, por lo que es sabido que los puntos que se planteen deben

ser colineales; por lo que si tenemos los puntos A (0;20), B (1;10) y C (2,8; t) se cumple que $m_{AB} = m_{BC}$. Esto es:

Sea t la temperatura (en °C) que se desea encontrar. Luego se tienen los puntos A (0;20), B (1;10) y C (2,8; t) con los cuales se cumple $m_{AB} = m_{BC}$. Por lo tanto, esta igualdad se debe utilizar para encontrar la temperatura pedida.

Lo primero que se hará es hallar la pendiente del punto AB, es decir:

$$m_{AB} = \frac{10 - 20}{1 - 0}$$
$$m_{AB} = \frac{-10}{1}$$
$$m_{AB} = -10$$

Siendo:

$y_2 = 10$
$y_1 = 20$
$x_2 = 1$
$x_1 = 0$

Luego, se calcula la pendiente del punto BC, con su respectiva fórmula:

$$m_{BC} = \frac{t - 10}{2,8 - 1}$$
$$m_{BC} = \frac{t - 10}{1,8}$$

Siendo:

$y_2 = t$
$y_1 = 10$
$x_2 = 2,8$
$x_1 = 1$

Ahora bien, como se menciona en el enunciado que las variables se relacionan linealmente, se cumple que $m_{AB} = m_{BC}$.

Reemplazando ambas pendientes encontradas anteriormente se obtiene lo siguiente:

$$m_{AB} = m_{BC}$$
$$-10 = \frac{t - 10}{1,8} / \cdot 1,8$$
$$-10 \cdot 1,8 = t - 10$$
$$-18 = t - 10 / +10$$
$$-18 + 10 = t$$
$$-8 = t$$

Luego, la temperatura pedida es -8°C.

Por lo tanto, a una altura de 2,8km, la temperatura es de -8°C.

Pregunta 2

José debe mandar a reparar su lavadora, para esto cotiza en dos empresas diferentes de las cuales pudo obtener la siguiente información:

La primera empresa cobra una cantidad fija de 2.400 pesos más 800 pesos por cada hora trabajada.

La segunda empresa no cobra una cantidad fija pero sí cobra 1.400 pesos por hora trabajada.

José recurre a ti para que le puedas ayudar a resolver las siguientes dudas:

a. **¿Cuándo es más económico escoger la segunda empresa?**
b. **Si para el problema que tiene la lavadora de José, en ambas empresas el tiempo mínimo de demora son cuatros horas. Además, recibe un descuento del 10% del valor asociado al tiempo utilizado en la reparación (por hora) en cualquiera de las dos empresas, si es que decide repararla. ¿Qué empresa le convendría escoger?**

¿Podrías ayudarle a José a resolver su problema? Haz un bosquejo y detalla cómo le explicarías.

El objetivo de estas preguntas es establecer si los estudiantes logran identificar las ecuaciones de la recta que representan la situación expresada en el enunciado para luego obtener el resultado esperado. Las posibles respuestas en los diferentes modos se presentan a continuación:

Sean

x: $horas\ trabajadas.$

y: $costo\ en\ pesos.$

E_1: $empresa\ 1.$

E_2: $empresa\ 2$

a.

Modo Analítico – aritmético

Los encuestados se posicionan en este modo cuando expresan una ecuación de la recta que represente lo que se expone en el enunciado mediante el cambio de lenguaje natural al lenguaje matemático, junto a esto hacer uso de sistema de ecuaciones. Esto es:

$$E_1 = 800x + 2.400$$
$$E_2 = 1.400x$$

Luego de esto, se realiza un sistema de ecuaciones que permita saber en qué punto se intersectan las rectas. Para aquello, se puede ocupar el método de igualación, el cual les ayudará a saber cuánto valen la abscisa y ordenada del par ordenado que se quiere encontrar.

$$\boxed{\begin{array}{l} i)\ y = 800x + 2.400 \\ ii)\ y = 1.400x \end{array}}$$

Ahora, se iguala la ecuación i) con las ii)

$$800x + 2.400 = 1.400x / -800x$$
$$2.400 = 1.400x - 800x$$
$$2.400 = 600x / \cdot \frac{1}{600}$$
$$\frac{2.400}{600} = x$$
$$4 = x$$

Ahora bien, se sabe que ambas rectas se intersectan cuando en el par ordenado la abscisa vale 4, por lo que para saber cuál es el valor de la ordenada se tiene que reemplazar ese x = 4 en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema. En este caso se realizará en la ii), obteniendo así:

$$y = 1.400 \cdot (4)$$
$$y = 5.600$$

Por lo tanto, las rectas se intersectan en el punto (4,5.600). Con lo hecho anteriormente, se puede concluir que cuando pasen 4 horas de trabajo, en ambas empresas el costo total serían 5.600 pesos. Ahora, como resulta que es una relación lineal entre ambas variables, el estudiante debería preguntarse ¿qué sucede con el costo antes y después de las cuatro horas?

Para responder esa pregunta, el estudiante puede reemplazar unos cuantos valores en las ecuaciones que definió. Se irán anotando los resultados en una tabla a modo de dejar plasmado en orden lo que se obtenga.

Empresa 1

Tiempo (hora)	Costo (pesos)
1	3.200
2	4.000
3	4.800
4	5.600
5	6.400
6	7.200
7	8.000
8	8.800

Empresa 2

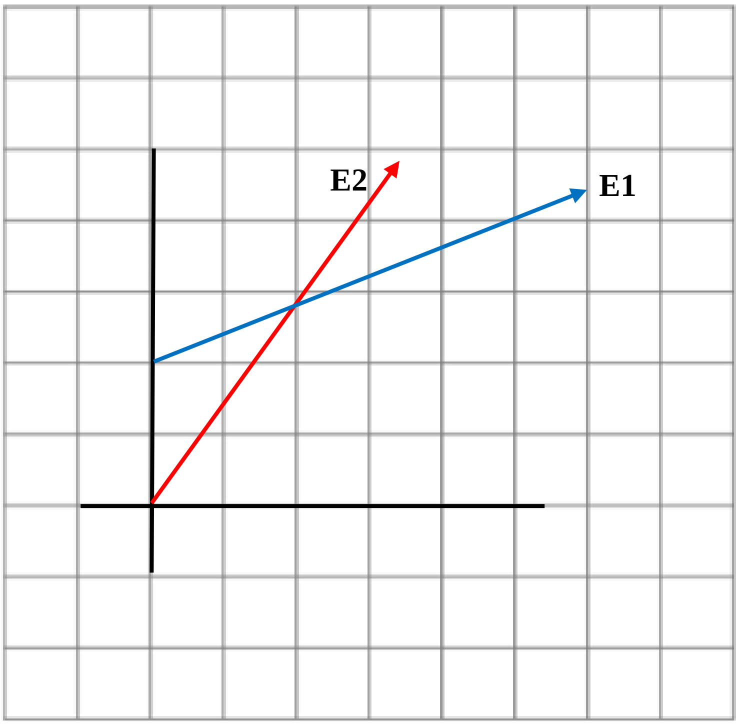
Tiempo (hora)	Costo (pesos)
1	1.400
2	2.800
3	4.200
4	5.600
5	7.000
6	8.400
7	9.800
8	11.200

Luego, el estudiante se puede dar cuenta de que es más económico escoger la segunda empresa cuando el tiempo de reparación son menos de cuatro horas.

Modo Sintético – geométrico

Para ubicarse en este modo, el estudiante puede dibujar dos rectas que representen la situación de cada empresa con los datos que se plantean en el enunciado.

<u>Dibujo</u>



En la representación anterior se grafican los datos entregados por ambas empresas, siendo la recta azul la que corresponde al costo generado por la empresa n°1 y la recta roja al costo de la empresa n°2.

Luego, se puede notar que al dibujar se tienen dos rectas; una que inicia desde el origen (cero) y otra inicia un poco más arriba. Además, se observa que ambas rectas crecen de forma ascendente por lo que se pueden comparar ambas pendientes y concluir que la empresa dos conviene escogerla al inicio del tramo, es decir, antes de la intersección de ambas rectas.

Modo Analítico – estructural

En este caso, al posicionarse en este modo, es posible identificar por parte de los estudiantes una comparación entre las pendientes asociado al incremento del costo por hora y el intercepto con el eje Y asociado al costo inicial impuesto por cada empresa al momento de solicitar el servicio. Esto es:

Se tiene que la pendiente de la recta que representa la situación de la empresa 1 es menor que la de la empresa 2 (800 pendiente de la empresa 1 v/s 1.400 pendiente de la empresa 2).

Luego, de este análisis el estudiante puede discriminar cuál sería la respuesta correcta. Ya que, por no empezar en el origen, la recta que simboliza la situación de la empresa 1 muestra que su servicio en el primer tramo tiene un costo mayor que el de la empresa 2, puesto que en esta (empresa 2) no existe un monto inicial fijo, por lo tanto, le conviene escoger la empresa 2.

b.

Modo Analítico – aritmético

Al igual que en la pregunta anterior (a.), los encuestados pueden plasmar una ecuación de la recta que represente lo que se expone en el enunciado mediante el cambio de lenguaje natural al lenguaje matemático, todo esto con el 10% de descuento realizado. Es decir:

Lo primero que se hará es determinar el nuevo valor del costo asociado al tiempo que demora cada empresa en la reparación considerando que existe un descuento del 10%

Empresa 1

Pesos	%
800	100
x	90

Utilizando el teorema fundamental de las proporciones

$$800 \cdot 90 = x \cdot 100$$

Obteniendo

$$\frac{800 \cdot 90}{100} = x$$

$$720 = x$$

Por lo que la nueva ecuación que representa la situación de la empresa 1 con el descuento realizado sería: $y = 720x + 2.400$

Por otra parte, utilizando el mismo procedimiento para la e*mpresa 2* se tiene:

Pesos	%
1.400	100
x	90

Luego,

$$1.400 \cdot 90 = x \cdot 100$$

$$\frac{1.400 \cdot 90}{100} = x$$

$$1.260 = x$$

Por lo que la nueva ecuación que representa la situación de la empresa 2 con el descuento realizado sería: $y = 1.260x$

Ahora bien, se debe analizar qué sucede desde las cuatro horas en adelante, puesto que el enunciado ya establece que la demora en la reparación será de mínimo este tiempo. Para responder esa pregunta, el estudiante puede reemplazar unos cuantos valores en las nuevas ecuaciones que se originaron con el descuento realizado. Se irán anotando los resultados en una tabla a modo de dejar plasmado en orden lo que se obtenga.

Empresa 1

Tiempo (hora)	Costo (pesos)
4	5.280
5	6.000
6	6.720
7	7.440
8	8.160

Empresa 2

Tiempo (hora)	Costo (pesos)
4	5.040
5	6.300
6	7.560
7	8.820
8	10.080

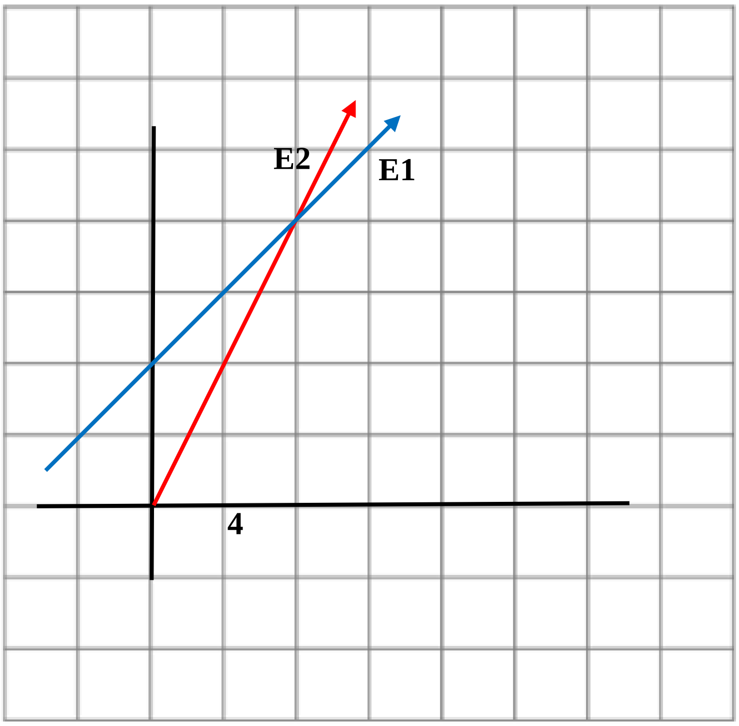
Luego, se puede dar cuenta de que, si el tiempo de reparación es de cuatro horas, le convendría a José escoger la empresa 2, sin embargo, luego de este tiempo es más económico escoger la primera empresa.

Modo Sintético – geométrico

Para responder esta pregunta ubicándose en este modo, el estudiante puede dibujar dos rectas que representen la situación de cada empresa con los nuevos datos que se definen en base a la pregunta b.

<u>Dibujo</u>

En el siguiente dibujo se muestran dos rectas realizadas en base a los nuevos datos obtenidos por la información entregada en el enunciado, siendo la recta roja que corresponde al costo con el descuento de la empresa n°2 y la recta azul al costo con el descuento de la empresa n°1.



En este caso, las rectas dibujadas tienen pendientes diferentes que las representadas en la parte a, dado que ambas disminuyen en un 10% por así decirlo, debido al descuento en el costo por hora, lo que hace que el costo final en cada situación disminuya.

En base a lo realizado anteriormente, se puede concluir que, dentro de las 4 primeras horas de reparación, a José le conviene escoger la Empresa 2, debido a que los costos de la reparación están por debajo de los costos de la Empresa 1, esto se puede constatar en la gráfica. Sin embargo, le conviene escoger la empresa 1 cuando las horas de trabajo son mayores o igual a 5.

Modo Analítico – estructural

Al igual que en el caso anterior (pregunta a), al posicionarse en este modo de pensar, es posible que los estudiantes logren realizar una comparación entre las pendientes y los inicios de las rectas que representan.

Se tiene que la pendiente de la recta que representa la situación de la empresa 1 es menor que la de la empresa 2 (720 pendiente de la empresa 1 v/s 1.260 pendiente de la empresa 2).

Por lo tanto y por no empezar en el origen, la recta que representa al costo de la empresa uno con su respectivo descuento, muestra que su servicio en el primer tramo posee un costo más grande al de la empresa dos en el mismo momento. Luego de que ambas rectas se intersectan la situación cambia, debido a cómo va aumentando la pendiente de la recta que representa el costo del servicio de la empresa 2, luego de pasadas las 4 horas de reparación, a José le conviene escoger la empresa 1.

Pregunta 3

a. **Observe la siguiente imagen. ¿Se podría decir que en la mesa de pool hay tres bolas colineales? Argumente su respuesta.**

El objetivo de esta pregunta es que los estudiantes recuerden el concepto de *colinealidad* y que puedan transitar entre los modos SG y AE para poder responder. Igual que en las preguntas anteriores se presentan las diferentes posibles repuestas que pueden dar los encuestados.

Modo Analítico – estructural

Si se responde la pregunta transitando a este modo de pensamiento, el estudiante debe ser capaz de utilizar propiedades de la recta dentro de su argumento.

En este caso, el estudiante podría ubicar (o estimar) el centro de cada bola y trazar un segmento de recta que pase por tres de estos centros, así se hallarán 3 bolas colineales. Y/o justificar además su respuesta en base a la pendiente que se genera entre dos bolas, la cual debiese ser igual a la que se generara con una tercera (propiedad), lo que permitiría asegurar que las 3 bolas son colineales.

Modo Sintético – geométrico

Para situarse en este modo, el estudiante puede observar la imagen y solo estimar si existen tres bolas colineales.

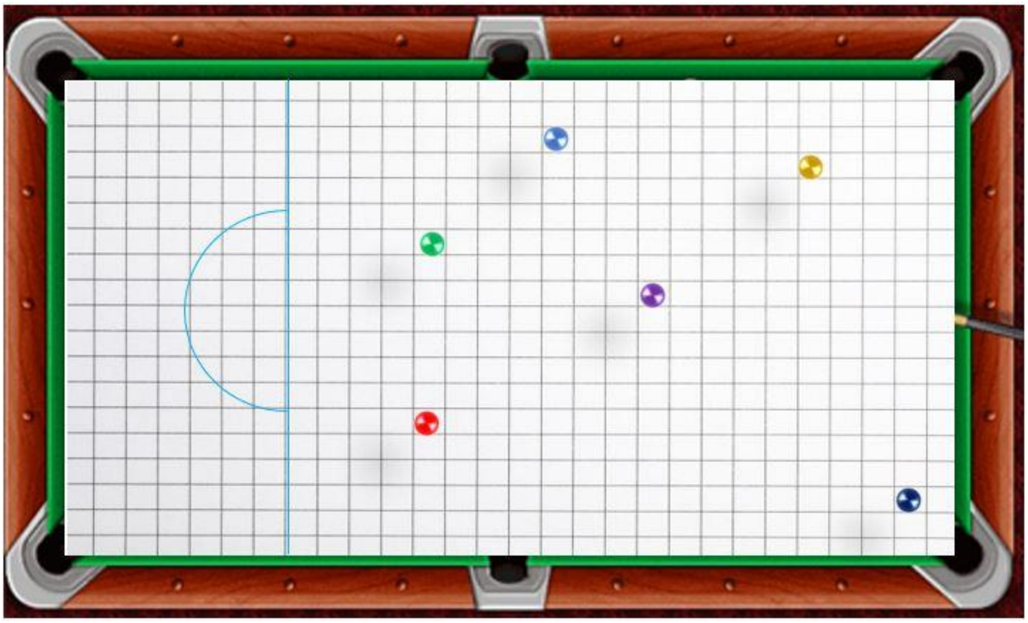
El estudiante podría solo mirar detenidamente la imagen y responder en base a lo que observa o bien, puede posicionar una regla (o cualquier objeto – recto – parecido) sobre la imagen de la mesa de pool y observar si los centros de tres bolas pertenecen a esa recta imaginaria, trazada por la regla o el objeto escogido.

Modo Analítico – aritmético

Quizá este modo no sea uno de los más transitados en esta pregunta, pero de igual manera se puede contestar a través de él.

En este caso, el estudiante podría dibujar un plano cartesiano sobre la mesa de pool, tal que la posición de cada bola esté representada por pares ordenados, para luego determinar la ecuación de recta donde existan al menos tres pares ordenados que cumplan con ella.

b. **Observe la siguiente imagen y ubique una(s) bola(s) en el lado izquierdo que sea(n) colineal(es) a otras dos del lado derecho. Explique con detalles cómo logra estar seguro de la posición de las bolas.**



Para esta pregunta, el objetivo definido es similar al anterior, puesto que se espera que los estudiantes logren recordar la definición de colinealidad y que así transiten entre los modos SG y AE. Se presentan a continuación, posibles respuestas por parte de los estudiantes.

Modo Sintético – geométrico

Al responder desde este modo, el estudiante podría realizar un procedimiento parecido al anterior, es decir, ubicar una regla o un objeto recto que simulará una recta que pase por dos bolas del lado derecho y observar si se puede posicionar (o dibujar) una bola al costado izquierdo de la imagen.

Otra forma de responder es que el estudiante podría unir algunas bolas a mano alzada y analizar si existe la posibilidad de que se pueda dibujar una bola en el lado izquierdo que sea colineal a dos o más del lado derecho.

Modo Analítico – estructural

Parecido al ejercicio anterior (parte a), para responder transitando a este modo, el estudiante debería utilizar propiedades de la recta y al igual que antes es necesario recordar la definición de colinealidad.

En este caso, la misma cuadrícula dibujada en la mesa de pool le permite reconocer la dirección de la recta a través de la pendiente entre dos bolas y así mismo la posibilidad de determinar la posición de una tercera en el sector izquierdo de la mesa.

Por ejemplo, si se observa las bolas azul y verde se puede mencionar que ambas pertenecen a una recta con pendiente 1 puesto que, si desde la bola azul se cuentan 4 cuadrados a la izquierda y 4 hacia abajo, se llega a la posición de la bola verde. Por lo cual, para encontrar una bola colineal a éstas en el sector izquierdo de la mesa, el estudiante debería mantener la pendiente, y contar en el sentido adecuado ya sea 4 izquierda- 4 abajo o 6 izquierda - 6 abajo tal que le permita posicionar una bola en la zona indicada. Es así como se emplea la propiedad de igual pendiente y un punto en común.

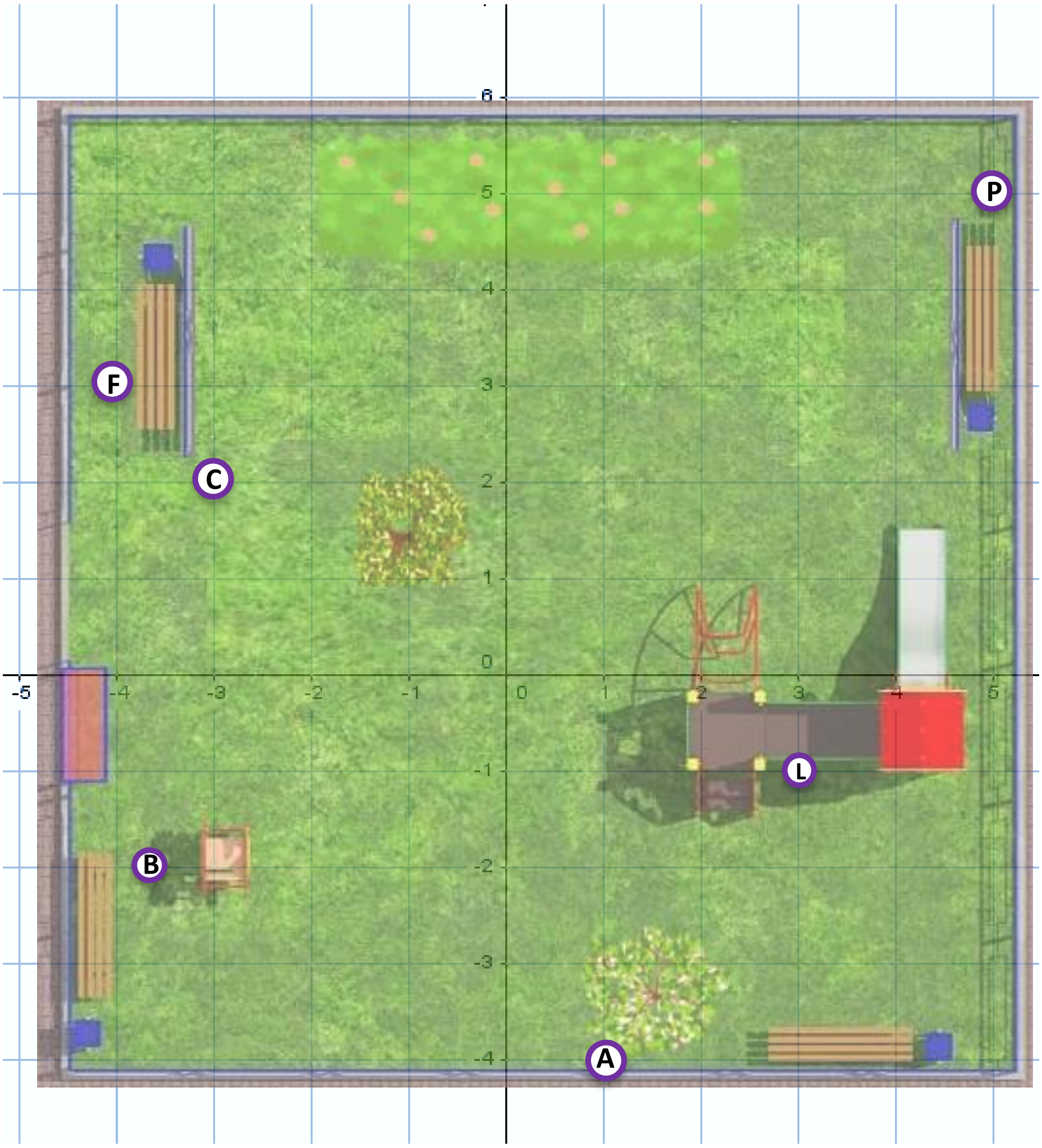
Modo Analítico – aritmético

Con respecto a transitar a este modo para responder la pregunta, el estudiante puede utilizar la misma cuadrícula puesta sobre la mesa de pool, solo bastaría con agregar los ejes cartesianos de tal forma que le facilite transformar la posición de cada bola en un par ordenado. Puede escoger un par de pares ordenados tal que la recta pase por la zona izquierda de la mesa de pool, y luego determinar la ecuación de la recta e indicar el valor de la primera coordenada del par que desea ubicar al lado izquierdo de la mesa de pool, luego reemplazarlo en la ecuación para así determinar la ubicación de la bola solicitada en el enunciado.

Pregunta 4

Seis amigos juegan a las escondidas en una plaza. Pablo es el que está contando para luego pillar a sus amigos. El problema para Carlos es que cuando se quiso esconder atrás de una banca, Fernando ya estaba ahí.

Ayúdale a Carlos a encontrar la dirección en la que debe ir para salir de la visual de Pablo y así estar seguro. Describa el o los movimientos que debe hacer Carlos rápidamente en los 3 segundos que le quedan a su amigo por contar.



El objetivo de esta pregunta está definido en base a la capacidad de los encuestados de recordar la definición de colinealidad y relacionarla a un contexto cercano.

Modo Sintético – geométrico

En este caso, se espera que el estudiante observe la imagen y trace sobre ella el segmento de recta que le permite a Carlos quedar detrás del árbol (tomando como referencia la posición de Pablo) y así quedar fuera de la visual de Pablo. Es así como quedarían alineado Pablo, el árbol y Carlos.

Modo Analítico – estructural

Por otra parte, al responder transitando a este modo, el estudiante deberá lograr concluir que el "salir de la visual de Pablo" significa que Carlos debe estar "colineado" con los objetos en la plaza, es decir, debe pertenecer a la misma recta que dos o más elementos presentes, ya que así estará bien escondido y protegido por esos elementos.

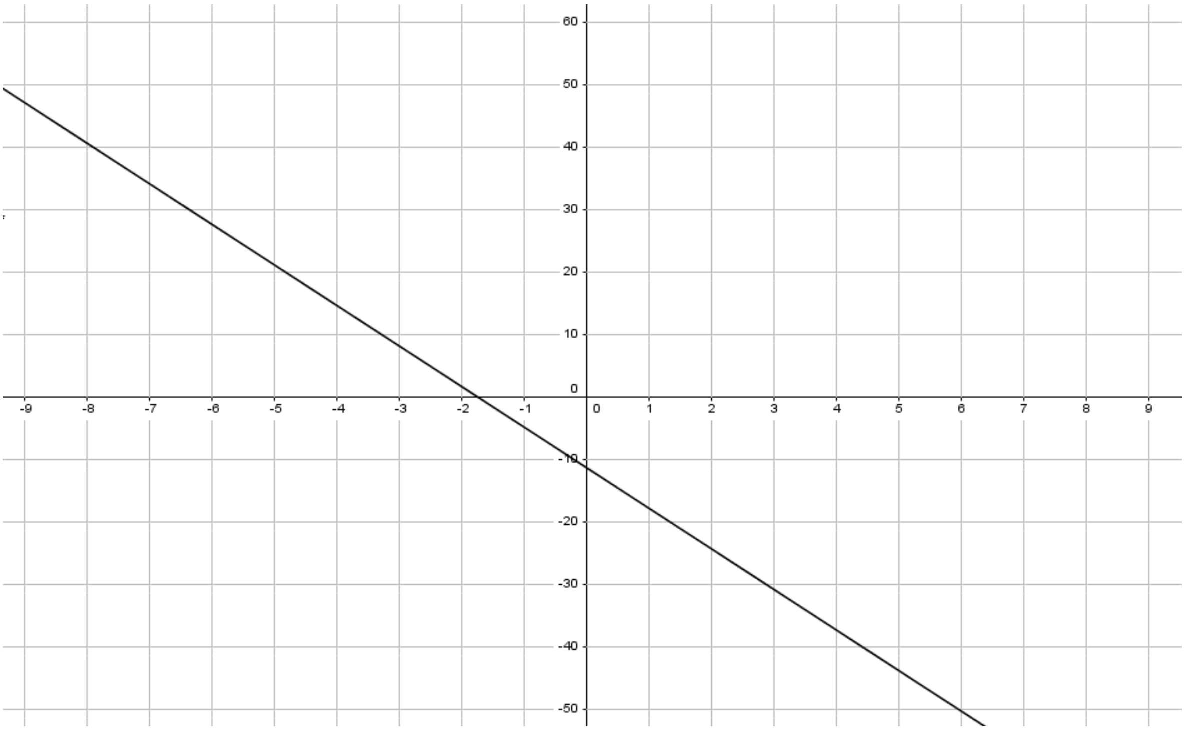
Por ejemplo, si Carlos se esconde detrás del árbol (tomando como referencia la posición de Pablo), quedará posicionado en la misma recta a la que pertenecen Pablo y el árbol, por lo que ese lugar podría ser un buen escondite para él.

Modo Analítico – aritmético

En este caso, el estudiante podría indicar los pares ordenados en el que está Pablo y el árbol más cercano a Carlos y determinar mediante ecuaciones y fórmulas, el punto en el plano en el que debería esconderse Carlos, asegurándose que estos tres puntos sean colineales.

Pregunta 5

Estime la imagen de $x = -6$ para la función que se muestra en el gráfico siguiente. Explique con detalles cómo lo resolvió.

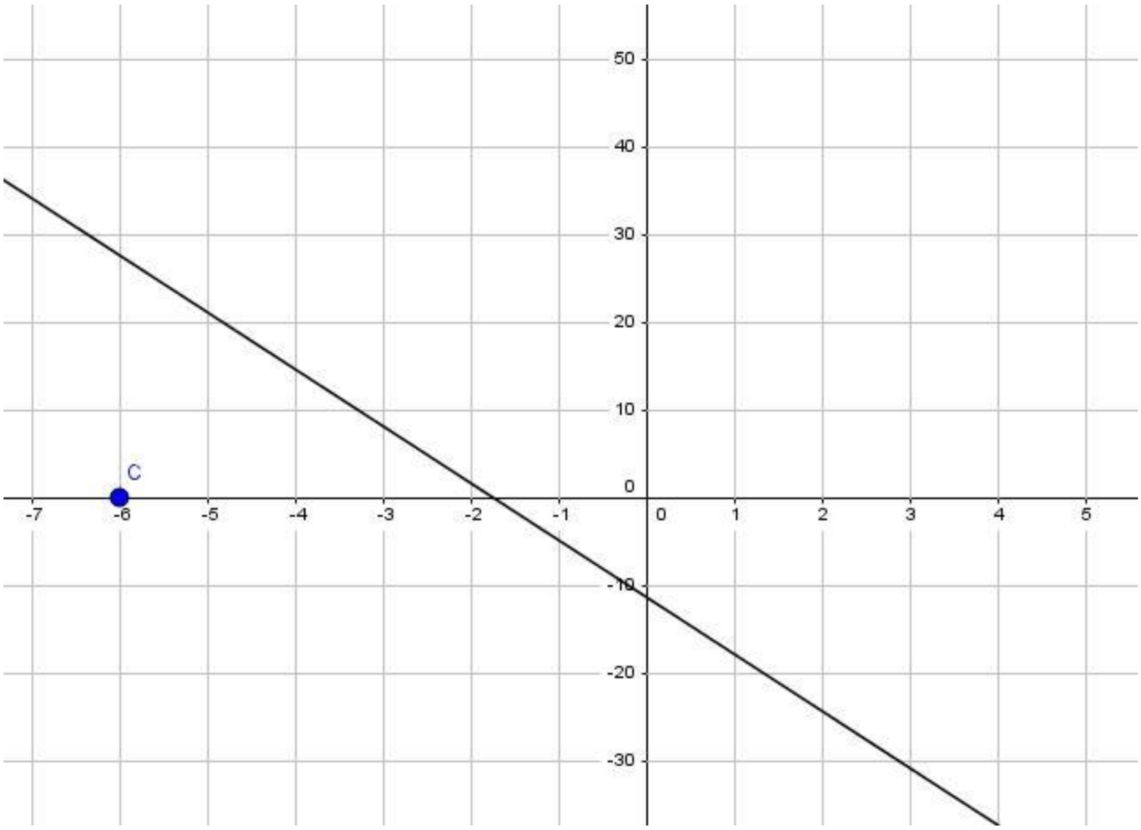


Modo Sintético – geométrico

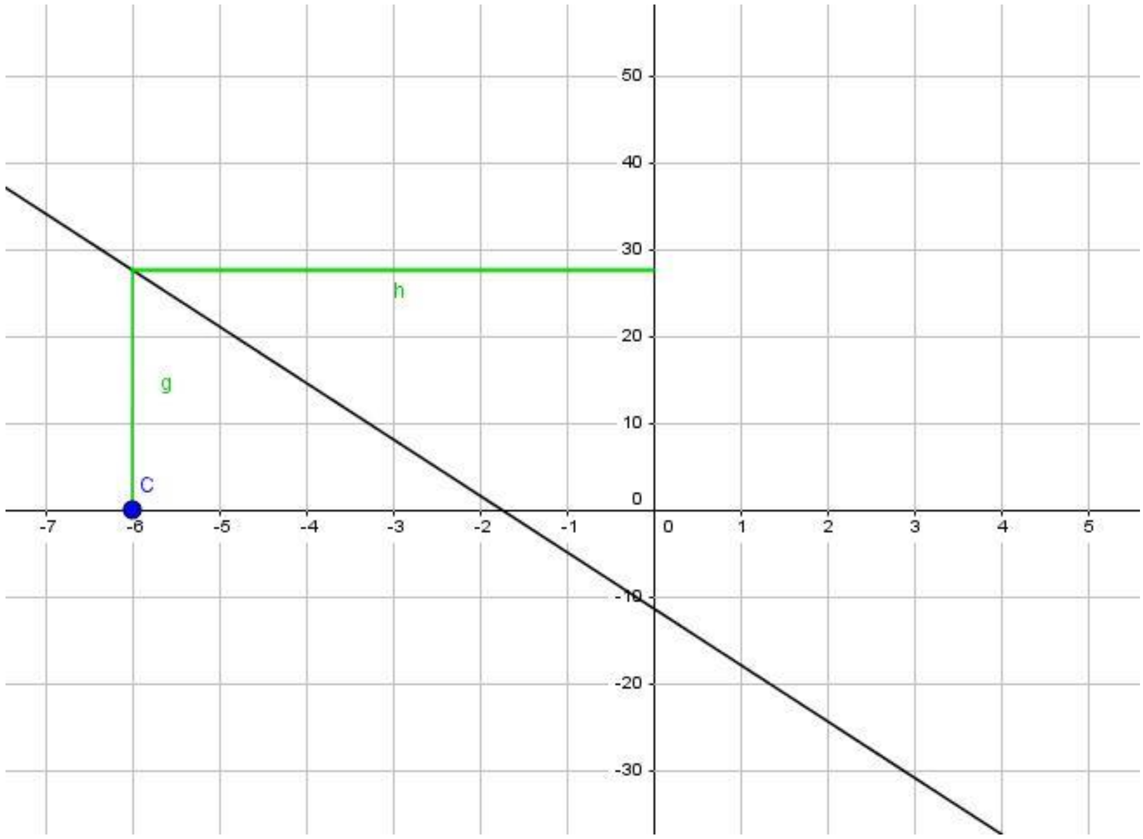
Al responder desde este modo, el estudiante podría observar el gráfico y determinar un valor aproximado de la imagen de x=-6 para la recta trazada.

En otro caso, el estudiante podría realizar lo siguiente

1) Primero, ubicará el x = -6 en el eje de las abscisas, es decir:



2) Proyectar el punto en la recta y luego sobre el eje vertical (eje Y)



Una vez realizado lo anterior, se estima la imagen de x = -6. Se puede observar que el valor está en el tramo entre 20 y 30; de hecho, es posible afirmar que la imagen pedida es un valor del intervalo]25,30[. Por ejemplo, podría decir que el valor es 28 y estará en lo correcto como cualquier otro valor que esté dentro del intervalo.

Modo Analítico – aritmético

Se transita a este modo si el estudiante reconoce la necesidad de conocer la ecuación de la recta graficada. Para esto se tomarán dos puntos que, si bien no son exactos, ayudarán a hallar una respuesta aproximada al problema.

Los puntos están escogidos debido a lo que se puede observar en el gráfico. Estos son: P_1 (0,-11) y P_2 (-3,8).

Luego, si se reemplazan los datos de los pares ordenados definidos anteriormente en la ecuación de la pendiente se tiene que:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{8 + 11}{-3 - 0}$$

$$m = -\frac{19}{3}$$

Siendo:
$x_2 = -3$
$x_1 = 0$
$y_2 = 8$
$y_1 = -11$

Ahora, utilizando la pendiente encontrada se reemplaza en la ecuación de punto-pendiente de la recta, es decir:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 11 = -\frac{19}{3}(x - 0)$$

$$y + 11 = -\frac{19}{3}x$$

$$y = -\frac{19}{3}x - 11$$

Una vez realizado esto, se reemplaza el x = -6 en la ecuación encontrada

$$y = -\frac{19}{3} \cdot (-6) - 11$$

$$y = -19 \cdot -2 - 11$$

$$y = 38 - 11$$

$$y = 27$$

Por lo tanto, la imagen de x = -6 es aproximadamente 27 [8]

Modo Analítico-estructural

Para responder esta pregunta transitando al modo AE, se esperaría que el estudiante pudiese observar la imagen y decir que es una recta y ésta es continua, por lo que la imagen de x= -6 existe.

Ahora requiere de dos puntos que pertenezcan a la recta de tal forma de utilizar el concepto de colinealidad,

[8] La respuesta correcta es y = 27,6196

Supongamos que los puntos A(0, -11) y B(-3,8) los considerado pertenecientes a la recta trazada y faltaría determinar la segunda coordenada del par (-6,y)

Lo primero que se hará es hallar la pendiente del punto AB, es decir:

$$m_{AB} = \frac{8-^{-}11}{-3-0}$$

$$m_{AB} = \frac{19}{-3}$$

$$m_{AB} = -\frac{19}{3}$$

Siendo:

$y_2 = -11$
$y_1 = \ 8$
$x_2 = \ 0$
$x_1 = -3$

Luego, se calcula la pendiente del punto BC, con su respectiva fórmula:

$$m_{BC} = \frac{y-^{-}11}{-6-0}$$

$$m_{BC} = \frac{y+11}{-6}$$

$$m_{BC} = \frac{-(y+11)}{6}$$

Siendo:

$y_2 = -11$
$y_1 = \ y$
$x_2 = \ 0$
$x_1 =$-6

Ahora bien, como se sabe que estos tres puntos pertenecen a la misma recta , entonces se cumple que $m_{AB} = m_{BC}$.

Reemplazando las pendientes obtenidas, se obtiene lo siguiente:

$$m_{AB} = m_{BC}$$

$$\frac{-19}{3} = \frac{-(y+11)}{6} / \cdot -6$$

$$2 \cdot 19 = y + 11$$

$$38 = y + 11 / +^{-}11$$

$$38 +^{-}11 = y$$

$$27 = y$$

Luego, la imagen de x = -6 es 27

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE RESULTADOS

Análisis a posteriori del cuestionario

Como se dijo anteriormente, se aplicó un cuestionario a nueve estudiantes voluntarios que aprobaron los cursos de la línea de Geometría. A los encuestados los llamaremos como E1, E2, E3, …, E9.

Pregunta 1

Si la temperatura a nivel del mar es de 20°C y la temperatura a una altitud de 1 km es de 10°C, exprese la temperatura en términos de la altitud. Suponga que la relación es lineal ¿Cuál es la temperatura a 2,8 km? Resuelva de dos formas diferentes.

<u>Resultados</u>

Como esta pregunta requería que los encuestados la respondiesen de dos formas diferentes, los resultados que se obtuvieron son los siguientes:

<u>Forma 1</u>

Para realizar la primera forma, 8 de 9 estudiantes se posicionaron en el modo analítico-aritmético y realizaron el mismo procedimiento. Dicho procedimiento se traduce en: definir las variables implicadas en el ejercicio, luego determinar los pares ordenados que se podían desprender del enunciado del problema y finalizar con la utilización de la ecuación de punto-pendiente para determinar la ecuación de la recta que representa situación dada.

En la figura 11 que se muestra a continuación, se puede observar la realización del procedimiento detallado anteriormente, recordando que es el mismo que hicieron 8 encuestados.

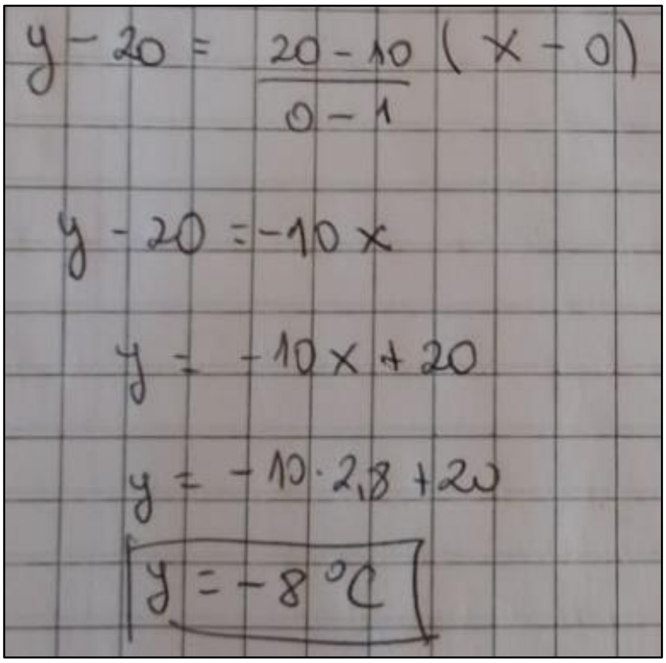


Figura N°10. Muestra cómo el estudiante E4 se sitúa en el modo AA para responder la pregunta.

El estudiante E7 fue el único que al posicionarse en el modo AA para la primera forma, no realizó el mismo procedimiento. Mas bien podemos decir que se posiciona en este modo porque da cuenta de la intención de usar pares ordenados para responder, pero el trabajo realizado no es el adecuado, lo que termina en una respuesta incorrecta.

<u>Forma 2</u>

Para generar una respuesta de una segunda forma, 4 estudiantes se sitúan en el modo AA y 3 de ellos en el modo SG.

Por una parte, tenemos a los estudiantes E3 y E5 que, ubicados en el modo analítico-aritmético, utilizaron la proporcionalidad para responder. Estos mencionan que, por cada 1 km de altura, bajan 10°C de temperatura, lo que les permite utilizar "regla de tres" para obtener así que para los 2,8km bajan 28°C. Luego se le restan esos 28°C a los 20°C para finalmente responder que la temperatura a los 2,8km es de -8°C.

En la siguiente figura N°12, se muestra la respuesta del E3 a modo de ejemplo del procedimiento mencionado anteriormente.

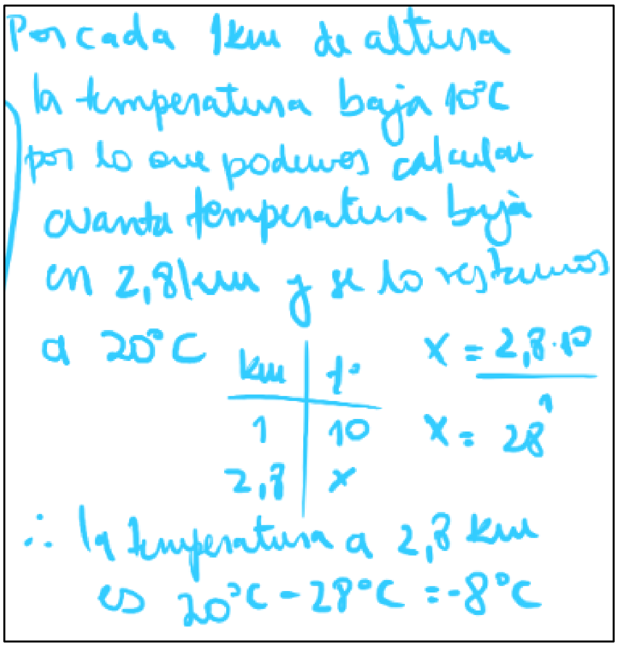


Figura N°11. Muestra cómo el estudiante E3 se sitúa en el modo AA para responder la pregunta.

Por otra parte, se encuentran los estudiantes E6 y E9 que, al igual que en el caso anterior, se posicionan en el modo analítico-aritmético, sin embargo, no realizan el mismo desarrollo ya que se ve involucrado un conocimiento diferente. En este caso, y como vemos en la figura 13, los encuestados responden mediante el trabajo de un sistema de ecuaciones, donde reemplazan los datos que se entregan en el enunciado para obtener la ecuación de la recta que modela la situación, luego reemplazan el valor de la altura dada (2,8km) para hallar la temperatura (en °C) que se tiene a esa altura.

A continuación, se muestra como ejemplo el procedimiento del E9, el cual es el mismo que realiza el E6.

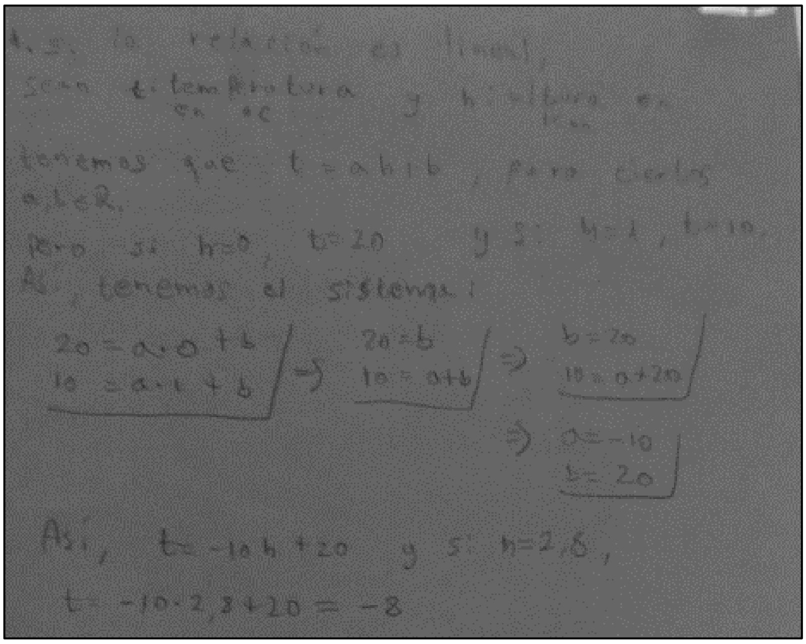


Figura N°12. Muestra cómo el estudiante E9 se sitúa en el modo AA para responder la pregunta.

Para realizar una segunda forma de responder, el estudiante 4 transita al modo SG gracias al articulador “plano cartesiano, ya que utiliza el gráfico para llegar a una respuesta. Con el fin de realizar el gráfico, utiliza los pares ordenados que pudo obtener del enunciado, como lo vemos en su primera respuesta en la cual se posiciona en el modo AA para realizarla (Ver figura N°10). Además, el estudiante realiza un análisis transitando al modo AE pues sabe que por dos puntos pasa una recta, reconociendo así la idea de colinealidad. (Ver figura N°14)

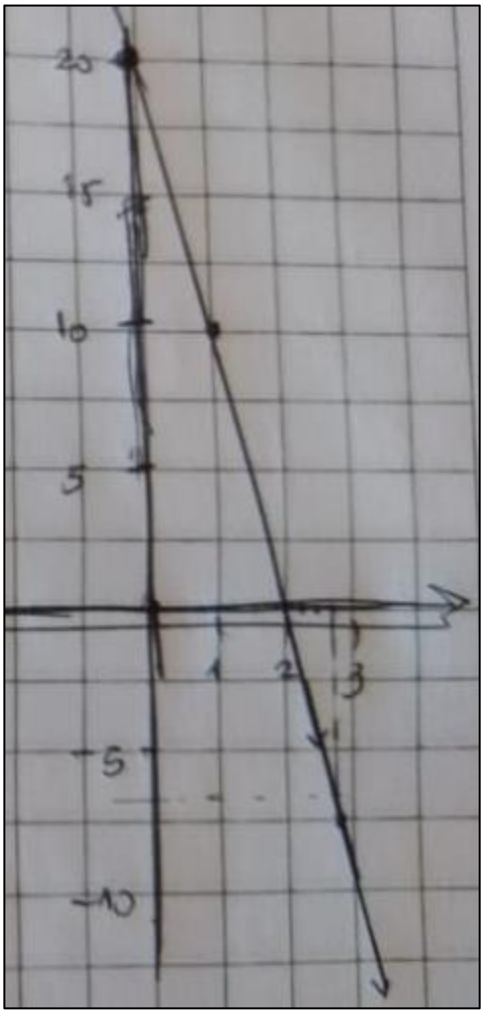


Figura N°13. Muestra cómo el estudiante E4 transita al modo SG para responder la pregunta.

El encuestado E1 solo da cuenta de una forma para resolver el ejercicio y el estudiante E7 intenta responder situado en el modo AA, pero no logra generar una respuesta.

Pregunta 2

José debe mandar a reparar su lavadora, para esto cotiza en dos empresas diferentes de las cuales pudo obtener la siguiente información:

La primera empresa cobra una cantidad fija de 2.400 pesos más 800 pesos por cada hora trabajada.

La segunda empresa no cobra una cantidad fija pero sí cobra 1.400 pesos por hora trabajada.

José recurre a ti para que le puedas ayudar a resolver las siguientes dudas:

a. **¿Cuándo es más económico escoger la segunda empresa?**

b. **Si para el problema que tiene la lavadora de José, en ambas empresas el tiempo mínimo de demora son cuatros horas. Además, recibe un descuento del 10% del valor asociado al tiempo utilizado en la reparación (por hora) en cualquiera de las dos empresas, si es que decide repararla. ¿Qué empresa le convendría escoger?**

¿Podrías ayudarle a José a resolver su problema? Haz un bosquejo y detalla cómo le explicarías.

<u>Resultados</u>

a.

Para esta pregunta, 6 estudiantes se situaron en el modo AA y dos de ellos en el modo SG. Aunque el estudiante E8 se posicionó igual en el modo AA, la respuesta a la que llegó finalmente no es correcta. A continuación, se presentan ejemplos de las respuestas.

En la actividad, el estudiante 2 se sitúa en el modo SG (ver figura N°15) puesto que realiza un bosquejo donde se presentan ambas rectas que representan el costo del servicio de cada empresa según el tiempo. Luego, señala el intervalo de tiempo en que cada empresa es más conveniente al decir *“por la pendiente, primero es más económico ir a la II. Para luego de los 4 es “mejor” ir a la I”.* Todo esto lo hace gracias a la información que pudo extraer del gráfico a partir de la preimagen del punto donde se intersectan las rectas.

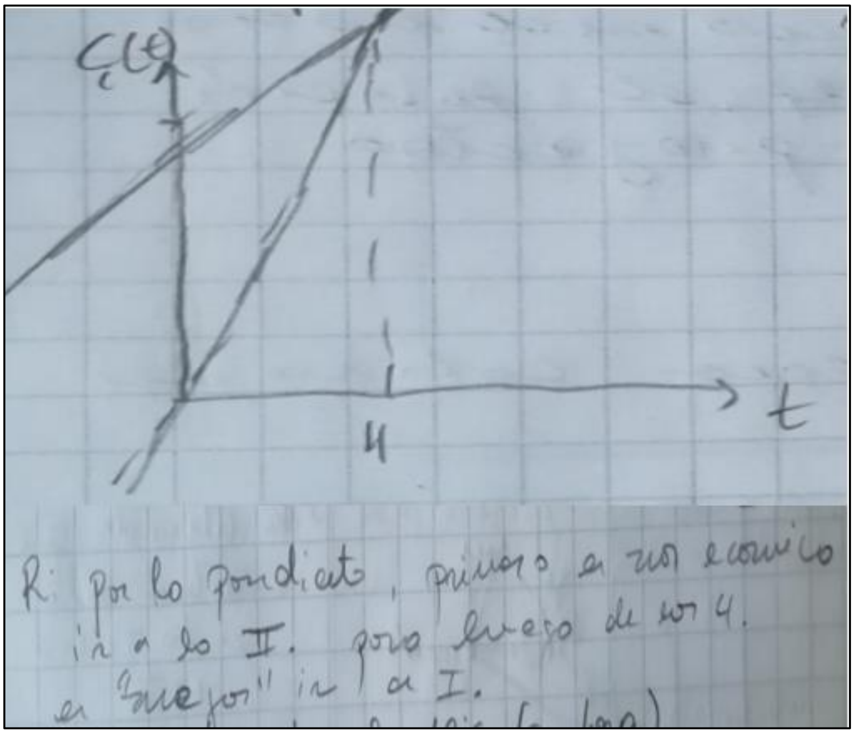


Figura N°14. Muestra como el estudiante E2 se sitúa en el modo SG para responder la pregunta.

Podemos observar en la figura N°16 que, en un comienzo, el estudiante E3 se sitúa en el modo AA, puesto que primero presenta las ecuaciones de las rectas que representan los costos del servicio impartido por cada empresa, luego resuelve un sistema de ecuaciones mediante procedimiento algebraico -método de igualación- para determinar el tiempo (en horas) y luego el costo donde ambas ecuaciones coinciden. Una vez hecho esto, el estudiante transita al modo SG ya que utiliza la información obtenida para generar un gráfico, el cual le permite reconocer cuál empresa es más económica de acuerdo con el tiempo transcurrido, es así como señala que *"Es más económico escoger la segunda empresa cuando las horas de trabajo sean menos de 4".*

Por otro lado, el estudiante destaca que *"(...) se podrían reemplazar las horas para ir viendo qué es más económico (...)"*, lo que es considerado como otra forma de responder el problema manteniéndose en el modo analítico-aritmético ya que, sugiere reemplazar en las ecuaciones algunos valores (horas) y comparar resultados.

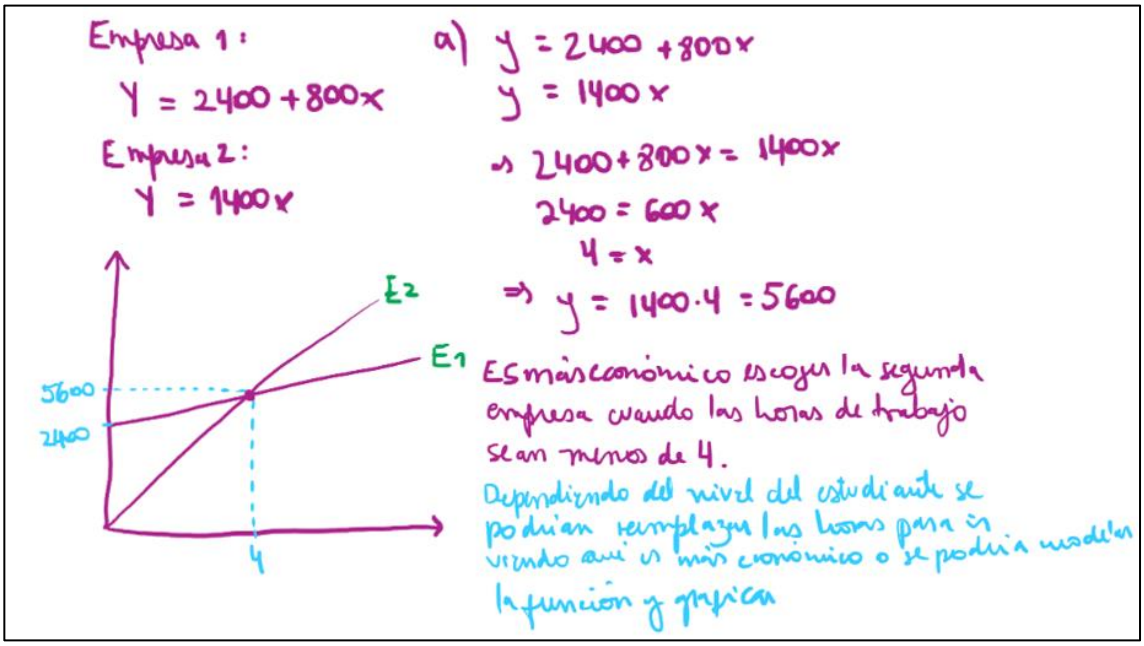


Figura N°15. Muestra como el estudiante E3 transita entre los modos AA y SG para responder la pregunta.

Como se muestra en la figura N°17, el estudiante E5 responde el ejercicio posicionándose en el modo AA, ya que establece las ecuaciones que representan la situación de ambas empresas y luego va reemplazando números de horas en la variable x (horas) plasmándolos en una especie de "tabla de valores", lo que le permite comparar los resultados para hallar qué empresa es más conveniente. Luego de realizar este procedimiento hasta el número 4, el estudiante concluye que *"es más económico escoger la segunda empresa cuando sean 3 horas o menos las trabajadas"*.

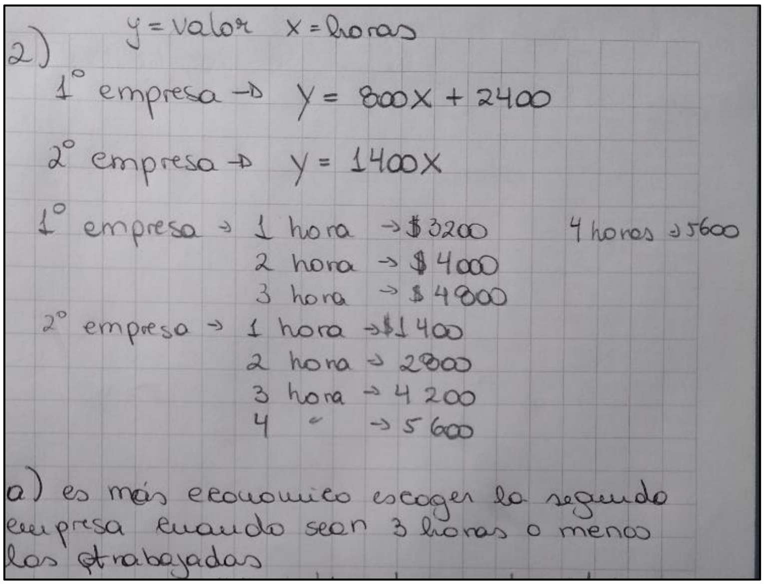


Figura N°16. Muestra como el estudiante E5 se sitúa en el modo AA para responder la pregunta.

b.

Para esta pregunta, la mayoría de los estudiantes (8) se posicionan en el modo AA, sin embargo, dos de ellos (E6 y E8) no logran responder de forma correcta.

El estudiante E3 inicialmente se posiciona en el modo AA, puesto que determina las ecuaciones de las rectas que representan los costos de la reparación en ambas empresas, luego resuelve un sistema de ecuaciones (mediante el método de igualación) para hallar en qué número de horas el valor del servicio es el mismo en ambas empresas. Una vez realizado esto, el estudiante transita al modo sintético-geométrico cuando hace uso de la información obtenida para construir un gráfico (como se muestra en la figura 18), el cual le permite concluir cuál empresa es más conveniente de acuerdo con el tiempo transcurrido en la reparación, es así como el estudiante señala que: *"La E1 es más conveniente si se demoran más de* $4,\overline{4}h$ *y la E2 es más conveniente si se demora menos de* $4,\overline{4}h$*"*. Además, en el enunciado se afirma que en ambas empresas como mínimo se demorarán 4 horas en la reparación, por lo que el estudiante analiza nuevamente la información extraída del gráfico (SG) para concluir que: *"como <u>mínimo</u> se demorarán 4hr yo le recomendaría la E1 pues es probable que se demore más de* $4,\overline{4}h$ *y si se demora más de 4 y menos de* $4,\overline{4}h$ *no es tanta plata de diferencia a la que se ahorraría si se demoran 5h."*

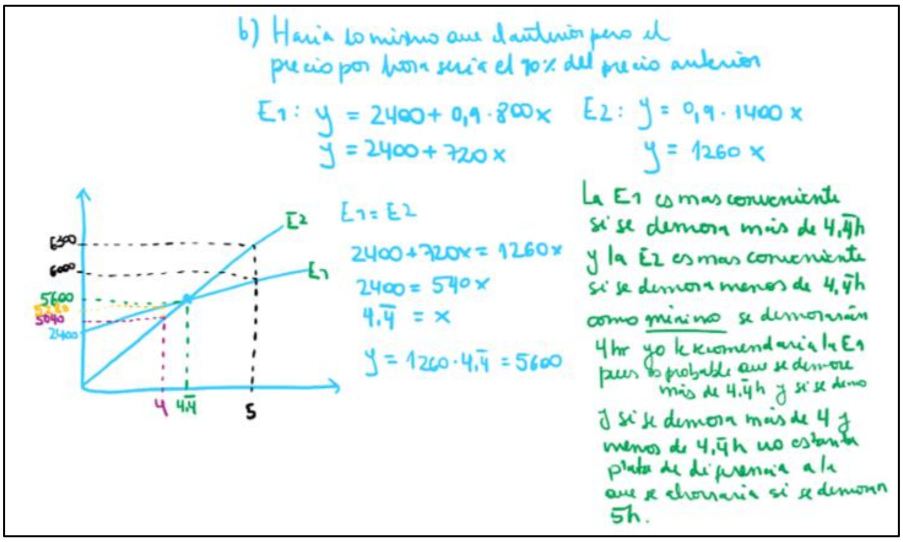


Figura N°17. Muestra como el estudiante E3 transita entre los modos AA y SG para responder la pregunta.

Se observa en la siguiente figura que el estudiante E6 muestra claras evidencias que maneja el objeto matemático posicionándose en el modo analítico-aritmético, pero no logra llegar a una respuesta correcta, puesto que para determinar qué empresa le conviene escoger a José con el descuento del 10%, reemplaza el número 4 en las horas de trabajo en las ecuaciones que representan los costos de ambas empresas, lo que le da el mismo valor que en el ejercicio anterior, ya que las expresiones que determinó no presentaban el descuento por hora. Lo anterior, lo llevó a concluir que *"En este caso, no importa cual empresa escoja, ambas le convienen"*

b) Como el tiempo de demora mínimo es de cuatro horas, entonces ambas expresiones quedan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} Empresa\ 1: &\quad Y = 2.400 + 800 * 4 \Rightarrow Y = 5.600 \\ Empresa\ 2: &\quad Y = 1.400 * 4 \Rightarrow Y = 5.600 \end{aligned}$$

El descuento se realizar por horas y ambas trabajan la misma cantidad de horas, así que el descuento será el mismo.

En este caso, no importa cual empresa escoja, ambas le convienen.

Figura N°18. Muestra como el estudiante E6 se sitúa en el modo AA para responder la pregunta.

Por otro lado, el estudiante E8 responde la pregunta ubicándose en el modo AA pues presenta las ecuaciones que muestran el costo del trabajo de cada empresa y luego hace uso de un sistema de ecuaciones (el cual resuelve con el método de igualación) para determinar en qué número de horas el costo del servicio de ambas empresas coinciden.

Su procedimiento completo está correcto, pero al concluir no lo hace de forma acertada ya que, afirma que *“la 2° empresa conviene cuando pasan* $4,\overline{4}$ *si le dan un 10% de descuento”.* (Ver figura N°20)

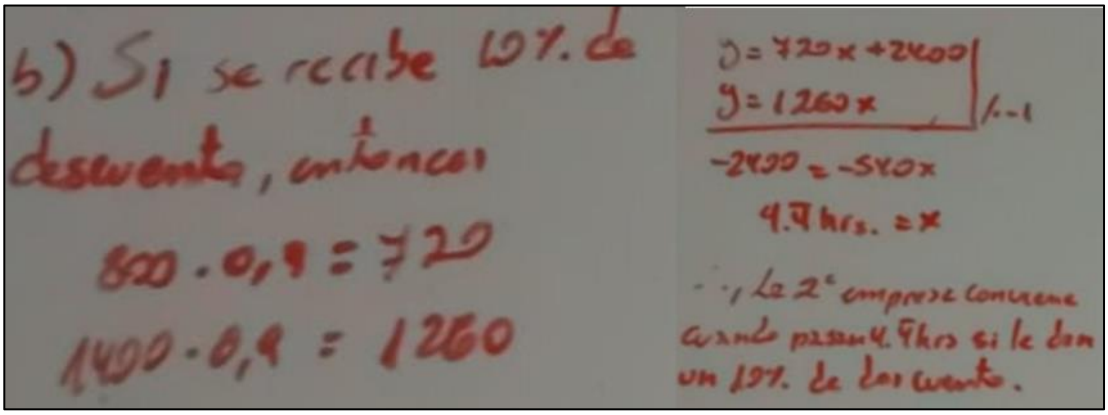


Figura N°19. Muestra como el estudiante E8 se sitúa en el modo AA para responder la pregunta.

Pregunta 3

a. **Observe la siguiente imagen. ¿Se podría decir que en la mesa de pool hay tres bolas colineales? Argumente su respuesta.**

Resultados

Los estudiantes E3, E4, E5, E6, E7 y E8 abordan este ejercicio principalmente transitando al modo analítico-estructural. Esto se debe a que, al generar una respuesta, hacen alusión a la definición de colinealidad.

Los E4, E6 y E7 realizan una respuesta transitando hacia el modo AE, a continuación, se muestra la respuesta de uno de ellos como ejemplo debido a que los tres presentan planteamientos similares.

En este problema, podemos notar que el estudiante E6 (figura N°21), posicionado inicialmente por el enunciado en el modo SG, hace el intento por transitar al modo analítico-estructural, y afirmamos que es solo un intento puesto que no justifica su respuesta con propiedades sobre la recta. Sin embargo, hace énfasis en el que 3 puntos deben pertenecen a una misma recta para ser colineales, luego lo plantea desde el contexto del problema al mencionar que tres bolas de pool son colineales si *"sus centros pertenecen a una misma recta"*. Y siguiendo la definición anterior, menciona que traza segmentos sobre tres bolas las cuales sus centros pertenezcan al segmento.

Primero, considero la colinealidad de 3 puntos si estos pertenecen a una misma recta, en el caso de las bolas de pool, considero 3 bolas colineales si sus centros pertenecen a una misma recta. Entonces, como se está haciendo una proyección de las bolas 3D en un dibujo 2D, intento trazar segmentos sobre 3 bolas, donde los centros de estas pertenezcan al segmento.

Dicho esto, encontré las siguientes ternas:

Figura N°20. Muestra como el estudiante E6 transita al modo AE para responder la pregunta.

Por su parte, los estudiantes E3, E5 y E8 se posicionan fundamentalmente en el modo SG, pero aun así transitan al modo AE para complementar el análisis que les permitirá confeccionar la respuesta. Como se muestra en la siguiente figura N°22 que representa la respuesta del estudiante 8 a modo de ejemplo.

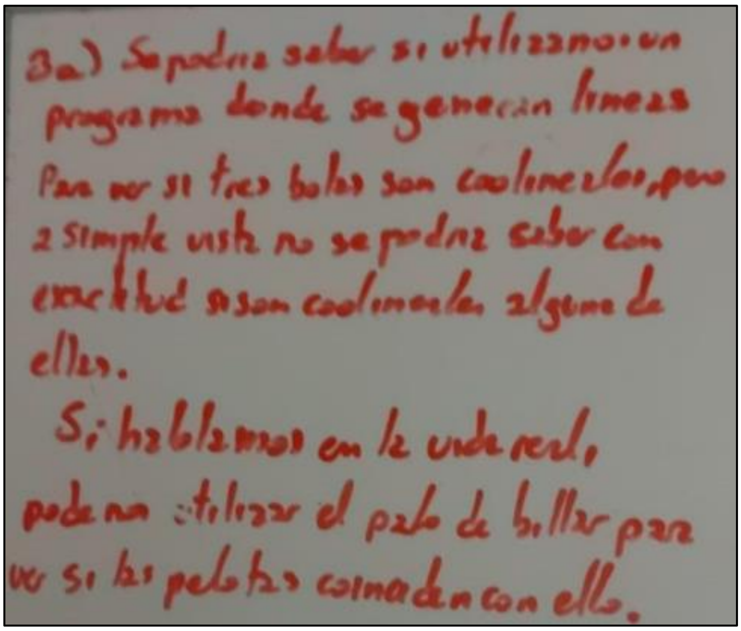


Figura N°21. Muestra como el estudiante E8 transita entre los modos SG y AE para responder la pregunta.

Se observa entonces, que el estudiante 8 tiene la intención de dibujar rectas (SG) en la mesa de pool para determinar si alguna bola pasa por alguna de ellas, ya que a simple vista no se puede decir si son colineales o no. Por otro lado, recomienda *"utilizar el palo de billar para ver si las pelotas coinciden con ello"*, lo que también lo posiciona en el modo SG, además se muestra un pequeño tránsito al modo AE, puesto que evidencia un manejo de la definición de colinealidad al decir que las pelotas deben coincidir en el palo de billar al hacer uso de él.

Los E1, E2 y E9 responden situándose en un modo únicamente sintético-geométrico y es que solo utilizan la imagen dada para dar una respuesta al problema. Como en la siguiente figura, en la cual el estudiante 1 basa su respuesta solo en lo que ve y es que comenta que *"las bolas 1,7 y 5 son colineales al ver la imagen".*

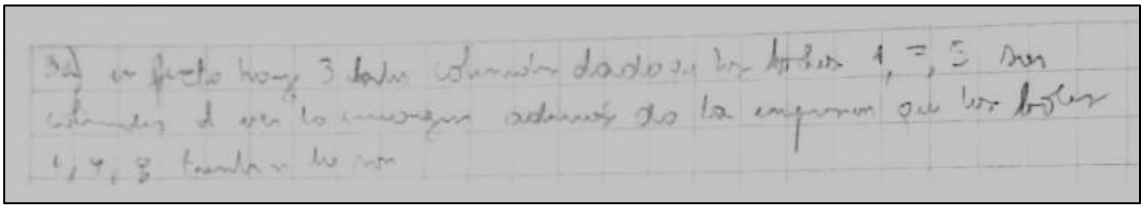
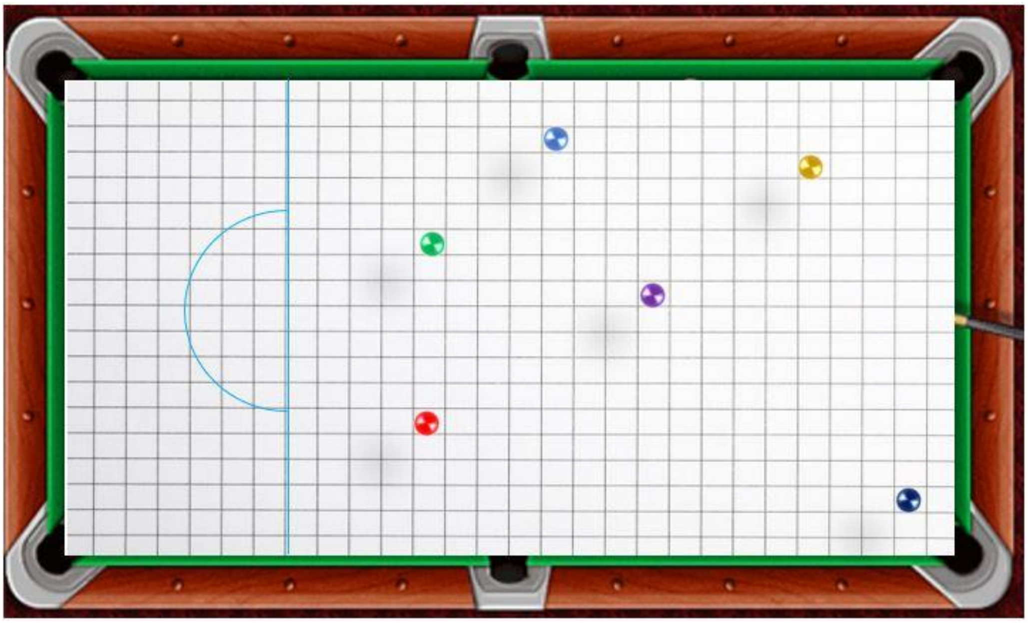


Figura N°22. Muestra como el estudiante E1 se posiciona en el modo SG para responder la pregunta.

b. Observe la siguiente imagen y ubique una(s) bola(s) en el lado izquierdo que sea(n) colineal(es) a otras dos del lado derecho. Explique con detalles cómo logra estar seguro de la posición de las bolas.



Resultados

Los estudiantes E1, E2, E4 y E5 se posicionan en un comienzo en el modo analítico-estructural para responder la pregunta.

Por ejemplo, el encuestado E5 (figura 24) menciona que, para ubicar una bola en el lado izquierdo que sea colineal a otras dos, se debe *"mover la bola roja 6 posiciones a la izquierda, luego se traza una recta para verificar que cumpla con ser colineal con la bola verde y azul".* En el análisis que plantea el estudiante, se sitúa inicialmente en el modo sintético-geométrico, ya que al construir la respuesta primero observa la imagen y describe el movimiento que se debe hacer con respecto a la bola roja para que quede en el lado izquierdo y sea colineal a otras dos. Luego, menciona el trazar una recta para que se cumpla la colinealidad, dando a entender que conoce aquel concepto, lo que se traduce en el tránsito al modo analítico-estructural.

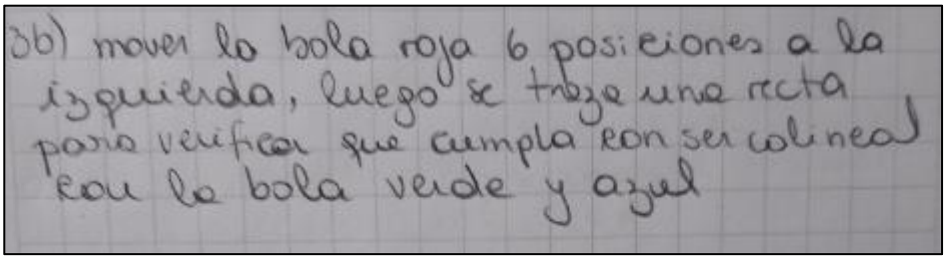


Figura N°23. Muestra como el estudiante E5 transita entre los modos SG y AE para responder la pregunta.

Los estudiantes E6, E7 y E9 generan sus respuestas ubicándose en un modo SG. Y por su lado, el estudiante E3 es el único que intenta hacerlo posicionándose en el modo analítico-aritmético.

En la siguiente figura, se muestra la respuesta del E6, el cual se posiciona en el modo sintético-geométrico para responder a la pregunta (procedimiento similar a los estudiantes E7 y E9). En este caso, el encuestado solo dibuja las rectas que pasan por dos bolas del lado derecho y las proyecta de tal manera que logra encontrar otra bola en el lado izquierdo que sea colineal a las dos anteriores, repitiendo este procedimiento cuatro veces.

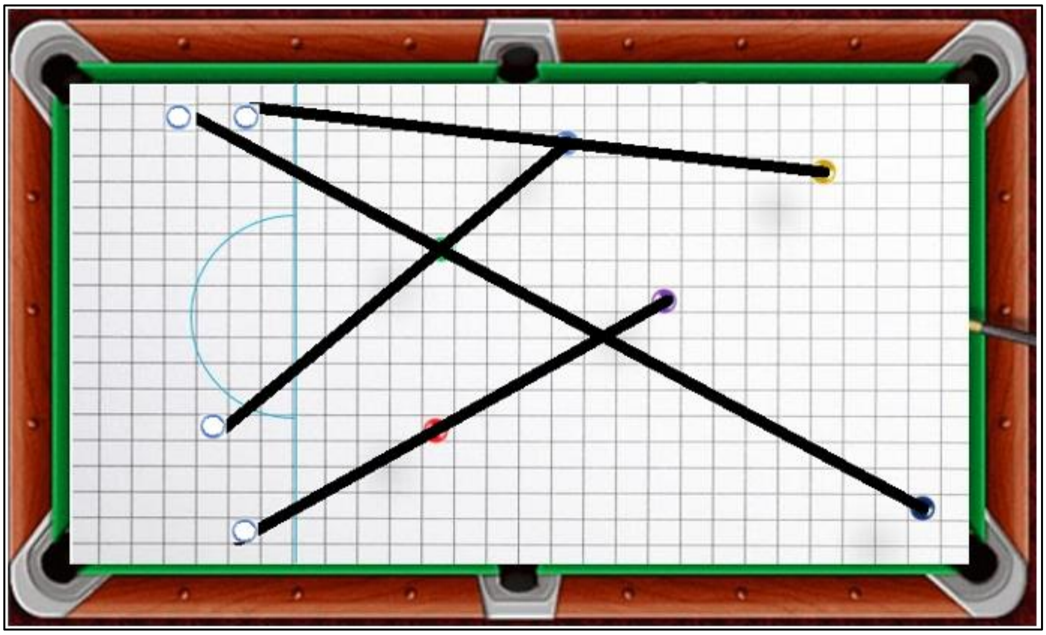


Figura N°24. Muestra como el estudiante E6 se sitúa en el modo SG para responder la pregunta.

Por otro lado, y a pesar de que no se comprendieron bien las instrucciones del ejercicio, el estudiante 3 intentó desarrollar su respuesta ubicándose en un modo AA, ya que recomienda hacer uso de ecuaciones de la recta para poder obtener la altura exacta en la que debiese estar cada bola para que fuesen colineales (AE). Plantea una aproximación de las ecuaciones que logra determinar gracias a un plano que plasma sobre la cuadrícula de la mesa de pool, identificando así pares ordenados en los cuales deberían posicionarse las bolas para que sean colineales a otras dos. Es así como para un caso logra plantear el par ordenado (1,15;8) y para el otro el par (2,5;7). En la siguiente figura se muestra el desarrollo completo que realizó.

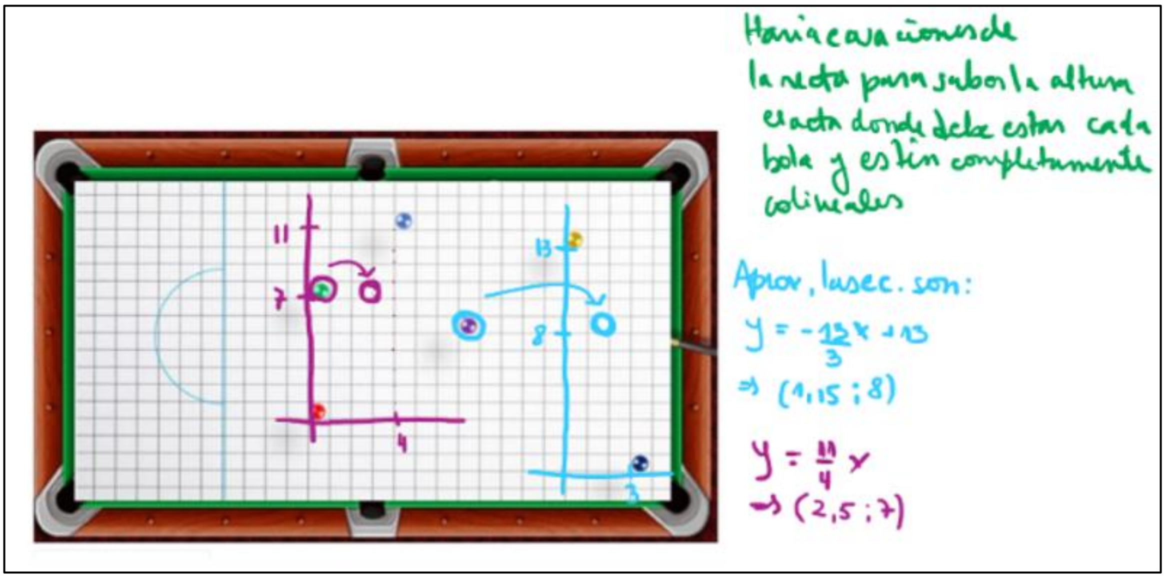


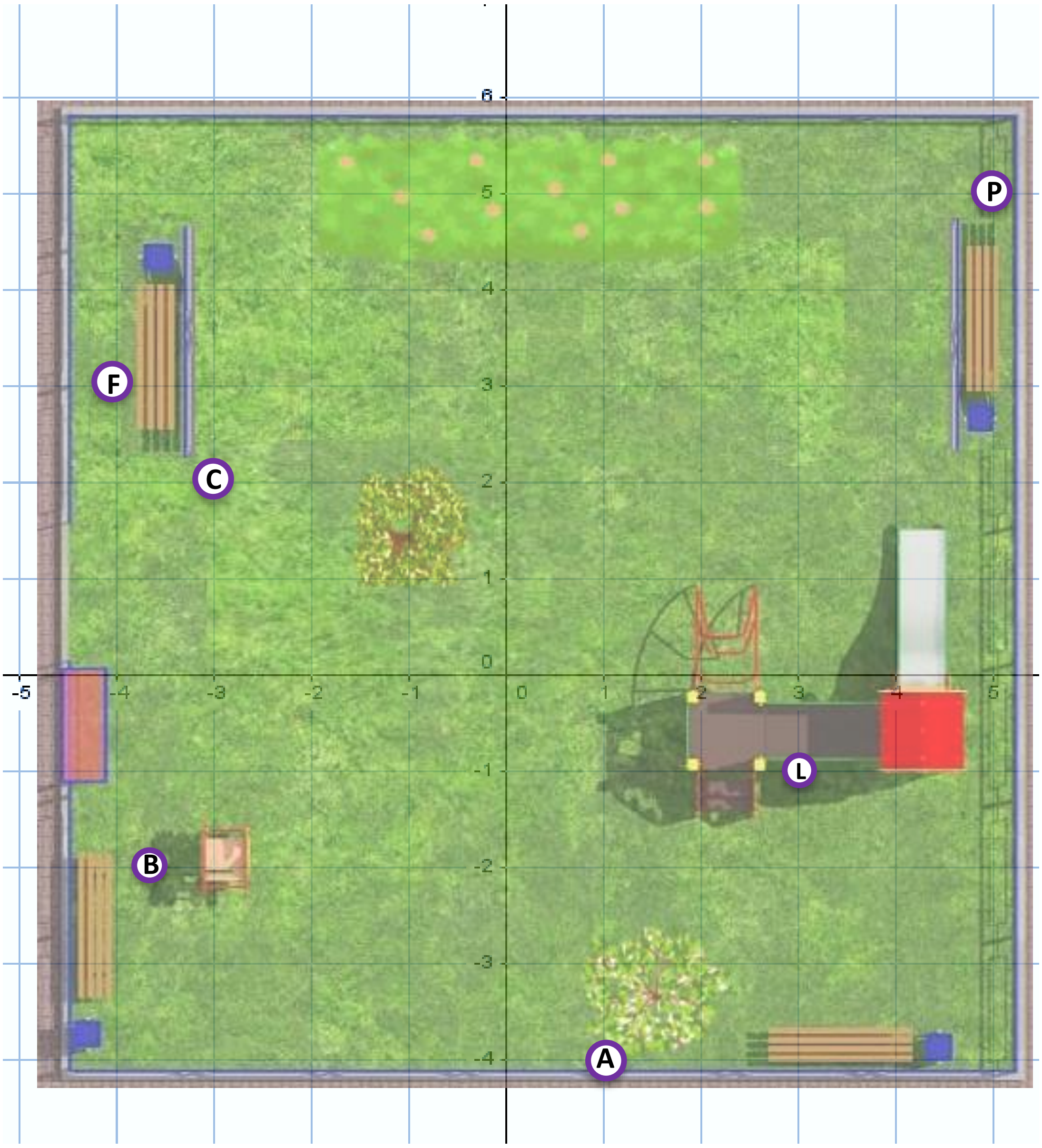
Figura N°25. Muestra como el estudiante E3 se posiciona en el modo AA para responder la pregunta.

El E8 no logra construir una respuesta concreta o definitiva, puesto que no comprende el enunciado del ejercicio, declarando que no está claro para él.

Pregunta 4

Seis amigos juegan a las escondidas en una plaza. Pablo es el que está contando para luego pillar a sus amigos. El problema para Carlos es que cuando se quiso esconder atrás de una banca, Fernando ya estaba ahí.

Ayúdale a Carlos a encontrar la dirección en la que debe ir para salir de la visual de Pablo y así estar seguro. Describa el o los movimientos que debe hacer Carlos rápidamente en los 3 segundos que le quedan a su amigo por contar.



Resultados

Para esta pregunta, todos los encuestados realizan análisis para sus respuestas situándose en el modo sintético-geométrico.

Los encuestados E1, E5 y E7 solo mencionan en qué dirección se debe mover Carlos para esconderse lo más rápido posible (dos pasos a la izquierda, dos para abajo, etc). A modo de ejemplo, se tiene la siguiente figura que muestra las indicaciones realizadas por el estudiante 7, el cual plantea que existen varias opciones para que Carlos pueda esconderse, cabe destacar, que todas las opciones que el E7 menciona son para que Carlos se esconda cerca del árbol que está a un costado de él, según muestra la imagen del enunciado.

Se muestra solo una respuesta ya que, los tres estudiantes realizan un procedimiento de manera similar.

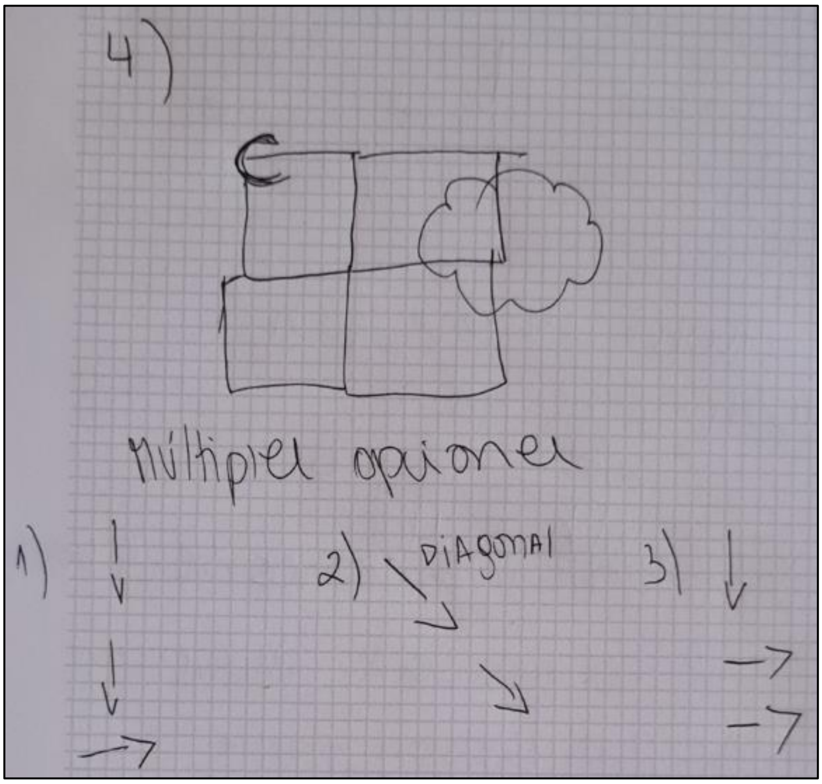


Figura N°26. Muestra como el estudiante E7 se sitúa en el modo SG para responder la pregunta.

Por otro lado, los estudiantes E3, E6 y E9 inicialmente se ubican en el modo sintético-geométrico para dar una respuesta al ejercicio, pues indican dónde debe esconderse Carlos al observar la imagen, sin embargo, complementan su análisis transitando al modo analítico-aritmético, puesto que mencionan a qué par ordenado debe llegar Carlos para estar bien escondido.

Por ejemplo, el estudiante E9 menciona en su respuesta que Carlos debe esconderse detrás del árbol y otorga el par ordenado (1,-1) como el vector que se debe aplicar para que lo anterior suceda.

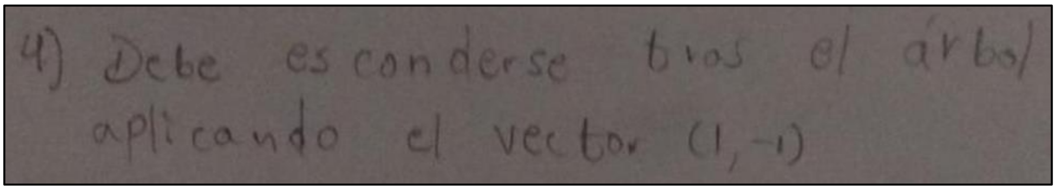


Figura N°27. Muestra como el estudiante E9 transita entre los modos SG y AA para responder la pregunta.

Para el estudiante E8, el procedimiento a analizar fue más relacionado a la realidad. Lo que este menciona es que: *"No sabría cómo Carlos puede llegar a un lugar seguro porque no se sabe si el árbol que tiene cerca se considera seguro o si en esos 3 segundos puede alcanzar de sobra a llegar a los columpios".* Por lo anterior es que no se podría afirmar que se posiciona en algún modo para responder, además el estudiante da a entender que quizá el árbol no es tan seguro como lo serían los columpios.

Otra respuesta para destacar es la que da el encuestado E4. En este caso, se sigue analizando situado desde el modo sintético-geométrico al momento en el que este observa la imagen y menciona que el árbol sería el más cercano para esconderse. Sin embargo, el encuestado menciona que *"Carlos puede esconderse detrás del árbol en el punto (-1;1,5)"*, lo que nos da a entender que transita al modo analítico-aritmético puesto que utiliza un par ordenado para mencionar la posición a la que debería llegar Carlos para esconderse.

Una vez posicionado en el modo AA, el estudiante afirma que *(...), desde el punto de Pablo no lo vería, pues ve el frente del árbol, no detrás".* Con esto, se evidencia que se asoma una leve noción de colinealidad, ya que la afirmación de que al estar Carlos detrás del árbol sale de la visual de Pablo, de cierta manera se relaciona a que el punto donde está el árbol pertenece a la misma recta, por así decirlo, que el punto en el que se esconde Carlos, por lo que su amigo (Pablo) solo podrá ver el árbol, lo anterior muestra el tránsito que realiza el estudiante al modo analítico-estructural.

Además, vuelve a posicionarse en el modo SG cuando realiza un bosquejo donde muestra la posición de los amigos y el árbol y una línea recta o vector que traza entre ellos, haciendo referencia a la colinealidad (AE), reforzando así la respuesta que ya había dado.

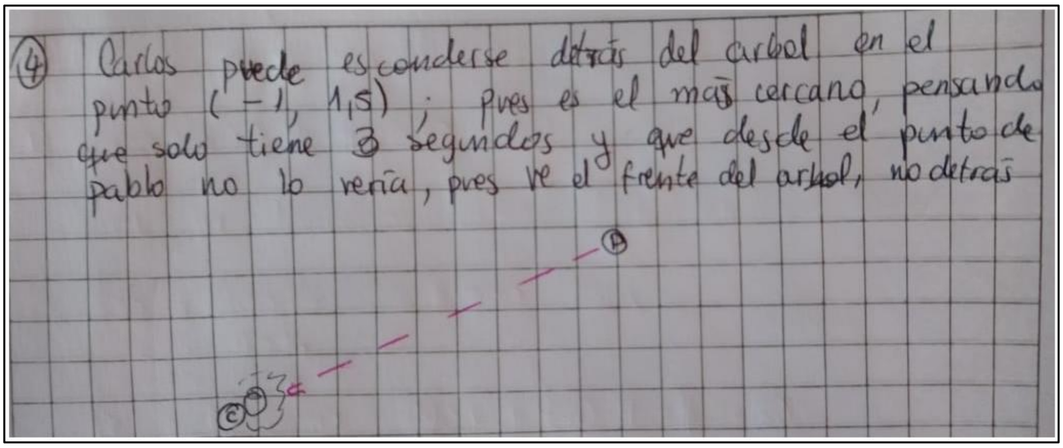


Figura N°28. Muestra como el estudiante E4 transita entre los modos SG-AA, AA-AE y SG-AE para responder la pregunta.

Para finalizar con las respuestas a esta pregunta, tenemos al estudiante E2, el cual se posiciona en el modo SG al hacer uso de la imagen para apoyarse en el análisis y construcción de su respuesta. Ahora, transita al modo AA al complementar su análisis determinando pares ordenados que le permiten a generar las indicaciones para que Carlos se escondiera detrás del árbol. También plantea que *"el campo de visión es un arco de circunferencia",* por lo que podemos inferir que hace un esfuerzo por utilizar el plano cartesiano, pero al mencionar los arcos podemos decir que se escapa un poco de la realidad y no se posiciona en el juego en sí, ya que Carlos perdería más tiempo haciendo este trayecto al no ser en línea recta. (Ver figura 30)

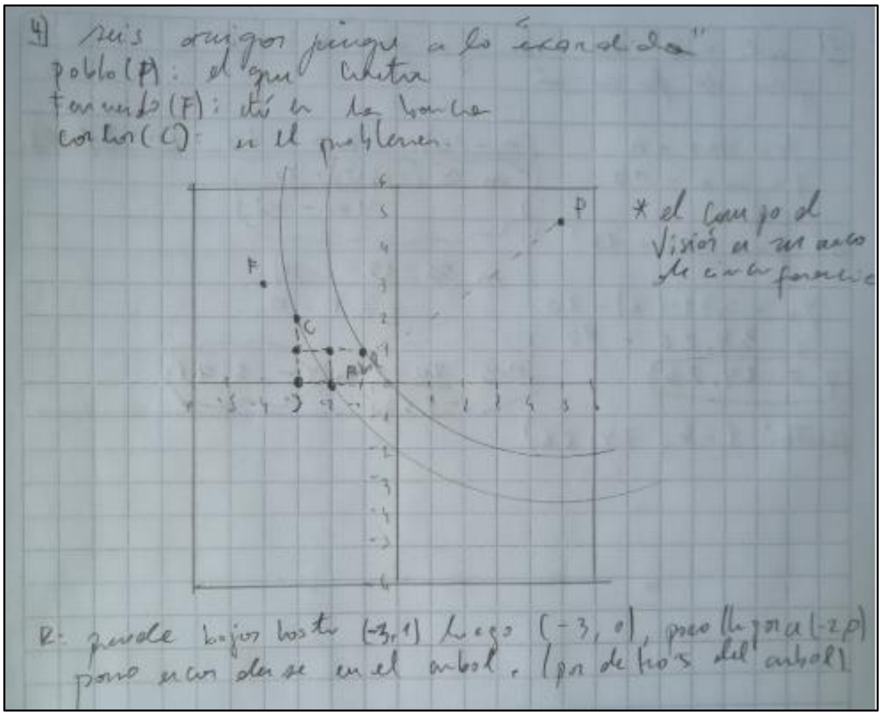
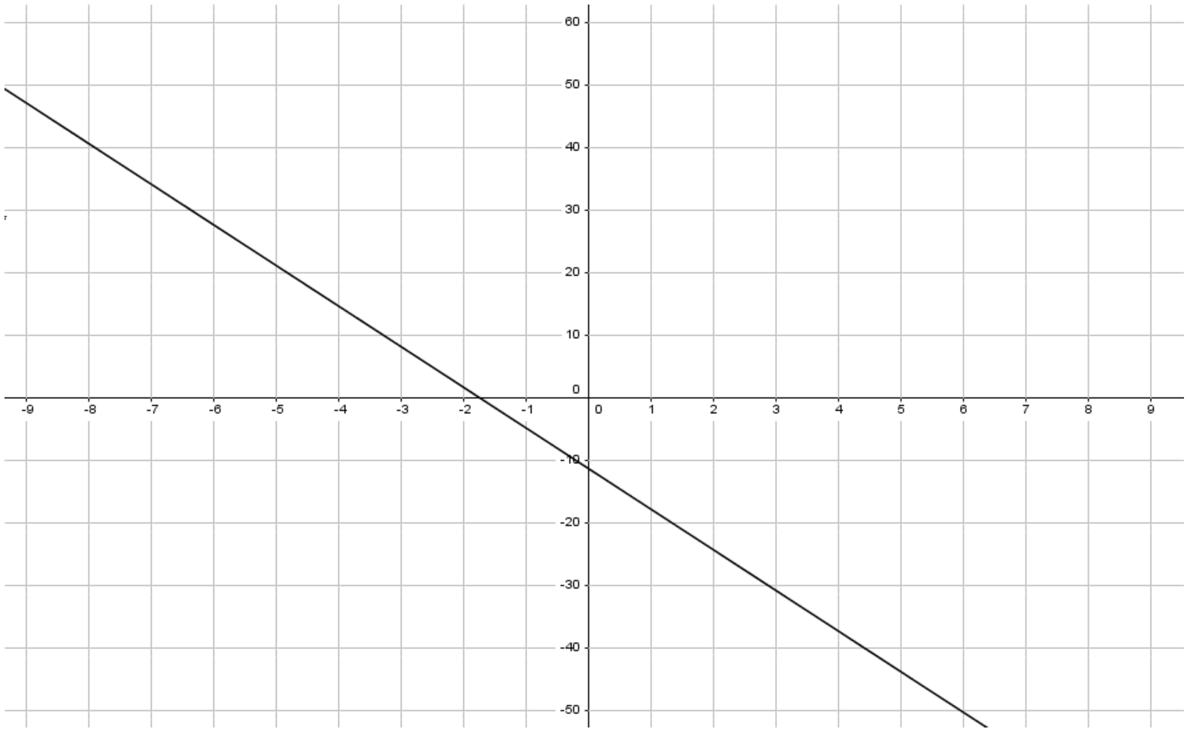


Figura N°29. Muestra como el estudiante E2 transita entre los modos SG y AA para responder la pregunta.

Pregunta 5

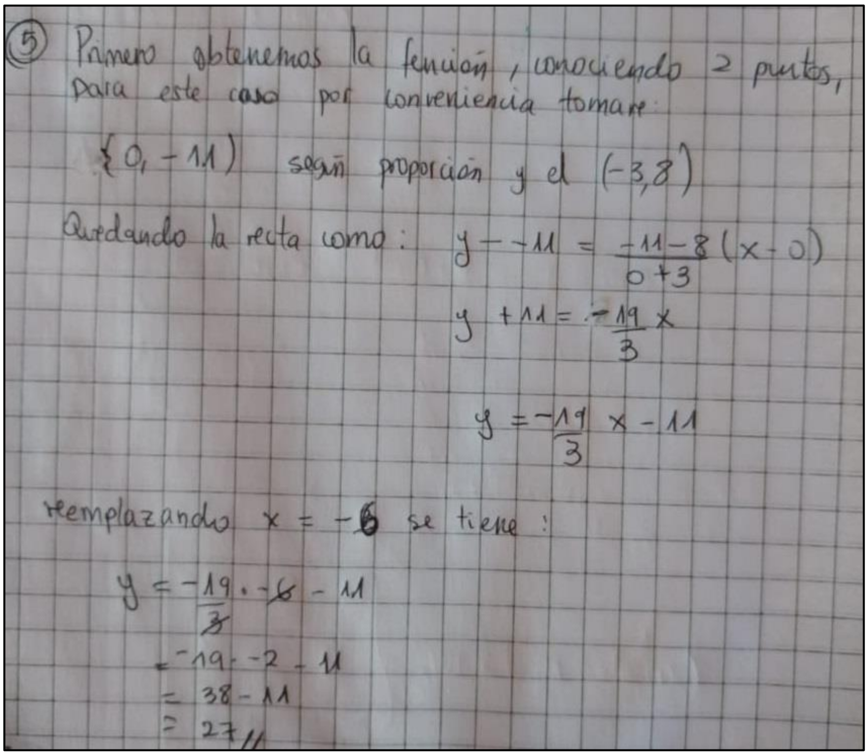
Estime la imagen de $x = -6$ para la función que se muestra en el gráfico siguiente. Explique con detalles cómo lo resolvió.



<u>Resultados</u>

Como el enunciado del problema está dado en un modo sintético-geométrico (gráfico), los E1, E2, E4 y E5 transitan al modo analítico-aritmético para construir una respuesta.

En la figura que se muestra a continuación, el estudiante 4 quiere obtener la ecuación de la recta dada. Para realizar esto escoge dos puntos por conveniencia, luego hace uso de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, la trabaja y logra determinar una aproximación de la ecuación principal para luego reemplazar el x = -6 en dicha ecuación. Obteniendo así que la imagen de x = -6 es aproximadamente y = 27.



5 Primero obtenemos la función, conociendo 2 puntos, para este caso por conveniencia tomaré:

(0, -11) según proporción y el (-3,8)

Quedando la recta como: $y - -11 = \frac{-11-8}{0+3}(x-0)$

$y + 11 = -\frac{19}{3}x$

$y = -\frac{19}{3}x - 11$

reemplazando $x = -6$ se tiene:

$y = -\frac{19}{3} \cdot -6 - 11$

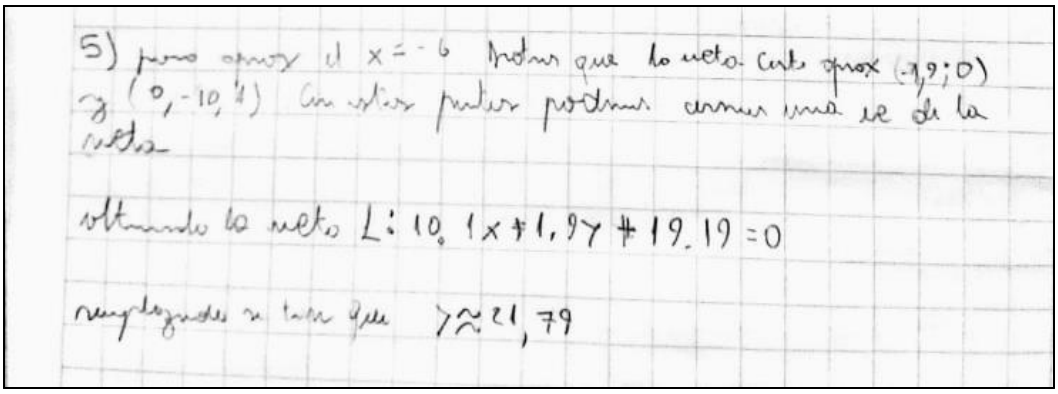
$= -19 \cdot -2 - 11$

$= 38 - 11$

$= 27$

Figura N°30. Muestra como el estudiante E4 se posiciona en el AA para responder la pregunta.

Sin embargo, y a pesar de que sigue analizando posicionado en el modo AA, el estudiante E1 no logra obtener una respuesta correcta.



5) para ocupar el $x = -6$ notamos que la recta corta aprox (-1,9;0) y (0,-10,1) con estos puntos podemos armar una ec de la recta

obteniendo la recta $L: 10,1x + 1,9y + 19,19 = 0$

reemplazando se tiene que $y \approx 21,79$

Figura N°31. Muestra como el estudiante E1 se sitúa en el modo AA para responder la pregunta.

Por otra parte, los estudiantes E3, E7, E8 y E9 generan sus respuestas ubicándose en el modo sintético-geométrico. Estos, utilizan solamente la imagen dada para otorgar una respuesta final. A continuación, se muestran las respuestas de los E7 y E9 a modo de ejemplo ya que, los cuatro respondieron de manera similar.

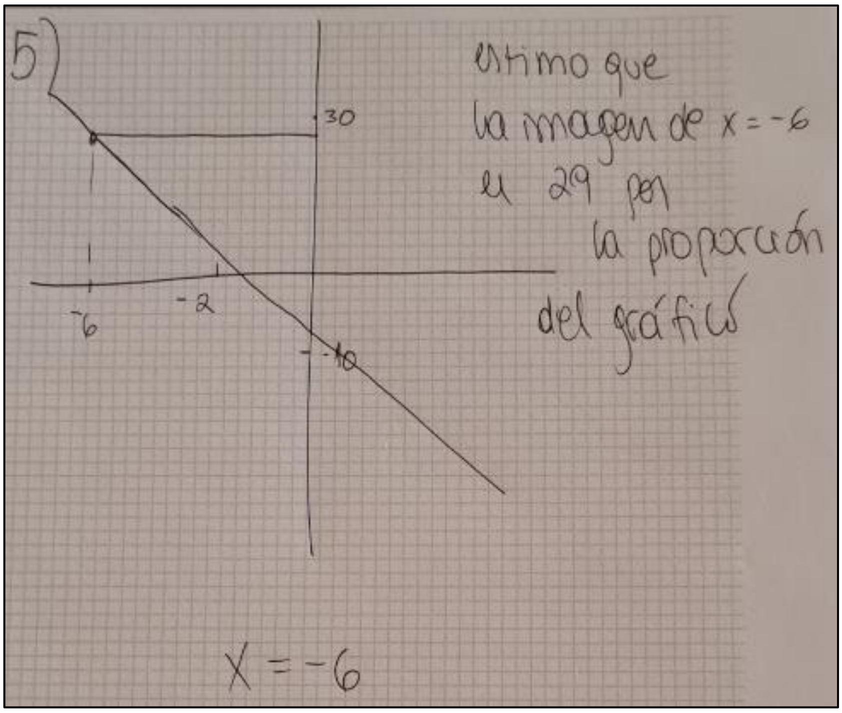


Figura N°32. Muestra como el estudiante E7 se sitúa en el modo SG para responder la pregunta.

En este caso, el estudiante 7 (figura 33) identifica el punto -6 en el eje "x" y lo proyecta hacia la recta, luego sobre el eje "y" (eje vertical), lo que le ayudará a identificar y/o estimar el valor de la imagen pedida. Es así como el estudiante concluye que *"(...) la imagen de x = -6 es 29 por la proporción del gráfico"*.

Caso similar ocurre con el encuestado E9, puesto que para generar una respuesta menciona que *"(...) la recta pasa por sobre la mitad del lado del cuadrado, pero por debajo del vértice"*. Por lo anterior, el encuestado plantea que según la imagen pareciese que f (-6) está entre 28 y 30. Todo este procedimiento realizado, podemos traducirlo en que se posiciona en el modo SG para lograr obtener una respuesta. (ver figura N°34)

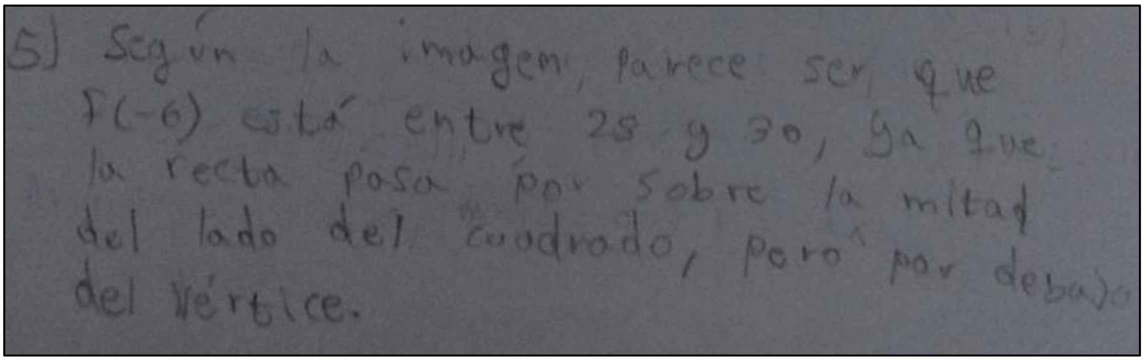

5) Según la imagen, parece ser que f(-6) está entre 25 y 30, ya que la recta pasa por sobre la mitad del lado del cuadrado, pero por debajo del vértice.

Figura N°33. Muestra como el estudiante E9 se sitúa en el modo SG para responder la pregunta.

El estudiante 6 se sitúa inicialmente desde el modo sintético-geométrico, ya que identifica en el plano cartesiano el punto a analizar y luego genera una proyección en el eje vertical. Cuando ya estima entre qué intervalos está la imagen pedida, utiliza propiedades de las simetrales (AE) para estimar más específicamente a través de puntos medios, subdividiendo los segmentos que correspondan y así lograr obtener una respuesta más precisa. Todo lo anterior requirió que el E6 transitara al modo analítico-estructural y así complementar.

Con una escuadra, identifiqué el punto de interés (-6,Y) y luego proyecté el punto en el eje Y, para tener un aproximado de la coordenada Y.

Luego, estimé la posición de la proyección en el eje, así tengo que el punto está entre 20 y 30 en un principio.

Lo siguiente es estimarlo a través de puntos medios usando simetrales, así obtengo que Y está entre 25 y 30 porque está más arriba del punto medio del pequeño segmento entre 20 y 30.

Repito el proceso y ahora obtengo que el punto medio coincide con lo trazado por la escuadra, por lo tanto, puedo estimar que la imagen de X=-6, es Y=27.5.

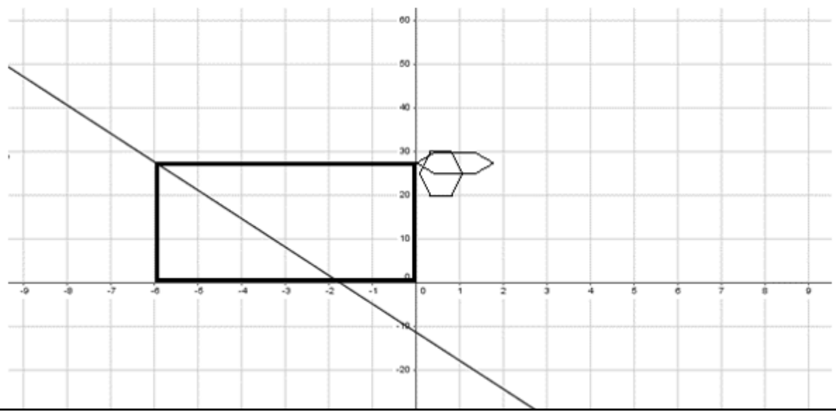


Figura N°34. Muestra como el estudiante E6 transita entre los modos SG y AE para responder la pregunta.

CAPÍTULO 5: CONCLUSIONES

Sugerencias didácticas

A partir de las respuestas obtenidas del cuestionario realizado y del análisis a través de la teoría presentada, se ofrecen un conjunto de sugerencias didácticas para el proceso enseñanza-aprendizaje para el uso de los estudiantes de octavo básico y los futuros docentes de la carrera de Pedagogía en Matemática de la UMCE.

Objetivo de la sugerencia didáctica

Se genera este conjunto de actividades con el fin de que sean utilizados por los profesores como una propuesta que ayude e invite a transitar entre los diferentes modos de pensar la recta.

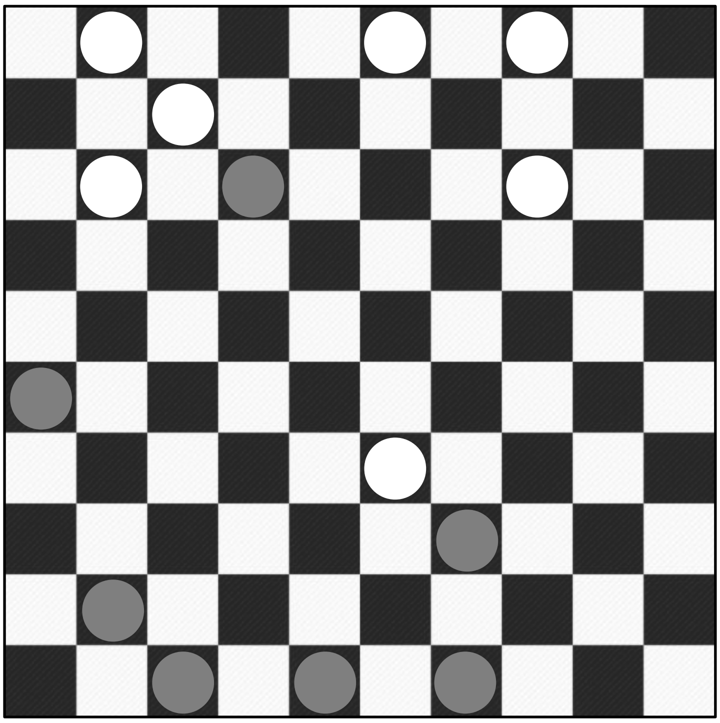
Es necesario mencionar que el enfoque al construir actividades en base a esta teoría debe siempre estar puesto en que el enunciado invite a quien responda a "justificar las respuestas", "detallar cómo lo hizo", "argumentar por qué está seguro de lo que respondió", etc, todo esto como forma de que el estudiante (o quien responda) se vea en la necesidad de transitar a algún modo y así complementar lo planteado para construir una respuesta más completa.

Actividades sugeridas

Lo primero que se sugiere es iniciar con actividades que posicionen a los estudiantes en el modo SG y que luego los "obligue" a transitar al modo AE, como por ejemplo lo fue la pregunta 3a) y 3b) del cuestionario puesto que, se traduce en un gran aporte en la comprensión desde el modo analítico-estructural.

Las actividades que se centren en el modo sintético-geométrico deben promover la definición de colinealidad de puntos de una recta si es que se quiere incentivar el tránsito al modo analítico-estructural. Por ejemplo:

Observe el siguiente tablero de damas, ¿dónde ubicaría una(s) ficha(s) para afirmar que existen tres fichas colineales en el tablero? (las fichas pueden ser de diferente color). Argumente su respuesta.



Este problema se sugiere para este tránsito (entre SG y AE) donde inicialmente el estudiante se posiciona en el modo sintético-geométrico, puesto que el ejercicio lo ubica ahí. Luego, al observar la imagen que se le presenta, debe ser capaz de relacionar esta situación con la definición de colinealidad, ya que, si se toman las fichas como puntos, el estudiante debería dibujar o posicionar una a modo de que pertenezca a la misma recta que otras dos fichas dadas ya en el tablero. Esta situación se puede comparar con la pregunta 3 realizada en el cuestionario, puesto que en ambas se debe abordar el concepto de colinealidad y utilizar las propiedades en el argumento para lograr una respuesta completa.

Ahora bien, si se quiere posicionar al estudiante en el modo AA para guiarle a comprender la recta de manera tal, se sugiere presentar a los educandos un problema como el que se planteó en la pregunta 4 o la pregunta 5 ya que, como vimos en el análisis a posteriori de estos ejercicios (Ver capítulo 4), el hecho de presentar un plano cartesiano invita al tránsito al modo AA puesto que se trata del articulador que permita dicha acción, y es que el estudiante lo utiliza como referencia o apoyo para dar su respuesta. Por lo anterior, las actividades en las que se quiera incitar al tránsito hacia este modo deben tener integrado un plano cartesiano o la necesidad de dibujar uno para construir una respuesta completa.

Por otra parte, se sugiere utilizar el ejemplo 4 que presenta el texto de estudiante para el nivel de octavo básico, el cual fue expuesto en el capítulo 1 de la tesina (página 25). Se reconoce el valor de la pregunta puesto que por cómo está planteada (desde el modo sintético-geométrico), obliga al estudiante que cuenta con el conocimiento de $\boldsymbol{f(x) = mx}$ o $\boldsymbol{f(x) = mx + n}$ a transitar al modo analítico-aritmético.

Como sugerencia didáctica final, planteo la posibilidad de utilizar los ejercicios 3,4 y 5 del cuestionario como actividades que servirían para el trabajo con estudiantes de octavo básico, debido a los resultados que se obtuvieron con ellos. Quizá sean necesarias algunas modificaciones, pero todo depende del contexto en el que se esté presente.

Por otro lado, no se sugieren utilizar los ejercicios 1 y 2 debido a que estos sitúan inmediatamente al estudiante en el modo analítico-aritmético y no se logra ver un tránsito hacia los otros modos de pensar la recta. Lo anterior se justifica ya que, al tener todos los datos presentes en el enunciado, automáticamente el estudiante utiliza la ecuación de la recta para generar una respuesta (lo que sucedió con 8 de 9 encuestados), es decir, promueven la comprensión en el modo analítico-aritmético, pero no se realiza ningún tránsito. Cabe destacar, que estos tipos de ejercicios son los más habituales de encontrar en los textos escolares.

Lineamiento de la nueva malla de la carrera de Pedagogía en Matemática en la UMCE.

Como se pudo observar en el capítulo 1 de la tesina, la nueva malla presenta cambios en comparación con la antigua. En base a la teoría escogida y analizando el primer ramo de geometría, se puede sostener que, al querer que los estudiantes vean la geometría euclidiana junto con la analítica, existe una conciencia por parte de los docentes de que es necesario desarrollar en los educandos la capacidad de transitar entre los modos de pensar. Y es que se puede notar que, cuando en el programa se desglosan los núcleos de aprendizaje, existe un apartado que menciona los lugares geométricos a revisar y dentro de esta muestra a la Recta. Acá se plantea que serán vistos los siguientes puntos:

- Ecuación de una recta definida por su forma; pendiente y ordenada en el origen, dos puntos, simétrica y general.
- Posición relativa entre rectas.
- Forma normal de una recta.
- Reducción de una recta de su forma general a normal y viceversa.

- Distancia de un punto a una recta.
- Bisectrices.
- Familia de rectas.

Los contenidos anteriores y el programa en general, dan cuenta que se puede realizar un trabajo que permita desarrollar en los estudiantes la capacidad de transitar por los diferentes modos para así comprender la recta de una manera profunda. Y es que el lugar geométrico se muestra con la intención de ser desarrollado, sin embargo, no es posible afirmar que el objetivo del cambio sea el de querer guiar a una comprensión en los 3 modos, ya que no se tienen propuestas de ejercicios o la metodología en la que se verá la materia, por lo que no se puede saber si lo utilizado se hace con el objetivo de una comprensión profunda. Por lo tanto, se afirma, con respecto a la teoría escogida que, si no se proponen actividades o problemas a resolver que tengan como propósito intencionar el tránsito entre los modos de pensar la recta, es solo una oportunidad de cambio desperdiciada y no se reconocería la finalidad por la que se generó esta modificación.

Además de agregar conceptos de la geometría euclidiana en el primer ramo de geometría, el nuevo lineamiento a seguir les otorga un valor importante a las prácticas. Se muestra que estas (prácticas) tomaron el puesto central de cada semestre, es decir, cada asignatura debe tributar a desarrollar en los futuros docentes la capacidad de conducir la enseñanza-aprendizaje en cada especialidad, particularmente en el área de la geometría (área de nuestro interés). Por lo que este nuevo lineamiento piensa en el estudiante como futuro profesor capaz de lograr aprendizaje en sus estudiantes y no como un simple investigador.

Por lo anterior, y a modo de sugerencia, se considera el ejemplo 4 analizado anteriormente y propuesto en el capítulo 1, también como un ejercicio interesante para los estudiantes de la UMCE, puesto que es posible situarlos como profesores y así conocer cómo argumentarían o qué recursos utilizarían para probar si el punto dado pertenece o no a la recta (¿cumple o no con la función?), lo que seguiría cumpliendo con el objetivo de centrar la práctica.

En base a lo anterior, se avala el cambio y la destitución de la malla antigua, puesto que con esto se respeta y se observa una coherencia con lo que se plantea en la epistemología, lo que no sucedía con la malla anterior. En esta epistemología, lo primero que se concibe es la geometría en el plano Euclidiano, con sus respectivas representaciones (SG) y propiedades (AE) (libro Los Elementos que es visto en el curso de geometría axiomática), para luego ser comprendida en el modo AA que, en este caso, sería para la universidad la geometría analítica (visto con el libro Lehmann). Por lo tanto, es posible afirmar que, si se enseña la geometría respetando su epistemología, el orden de la enseñanza sería un factor que enriquecería el conocimiento del área.

Es importante recalcar que todo docente debe tener la intención de "obligar" al tránsito entre los modos de pensar. Y esto lo obtendrá al plantear problemas donde no se tenga toda la información y se deba pensar más allá de lo que se plantea. Por ejemplo, podemos afirmar que en general los ejercicios que otorga el libro de Lehmann se mantienen en el modo analítico-aritmético, sin generar un conocimiento profundo como lo plantea la teoría en sus objetivos.

Conclusiones

Con respecto a la pregunta de investigación que fue planteada en el comienzo de la investigación, se puede concluir lo siguiente:

¿Los estudiantes de Pedagogía en Matemática de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación comprenden en profundidad el concepto de Recta?

Esta pregunta, solo será respondida en base a lo que se pudo obtener de las respuestas de los estudiantes. Es necesario recordar que todos los encuestados pertenecían a generaciones que trabajaron con la malla antigua de la carrera, lo que a largo plazo se traduce como una limitación a esta investigación debido a que no se puede obtener un análisis sobre el manejo del contenido en los estudiantes que ya vieron la geometría euclidiana y analítica de la nueva malla.

Sin embargo, tomando en cuenta los resultados obtenidos, se puede decir que la forma en que se trata el contenido no es la adecuada puesto que, no obligan al estudiante a transitar entre los tres modos, ya sea por el orden que presenta la malla, la forma de enseñar o el planteamiento de los ejercicios que se otorgan para la adquisición del conocimiento. Es importante mencionar que los estudiantes poseen las herramientas y el conocimiento necesario para responder a todas las preguntas del cuestionario, pero este no es profundo, en otras palabras, los estudiantes son capaces de posicionarse en alguno de los tres modos para dar respuesta a problemas (como lo vimos en el análisis a posteriori), sin embargo, lo hacen de una forma independiente sin la existencia de la acción de complementar, es decir, no existe un tránsito efectivo entre los modos de pensar.

En relación con los resultados obtenidos gracias al cuestionario realizado, se presenta a continuación una conclusión para cada pregunta del cuestionario:

Pregunta 1

Al mencionar que se realizara de dos formas el ejercicio, se obliga de cierta manera a que el estudiante transite a otro modo para responder y la mayoría de los estudiantes transitó del modo AA al modo SG, es decir, respondió utilizando la ecuación de punto-pendiente y luego realizó la gráfica que representaba la situación. Por otro lado, si en el enunciado no se hubiese pedido que se resolviera de 2 formas diferentes, todos respondieron desde el modo AA (ecuación punto-pendiente) en la primera forma, lo que reafirma que el modo analítico-aritmético es el más utilizado y escogido por los estudiantes.

Pregunta 2

La mayoría de los estudiantes respondieron ambas preguntas (a y b) posicionándose en el modo AA, es decir, utilizaron la ecuación de las rectas que representaban la situación mencionada en el enunciado para luego resolver un sistema de ecuaciones y hallar así a la respuesta correcta. Por lo tanto, estamos en presencia nuevamente de la evidencia que se tiene con respecto al manejo del modo analítico-aritmético de pensar la recta.

Pregunta 3

Ambas preguntas (a y b) son sugeridas para cuando se quiera transitar entre los modos SG y AE debido a que, la mayoría de los encuestados realizó este tránsito para responder. Y es que casi todos evidenciaron un manejo en la definición de colinealidad, lo que les permitió trazar una recta sobre las bolas que cada uno determinó que eran colineales. Es posible concluir con este análisis, que el tránsito al modo analítico-estructural se ve altamente potenciado si es que en un comienzo el estudiante se sitúa en el modo sintético-geométrico. Cabe destacar además que esta pregunta fue la única en la que transitaron al modo analítico-estructural para responder.

Pregunta 4

Para responder esta pregunta, todos los estudiantes se posicionaron inicialmente en el modo sintético-geométrico y es que todos daban indicaciones de hacia donde debía moverse la persona solo observando la imagen. Los que transitaron al modo analítico-aritmético lo hacían al otorgaban un par ordenado con la posición final a la que se debía llegar. Podemos concluir entonces, que desde un modo SG se favorece el tránsito al modo AA.

Pregunta 5

La mitad de los estudiantes se posicionaron en el modo SG para responder y la otra mitad transitaron al modo AA. Esto se ve reflejado en el uso de la misma imagen para responder o bien en el uso de la ecuación de la recta (respectivamente). Lo anterior, reafirma que el tránsito desde el modo de pensar sintético-geométrico al modo analítico-aritmético se ve altamente posible y beneficioso.

Al realizar un último análisis general, se ha podido determinar que los futuros docentes son capaces de transitar entre algunos modos (máximo dos), sin embargo, priorizan el situarse en el AA para abordar la recta. Es decir, se puede desprender que a pesar de que la mayoría de los encuestados transitaron al modo analítico-aritmético para generar respuestas, pero se nota una clara inclinación por transitar entre los modos SG-AE y SG-AA. Se debe precisar en que solo en una pregunta se realizó un tránsito al modo analítico-estructural, lo que nos da para reflexionar en la forma en que se enseña el contenido en la universidad y en la importancia que tiene el enseñar la recta desde este modo inicialmente.

Es necesario destacar que los tránsitos mencionados pudieron ser realizados dado que los estudiantes utilizaban los articuladores para la recta que se plantearon en el marco teórico, lo que además nos reafirma que es correcta la elección que se realizó para cada uno de ellos.

Para finalizar, se plantea la necesidad de que los docentes conozcan la teoría escogida para que, al momento de planificar sus clases, estas sean con el propósito de intencionar y ayudar a sus estudiantes a transitar entre los modos de pensar que propone Sierpinska, para generar un conocimiento profundo y así comprender mejor el objeto en estudio. Es necesario recalcar que lo anterior no se generará si los ejercicios son "comunes" o si se menciona de cierta forma en el enunciado lo que el estudiante debe hacer. Es imprescindible que los educandos se sientan desafiados a hacer matemática, que los interpelen en los procedimientos para así guiarlos a desarrollar de mejor manera su pensamiento crítico y matemático.

REFERENCIAS

Arce, M., Blázquez, S., Ortega, T., & Pecharromán, C. (2017). *Tema 4: Elementos básicos de geometría*. de DocPlayer Sitio web: https://docplayer.es/21819750-Tema-4-elementos-basicos-de-geometria.html

Bonilla, D., Parraguez, M. (2012). *La elipse desde la perspectiva de la Teoría de los modos de pensamiento*. Trabajo final para optar al grado de magíster en didáctica de las matemáticas. Santiago de Chile

Carreño, X., & Cruz, X. (2016). *Geometría. Matemática 8° Año Básico*. Santiago de Chile: McGraw-Hill Interamericana.

CPEIP. (2012). *Estándares Orientadores para carreras de Pedagogía en Educación Media*. de Ministerio de Educación Sitio web: https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2019/03/Est%C3%A1ndares_Media.pdf

CPEIP. (2017). *Evaluación Diagnóstica para estudiantes de pedagogía de penúltimo año*. de Ministerio de Educación Sitio web: https://www.cpeip.cl/ev-diagnostica/

CPEIP. (2019). *Resultados Nacionales. Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2018*. de Ministerio de Educación Sitio web: https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/4660

CPEIP. (2020). *Informe Resultados Nacionales*. de Ministerio de Educación Sitio web: https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2020/08/Informe-Nacional-END-2019_rect.pdf

DEMRE. (2015). *Prueba de Matemática*. de Universidad de Chile Sitio web: https://demre.cl/la-prueba/pruebas-y-temarios/prueba-matematica-p2020

DEMRE. (2019). *Temario de la Prueba de Matemática*. de DEMRE Sitio web: https://demre.cl/publicaciones/2020/2020-19-04-11-demre-temario-matematica

DEMRE. (2020). *Tablas comparativas entre el Antiguo Sistema de Admisión y el Nuevo Sistema de Admisión 2020-2021*. de Universidad de Chile Sitio web: https://demre.cl/documentos/2020-07-03-tabla-comparativa-procesos-2020-2021.pdf

DEMRE. (2020). *Temarios Pruebas de Admisión Transitorias a la Educación Superior 2020 - Admisión 2021*. de Universidad de Chile Sitio web: https://demre.cl/la-prueba/pruebas-y-temarios/presentacion-pruebas-temarios-p2021

García, B., & Arias, D. (2018). *Descartes y el renacimiento de la geometría*. de BBVA. Open Mind Sitio web: https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/matematicas/descartes-y-el-renacimiento-de-la-geometria/

Gascón, J. (2003). *Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria*. SUMA, 44, pp.25-34.

Lehmann, C. (1989). *Geometría Analítica*. Mexico: LIMUSA, S.A.

MINEDUC. (2020). *Prueba de Transición 2020-2021*. de Ministerio de Educación Sitio web: https://ayudamineduc.cl/ficha/prueba-de-transicion-2020-2021

Preuniversitario PDV. (2014). *Ecuación de la Recta*. PDV, Material N°27, pp.1-8.

Prieto, C. (2017). *Lo imposible en matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Sampieri R., Collado C., & Lucio P. (2003) *Metodología de la Investigación.* México, D.F: McGraw-Hill Interamericana.

Secundaria. SUMA, pp.25-34.

SIERPINSKA, A. (2000) On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. In: J. L. Dorier (Ed) On the Teaching of Linear Algebra (p. 209-246). Dordrecht, Netherland: Springer

Significados. (2020). *Plano cartesiano*. de Significados.com Sitio web: https://www.significados.com/plano-cartesiano/

Superintendencia de Educación. (2012). *¿Qué debemos saber sobre los textos escolares?* de MINEDUC Sitio web: https://www.supereduc.cl/contenidos-de-interes/que-debemos-saber-sobre-los-textos-escolares/#

Torres, C., & Caroca, M. (2019). *Cuaderno de actividades. Matemática 8° básico*. Santiago de Chile: Santillana.

Torres, C., & Caroca, M. (2019). *Texto del estudiante. Matemática 8° básico*. Santiago de Chile: Santillana.

UCE. (2020). *Orientaciones para la Implementación de la Priorización Curricular en Forma Remota y Presencial*. de Ministerio de Educación Sitio web: https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-209363_recurso_pdf.pdf

UMCE. (2016). *Historia de la UMCE*. de Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación Sitio web: https://www.umce.cl/index.php/universidad/institucionalidad/historia

Universidad de Chile. (2000). *Acerca del DEMRE*. de Universidad de Chile Sitio web: https://www.uchile.cl/portal/presentacion/asuntos-academicos/demre/presentacion/110082/acerca-del-demre

Universidad de Chile. (2013). Resolución prueba oficial matemática parte IV. El Mercurio, p.3.

ANEXOS

Cuestionario realizado a futuros docentes

1. Si la temperatura a nivel del mar es de 20°C y la temperatura a una altitud de 1 km es de 10°C, exprese la temperatura en términos de la altitud. Suponga que la relación es lineal ¿Cuál es la temperatura a 2,8 km? Resuelva de dos formas diferentes.
2. José debe mandar a reparar su lavadora, para esto cotiza en dos empresas diferentes de las cuales pudo obtener la siguiente información:

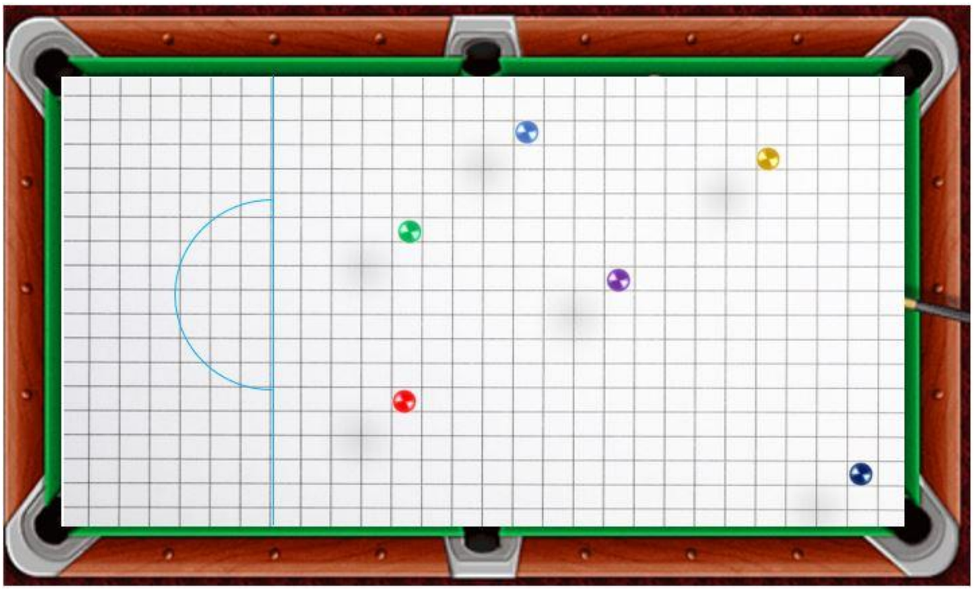
   La primera empresa cobra una cantidad fija de 2.400 pesos más 800 pesos por cada hora trabajada. La segunda empresa no cobra una cantidad fija pero sí cobra 1.400 pesos por hora trabajada. José recurre a ti para que le puedas ayudar a resolver las siguientes dudas:

   a) ¿Cuándo es más económico escoger la segunda empresa?
   b) Si para el problema que tiene la lavadora de José, en ambas empresas el tiempo mínimo de demora son cuatros horas. Además, recibe un descuento del 10% del valor asociado al tiempo utilizado en la reparación (por hora) en cualquiera de las dos empresas, si es que decide repararla. ¿Qué empresa le convendría escoger?

   ¿Podrías ayudarle a José a resolver su problema? Haz un bosquejo y detalla cómo le explicarías.

3.
   a. Observe la siguiente imagen. ¿Se podría decir que en la mesa de pool hay tres bolas colineales? Argumente su respuesta.

b. Observe la siguiente imagen y ubique una(s) bola(s) en el lado izquierdo que sea(n) colineal(es) a otras dos del lado derecho. Explique con detalles cómo logra estar seguro de la posición de las bolas.



4. Seis amigos juegan a las escondidas en una plaza. Pablo es el que está contando para luego pillar a sus amigos. El problema para Carlos es que cuando se quiso esconder atrás de una banca, Fernando ya estaba ahí.

   Ayúdale a Carlos a encontrar la dirección en la que debe ir para salir de la visual de Pablo y así estar seguro. Describa el o los movimientos que debe hacer Carlos rápidamente en los 3 segundos que le quedan a su amigo por contar.

5. Estime la imagen de $x = -6$ para la función que se muestra en el gráfico siguiente. Explique con detalles cómo lo resolvió.