



UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE LAS CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA LA ENSEÑANZA DE
MÉTODOS COMBINATORIOS A TRAVÉS DEL JUEGO, BASADA EN LA
DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN ACTUAL DE LA
ENSEÑANZA DE MÉTODOS COMBINATORIOS EN SEGUNDO AÑO
MEDIO EN CHILE

TESINA PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN
MATEMÁTICA

AUTORA:

PATRICIA ANDREA PEÑAILILLO OLMOS

PROFESORA GUÍA:

GIOVANNA VINCENZA TICCHIONE TRONCOSO

SANTIAGO DE CHILE, MAYO 2020

Autorizado para

Sibumce Digital

Peñailillo Olmos, P. (2020). Descripción y análisis de la situación actual de la enseñanza de Métodos Combinatorios en segundo año medio en Chile. Una propuesta de actividades para la enseñanza de Métodos Combinatorios a través del Juego. (Tesis de pregrado) Universidad Metropolitana de las Ciencias de la Educación, Santiago, Chile.

Se autoriza la reproducción total o parcial de este material, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, siempre que se haga la referencia bibliográfica que acredite el presente trabajo y su autora.

Dedico esta tesina a:

Mi hijo Simón,
por ser el motor de mi vida

Mi amigo Andy, mi
ángel por la eternidad

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Carlos por su amor y apoyo inmenso, que fue fundamental para poder realizar esta investigación.

A mi profesora guía, Giovanna Ticchione, porque el amor que transmite por enseñar motivó todo este proceso.

A Ricardo por su apoyo desinteresado en esta investigación.

Finalmente, a mi familia y amigos que me acompañaron en todo este proceso, sin ese apoyo no lo hubiera logrado.

Índice

Resumen	vii
Introducción	1
Problemática y Antecedentes.....	3
Pregunta de investigación	6
Objetivos de la investigación.....	7
Objetivo general.....	7
Objetivos específicos.	7
Marco teórico	8
El Juego como recurso didáctico	8
El Juego y la Combinatoria.....	14
Historia de las técnicas de conteo	15
Bases curriculares	16
Textos escolares.....	23
Texto escolar público.....	23
Texto escolar privado.	33
Métodos Combinatorios.....	36
Principio multiplicativo	37
Principio aditivo.....	37
Permutación	39
Permutación simple	39
Permutación con repetición	42
Variación.....	43
Variación con repetición.....	46
Combinación.....	47

Marco metodológico	54
Recopilación de información	54
Diseño	54
Población de estudio	54
Muestra	55
Instrumento	55
Recolección de datos	57
Análisis de datos	57
Construcción de actividades	57
Resultados y Análisis.....	61
Resultados del análisis de los datos obtenidos en las encuestas	61
Estudiantes de pedagogía en matemática.....	61
Docentes de educación matemática en ejercicio.....	62
Análisis conjunto	64
De las actividades	76
Motivación.....	77
Desarrollo	78
Recurso TIC.....	81
Discusión y Conclusión	83
Referencias bibliográficas	90
Anexos	95
Del Marco Metodológico.....	95
Instrumentos	95
Operacionalización de las variables.....	102
Formato actividades.....	108

De Resultados y Análisis	109
Resultados encuestas	109
Resumen de actividades.....	117
Actividades detalladas	132

Resumen

El objetivo principal de esta investigación fue analizar la situación actual de la enseñanza escolar de Métodos Combinatorios en segundo año medio en Chile, a partir de la cual se confeccionaron actividades para la enseñanza de Métodos Combinatorios en segundo año medio en Chile a través del uso del Juego.

Para cumplir el propósito anterior se realizó una exhaustiva revisión bibliográfica de cómo la enseñanza de la Combinatoria en la educación escolar ha sido desvalorizada, incurriendo en la mecanización para su enseñanza.

Se aplicaron dos diferentes encuestas, una dirigida a docentes de educación matemática en ejercicio, y otra para futuros y futuras docentes, a partir de la cual se obtuvo como resultado principal que en ambas poblaciones de estudio existe un déficit en el Razonamiento Combinatorio.

A su vez, se determinó para la construcción de las actividades, la utilización del recurso didáctico del Juego estudiando su aporte en la enseñanza matemática, así como también se investigó el tratamiento del contenido en dos textos de matemática discreta, además del escolar.

En base a lo anterior, se proponen once actividades que responden a las necesidades evidenciadas.

Finalmente, se concluye la necesidad de mayor investigación para la utilización de Juegos en enseñanza media, y que se deben privilegiarse en la formación inicial docente espacios para la búsqueda de aprendizajes significativos para todos los contenidos matemáticos.

Palabras Claves: Métodos Combinatorios, Razonamiento, Juegos, Combinatoria

Introducción

La Combinatoria, o Métodos de Recuento, es muchas veces llamada arte de contar, sin la necesidad de enumerar (Wilhelmi, 2004). Este objeto matemático se estudia en matemática discreta, pero es enseñado a nivel escolar chileno como un recurso para el cálculo de probabilidades, centrado en el uso de fórmulas y resolución de ejercicios, lo cual se puede observar en el Programa de estudio de matemática para segundo año medio (Ministerio de Educación de Chile, 2016). Lo anterior no está del todo mal, pues, por supuesto la aplicación en problemas de probabilidad es uno de los grandes aportes de la Combinatoria, pero no es solamente eso. La Combinatoria ha implicado el avance de diversas áreas de estudio como la informática, biología o economía, entre otras, mediante estudios en el transporte, confección de horarios, planes de producción, etc.; Así como también en la misma matemática, donde la Combinatoria ha contribuido al desarrollo de la teoría de grupos, la geometría o el álgebra (Guirado y Cardoso, 2007; citado en Venegas Guerrero, Gea Serrano, Roa Guzmán, & Díaz Pallauta, (2019)).

Es de conocimiento entre los profesores y profesoras de matemática, como la enseñanza de este contenido presenta dificultades para los estudiantes, así lo menciona Roa (2000). A su vez Batanero (2000) menciona que esto es una responsabilidad compartida de parte de quien pretende enseñar, pues todavía son pocos los profesores que enseñan este tema, y en otros casos se trata muy brevemente, o en forma excesivamente formalizada. Esto conlleva un déficit en el Razonamiento Combinatorio que se genera con la enseñanza de tal contenido. El cual no es solo enumerar, como podría pensarse. Sino que conlleva contar con un raciocinio de las diferentes posibilidades existentes, a través de múltiples estrategias que respondan a la problemática planteada, según lo exponen diferentes autores como Fernández Millán (2013), Navarro-Pelayo, Batanero, y Godino (1996), y Roa (2000).

Por otra parte, Batanero (2000) y Roa (2000) mencionan como, desfavorablemente, la investigación, primero estadística, y más aún sobre Combinatoria, es aún muy escasa, y además poco difundida. Por lo que los y las docentes no se encuentran con nuevos recursos para la enseñanza de dicho contenido.

Dado lo anterior, se hace importante desarrollar más investigación en esta área, tanto para las dificultades que se puedan encontrar, como para aportar en la enseñanza de Métodos

Combinatorios hacia una enseñanza que genere aprendizaje significativos, pues, como se mencionó, la Combinatoria no implica simples técnicas de conteo, sino habilidades y estrategias de razonamiento (Roa, Batanero, Godino y Cañizares 1997; citado en Venegas Guerrero, Gea Serrano, Roa Guzmán, & Díaz Pallauta, 2019)

En la presente investigación se realizará un análisis de la situación actual de la enseñanza de los Métodos Combinatorios, a partir del cual se diseñarán actividades utilizando el recurso didáctico del Juego. Para dicho análisis, se aplicará una encuesta para estudiantes de pedagogía en matemática, y otra para docentes de la misma área, para, a partir de ella, recopilar información sobre las dificultades que enfrentan en la enseñanza de Métodos Combinatorios. Además se aplicará la versión corta del cuestionario de ejercicios creado en Navarro-Pelayo, Batanero, y Godino (1996) para ambas poblaciones de estudio mencionadas.

Para evidenciar el tratamiento otorgado al objeto matemático en cuestión, por MINEDUC, se estudiará el contenido en el Currículum nacional chileno, que incluye bases curriculares, planes y programas, y Texto escolar ministerial. También se estudia un texto escolar privado. Todo lo anterior, correspondiente a segundo año medio.

Sumado a lo anterior, se analizará lo expuesto por diferentes autores acerca de las problemáticas ya existentes, e investigadas, en este ámbito. Para así conocer las recomendaciones y aportes hechos en el contexto del estudio y enseñanza de Métodos Combinatorios, y ser incluidas en el diseño de actividades.

Finalmente, previo al diseño de actividades, se estudiarán las diferentes definiciones planteadas para el objeto matemático en cuestión en textos de matemática discreta. Dichas definiciones se investigarán para la confección de actividades, por lo cual se tomarán definiciones acordes a lo que el Currículum nacional chileno a definido para el nivel de segundo año medio en Chile. Además, se utilizará el recurso didáctico del Juego para el planteamiento del diseño de actividades, y se estudiará las recomendaciones hechas para su implementación en el aula escolar.

El diseño de actividades se realizará a partir de lo investigado, intentando incorporar las principales sugerencias, además de la información recopilada en las encuestas a realizar.

Problemática y Antecedentes

En Chile, a partir de la Ley General de Educación el año 2009, comienza un cambio curricular progresivo en todas las asignaturas y niveles escolares. Es así como el año 2015 se publican las bases curriculares de 7° básico a 2° medio, en las cuales se observan grandes diferencias y proyecciones en la enseñanza de la estadística, siendo este eje denominado “Datos y Azar”. Este cambio produce que la enseñanza de Métodos Combinatorios se encuentre en un breve objetivo de aprendizaje, en el nivel de segundo año medio: *“OA11: Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas”* (Ministerio de Educación de Chile, 2015).” El enfoque de este objetivo queda dirigido a la utilización del objeto matemático como una herramienta en el cálculo de probabilidades, tal y como se menciona en los planes y programas de estudio para 2° medio:

“Se espera que los alumnos y las alumnas sean capaces de determinar el número de combinaciones totales para calcular la probabilidad de un evento al resolver problemas. Además, se profundiza en la aplicación del principio multiplicativo y la regla aditiva en situaciones que requieran del cálculo de probabilidad con permutación o combinatoria.” (Ministerio de Educación de Chile, 2016, pág. 152).

Es así como se puede visualizar que la enseñanza de la Combinatoria en Chile se ha ceñido a estar al servicio exclusivamente del cálculo de probabilidades, y no para otros ámbitos curriculares. Es importante mencionar que, no es erróneo decir que la Combinatoria puede, y debe, estar al servicio del cálculo de probabilidades, pero como cita Venegas Guerrero A. A. (2018) *“la combinatoria es algo más que un auxiliar de la probabilidad [...] las operaciones combinatorias son un componente fundamental de pensamiento formal.”* (Batanero, 2004, pág. 22). El problema radica cuando este cálculo es solo a través de una fórmula y no del Razonamiento Combinatorio que debe generarse a través del estudio, el cual *“juega un papel fundamental en el dominio de la estructura aritmética, sobre todo en la resolución de problemas.”* (Venegas Guerrero A. A., 2018).

Sumado a lo anterior, se encuentra el antecedente de la realidad española, que de acuerdo con Navarro-Pelayo, Batanero, y Godino (1996), es que *“En España, la enseñanza de la Combinatoria en Bachillerado ha estado separada del resto de los contenidos curriculares, excepto en su relación con la Probabilidad.”*, y además, en el mismo trabajo “Razonamiento

Combinatorio en alumnos de secundaria”, destacan que dicha enseñanza se centra en el aprendizaje de definiciones y fórmulas.

En continuación con lo anterior, es necesario leer lo que dice James Bernoulli, quien es considerado como el principal autor de las definiciones que se utilizan hoy para referirse a la Combinatoria, de acuerdo con el rol que cumple esta en la matemática y su razonamiento, este señala en su *Ars Conjectandi (el arte de conjeturar)*; citado en Fernández Millán (2013, pág. 540):

“Es fácil darse cuenta de que la prodigiosa variedad que se presenta, tanto en las obras de la Naturaleza como en las acciones humanas, y que constituye la mayor parte de la belleza del universo, es debida a la multitud de modos diferentes en los cuales sus diversas partes pueden mezclarse o yuxtaponerse. Pero, debido a que el número de causas que concurren en la producción de un acontecimiento dado o efecto es muy a menudo tan enormemente grande y las causas mismas son tan diferentes entre sí, es extremadamente difícil enumerar todos los modos diferentes en los cuales pueden ordenarse o combinarse, y a menudo ocurre que los hombres, aún de la mayor capacidad y de la más grande circunspección caen en la falta de razonamiento que los autores de libros de Lógica llaman enumeración insuficiente o imperfecta de partes o casos. Y esto sucede en tal medida, que me atrevo a afirmar que ésta es la principal, casi diría la única fuente del enorme número de opiniones erróneas en asuntos, muy frecuentemente, de gran importancia.”

Se debe reconocer, por lo tanto, la enorme utilidad de la Combinatoria, no solo como una ciencia matemática, dado que está relacionada con casi todas las formas de conocimientos útiles en las cuales la mente humana puede emplearse (Fernández Millán, 2013)

Con lo anterior expuesto se explicita la clara relevancia de la Combinatoria como un contenido importante en el desarrollo del pensamiento probabilístico y azaroso, más que solo como una herramienta, que deba enseñarse desde y para fórmulas y definiciones, solo para el cálculo de probabilidades. Este aspecto es declarado en Kapur (1970); citado en Fernández Millán (2013, pág. 542), quien señala diversos puntos a favor de la enseñanza de la Combinatoria en secundaria, de entre las que destacan:

- Pueden proponerse gran variedad de campos de aplicación, tanto internas a la propia matemática como externas: física, química, biología, análisis de redes, diseño de experimentos, teoría de comunicación, probabilidad, programación dinámica, teoría de números, topología, matemática recreativa etc.
- Se pueden proponer problemas desafiantes, algunos no resueltos aún, aunque al alcance de la comprensión de los estudiantes. Ello permite que aprecien la necesidad de creación de nuevas matemáticas. Puesto que muchos problemas y aplicaciones de la Combinatoria se han desarrollado recientemente puede mostrar la naturaleza dinámica de esta ciencia.
- Al crear la costumbre de examinar todas las posibilidades, enumerarlas y hallar la mejor alternativa, contribuye al desarrollo del pensamiento sistemático.
- Puede contribuir a dar sentido a conceptos algebraicos elementales como los de aplicación, relaciones binarias, funciones, isomorfismo, etc.

Para que se puedan implementar los aspectos recién mencionados como relevantes y útiles en la enseñanza de la Combinatoria, por una parte es necesario un docente que tenga las habilidades para dichos requerimientos, pero lamentablemente se ha evidenciado que para los profesores, este contenido no es fácil de abordar. Esto es principalmente, por la débil o nula formación inicial estadística, como lo señalan Del Pino y Estrella (2012): *“La estadística también es una disciplina relativamente nueva para muchos profesores que, por lo general, no han tenido una formación adecuada en este tema en el marco de sus estudios universitarios iniciales o de una formación continua”*. Es así como la enseñanza de Métodos Combinatorios se ve aún más desfavorecida, en Navarro-Pelayo, Batanero, y Godino (1996) se menciona que, como los profesores consideran difícil la Combinatoria, a veces, han preferido omitir su enseñanza.

Debido a lo anterior se observa la necesidad de un mayor apoyo a los docentes en el área estadística, es decir, es indispensable para el avance de la educación en dicha área contar con mayor investigación, y divulgación de esta, en la búsqueda de nuevas metodologías. Esto se ha mencionado en Batanero (2000, pág. 7).

“(…) el número de investigaciones sobre la didáctica de la estadística es aún muy escaso, en comparación con las existentes en otras ramas de las matemáticas. Por ello, no se conocen aun cuales son las principales dificultades de los alumnos en muchos conceptos importantes.”

Se puede resumir entonces la importancia de la combinatoria como *“¡Un prerrequisito estructural importante para la dinámica y potencia creativa del razonamiento lógico en general!”* (Roa, 2000) , el cual debe ser desarrollado como tal de la mano de las indicaciones y estudios ya realizados por docentes calificados y con los materiales adecuados para tal fin.

Finalmente como antecedente se visualiza el tratamiento y enfoque dado en las Bases Curriculares para el contenido de Métodos Combinatorios, donde este se encuentra en un corto objetivo de aprendizaje y su enfoque es hacia la aplicación en el cálculo de probabilidades.

A su vez, se observa como en los textos escolares, en particular el Texto para el estudio de segundo año medio entregado por el Ministerio de Educación (desde ahora MINEDUC) de Chile (Chacón Aguirre, García Castillo, Rupinn Gutiérrez, Setz Mena, & Villena Ramirez, 2018) se construye el contenido con una mirada de memorización de fórmulas y aplicación de ellas.

Para aportar a la problemática anteriormente expuesta, es que se decide investigar acerca de las dificultades que enfrentan con Métodos Combinatorios, los docentes de matemática que han ejercido en 2º medio, y estudiantes pedagogía en matemática, tanto en su comprensión, como en su enseñanza, para así generar una propuesta de actividades para la enseñanza de Métodos Combinatorios. Lo anterior deriva la siguiente pregunta de investigación.

Pregunta de investigación

- ¿Cuáles son los principales desafíos que enfrentan los docentes y futuros docentes, al momento de enseñar Métodos Combinatorios en segundo año medio, en el sistema de educación chileno?

Objetivos de la investigación

Objetivo general.

- Analizar la situación actual sobre la enseñanza de Métodos Combinatorios en segundo año medio en el sistema de educación chileno.
- Elaborar actividades, para el aprendizaje de los Métodos combinatorios en segundo año medio en el sistema de educación chileno.

Objetivos específicos.

- Consultar las bases curriculares y programas de estudios asociados al contenido de recuento en segundo año medio en el sistema de educación chileno.
- Describir la metodología empleada para la enseñanza de los Métodos Combinatorios en diferentes textos de estudio, desde los escolares chilenos, tanto públicos como privados, hasta textos de matemática discreta.
- Determinar las principales dificultades que tienen los docentes y los futuros docentes al momento de enseñar los Métodos combinatorios en segundo año medio en el sistema de educación chileno.

Marco teórico

El Juego como recurso didáctico

Por las características propias de la Combinatoria (origen, ejemplos clásicos, métodos ya empleados, entre otros que se estudiarán más adelante), es que se ha decidido utilizar el recurso didáctico del Juego como eje principal para la creación de las actividades para la enseñanza de Métodos Combinatorios como producto de esta investigación.

Es preciso comenzar por referirse a la definición de recurso didáctico, pero esto, dada su amplia naturaleza, no es sencillo de precisar. Se define recurso como *“Medio de cualquier clase que, en caso de necesidad, sirve para conseguir lo que se pretende”* (Real Academia Española, 2020). Así mismo lo didáctico es un adjetivo usado para algo *“adecuado o con buenas condiciones para enseñar o instruir”*, o que *“tiene como finalidad fundamental enseñar o instruir”* (Real Academia Española, 2020) Con lo anterior se puede, de manera sencilla, determinar un recurso didáctico como aquellos materiales o herramientas de cualquier clase que tienen utilidad en un proceso educativo.

Es así como el Juego, con las condiciones necesarias, es una herramienta válida para la enseñanza, siendo así denominada como un recurso didáctico. Lo anterior ya lo ha señalado Piaget (1985), *“Es sabido que el juego constituye la forma de actividad inicial de casi cada tendencia, o al menos un ejercicio funcional de esta tendencia que la activa al margen de su aprendizaje propiamente dicho y actúa sobre éste reforzándolo”* Así es que, llevándolo al contexto educacional formal, se observa no solo la utilidad, sino la necesidad de reincorporar el Juego, pues este tiene diferentes fines educativos. Como lo señala Corbalán y Deulofeu (1996); citado en Edo y Deulofeu (2006). *“El uso de juegos en el marco escolar puede tomar como finalidad la comprensión de conceptos o la mejora de técnicas –juegos de conocimiento–, o bien la adquisición de métodos de resolución de problemas –juegos de estrategia–”*. Así mismo es mencionado por Riedemann Carrillo (2020), reforzando la utilidad y necesidad del juego para el proceso de enseñanza aprendizaje, con que *“también jugar mejora la estructura y la función cerebral, promoviendo las funciones ejecutivas, es decir, el proceso de aprendizaje en lugar del contenido.”*

Se puede precisar lo anterior a la asignatura de matemática, con De Guzmán (1989, pág. 61) quien menciona que:

“La matemática ha sido y es arte y juego y esta componente artística y lúdica es tan consustancial a la actividad matemática misma que cualquier campo de desarrollo de matemática que no alcanza un cierto nivel de satisfacción estética y lúdica permanece inestable, buscando una expresión más acabada que sea capaz de ofrecer una visión unitaria, placentera, divertida, como una sinfonía o un poema en gestación busca, en la mente de su autor, la forma de expresión más bella posible.”

El autor menciona cómo la matemática tiene un origen lúdico, realizando una cronología de Juegos que han surgido como estudio de temas matemáticos, y no solamente como diversión, de acuerdo con esto concluye que:

“Estas muestras del interés de los matemáticos de todos los tiempos por los juegos matemáticos, que se podrían ciertamente multiplicar, apuntan a un hecho indudable con dos vertientes. Por una parte son muchos los juegos con un contenido matemático profundo y sugerente y por otra parte una gran porción de la matemática de todos los tiempos tiene un sabor lúdico que la asimila extraordinariamente al juego” (de Guzman, Juegos Matemáticos en la Enseñanza, 1984)

Es entonces como la naturaleza misma de la matemática invita a utilizar el Juego para su enseñanza, pues existen similitudes fundamentales en sus procedimientos, en Gairín Sallán (1990, pág. 112) se encuentra la siguiente comparación:

Juegos	Pensamiento matemático
Reglas del Juego	Reglas de construcciones, reglas lógicas, instrucciones, operaciones.
Situaciones iniciales	Axiomas, definiciones, lo “dado”.
Jugadas	Construcciones, deducciones
Figuras de Juego	Medios, expresiones, términos.
Estrategia de Juego	Utilización hábil de las reglas, reducción de ejercicios conocidos a fórmulas
Situaciones resultantes	Nuevos teoremas, nuevos conocimientos.

En cuanto a esto, es probable que muchos matemáticos y muchas matemáticas sientan el estudio como, entre otras muchas cosas, un desafiante Juego, pero, como lo señala de Guzman (1989), *“para muchos de los que ven la matemática desde fuera, ésta, mortalmente aburrida, nada tiene que ver con el juego.”* Así, enseñar matemática desde este recurso didáctico también es reivindicarlo con su historia y origen.

Pero no es solamente la similitud del Juego y la matemática lo que permite, o incita, a la utilización de este recurso. En la actualidad desde los y las infantes, hasta los y las jóvenes disfrutan y se divierten horas con Juegos acorde a su edad y realidad. Estos van desde los cada vez más popularizados Juegos de mesa, hasta los Juegos virtuales, y son parte de la cotidianidad y desarrollo social actual. Esto se menciona y desarrolla en Roca, G. (coord.) (2015) que hace un análisis exhaustivo de las diferentes tecnologías existentes en la actualidad, enfocado en la comprensión para padres y madres, y menciona que *“El uso cotidiano de las tecnologías digitales que realizan los adolescentes tiene que ver con sus necesidades y dinámicas sociales y culturales propias de su etapa evolutiva.”*

Se han expuesto los cruces existentes entre la matemática y el Juego, y parece poco lógico que este recurso no sea más masificado en las aulas escolares, como lo precisa Miguel de Guzmán (1989), quien menciona la casi nula investigación en esta área, incentivando a los profesores a que aprendan a aprovechar los estímulos y motivaciones que este espíritu de Juego puede ser capaz de infundir en sus estudiantes. Esto pues, dada la naturaleza misma de la juventud, es necesario agotar e innovar en los recursos que se utilizan, y algo importante es que el Juego puede mutar, pues puede estar sujeto a cambios de acuerdo con el contexto en que se utiliza, de acuerdo con los gustos e intereses de los participantes, lo que es una gran fortaleza de este recurso. Con respecto a esto, en Chile bajo la iniciativa de la fundación Observatorio del Juego se ha incentivado la investigación y divulgación del juego como un recurso para la enseñanza. En cuanto a esto señalan que, respecto al uso del Juego en establecimientos educacionales chilenos,

“En los primeros niveles educativos el juego está poco estimulado y en la medida en que el niño avanza por los niveles de la enseñanza básica el juego sólo disminuye y tiende a estar mal visto, segregándolo al espacio de recreo y creando una división arbitraria entre el jugar y el aprender.” (Garrido & Cárcamo, 2020, pág. 18).

Lo que, como ya se ha señalado, recae en lo absurdo cuando se observa los beneficios y la necesidad de incorporarlo, como señala Gardner (1979); citado en Fernández Lopez (2014, pág. 13.)

“Con seguridad el mejor modo de despertar a un estudiante consiste en presentarle un juego matemático intrigante, un puzle, un truco mágico, una paradoja, un modelo o cualquiera otra de entre una veintena de posibilidades que los profesores aburridos tienen a evitar porque parece frívolas”

En otras palabras, el solo hecho de cambiar la dinámica de clases por un Juego bien planificado es un detonante suficiente para generar el interés e incluso pasión por la matemática, como así puntualiza de Guzman (1984), *“el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo, que lo haga mucho más motivado, estimulante, incluso agradable y, para algunos, aún apasionante”*. De este modo no se trata solo jugar, como señala Gardner (1979) *“Si el «juego» se elige y prepara con cuidado, puede llevarle casi insensiblemente hasta ideas matemáticas de importancia”*.

Un buen resumen para lo anterior está en Muñiz-Rodríguez, Pedro, y J. Rodríguez (2014), quienes a través de diferentes autores, detallan las principales razones para utilizar los Juegos como recurso didáctico en el aula, de las cuales destacan:

- Son actividades atractivas y aceptadas con facilidad por los estudiantes que las encuentran novedosas, las reconocen como elementos de su realidad y desarrollan su espíritu competitivo. Además, el Juego estimula el desarrollo social de los estudiantes, favoreciendo las relaciones con otras personas, la expresión, la empatía, la cooperación y el trabajo en equipo, la aceptación y seguimiento de unas normas, la discusión de ideas, y el reconocimiento de los éxitos de los demás y comprensión de los propios fallos (Chamoso et al., 2004).
- En el ámbito matemático, el paralelismo existente entre las fases de los juegos de estrategia y la resolución de problemas fomentan el descubrimiento de procesos heurísticos en los alumnos (Corbalán, 1996, Gairín et al., 2006, Edo et al., 2008 y Hernández et al., 2010). Los juegos desarrollan capacidades cognitivas en los tres niveles de representación: enactivo, icónico y simbólico. Requieren esfuerzo, rigor, atención y memoria, y estimulan la imaginación (Alsina, 2007).

- Destacan por su utilidad en el tratamiento de la diversidad. En el aula de matemáticas, Contreras (2004) señala la utilidad de los juegos «como recurso motivador para los alumnos con mayores dificultades, y también como origen de posibles investigaciones para alumnos destacados».

Por otra parte, es importante puntualizar que para la utilización del Juego en el aula no existe una única técnica, pues puede ser tan diverso como la cantidad de Juegos existentes. Según Gairín Sallán (1990) existen consideraciones para el profesor que decida practicar Juegos con sus alumnos, específicamente sobre el modo en que hay que proceder, y que se han obtenido al observar diferentes situaciones que se han presentado a lo largo de la experimentación, de las cuales destacan:

1. Es necesario que el profesor practique el juego antes de presentarlo a sus alumnos.
2. El juego hay que proponerlo a los alumnos en el momento preciso. Es decir, que hay que determinar si el juego corresponde al nivel pre, co o post-instruccional. Y en el último caso hay que practicarlo relativamente próximo al momento en que se introdujo la instrucción.
3. El juego ha de utilizarse para el fin adecuado. Los alumnos deben conocer que el juego sirve para potenciar su aprendizaje y, por tanto, no ha de practicarse para cubrir tiempos muertos.
4. El juego hay que practicarlo en la forma correcta. Antes de iniciar el juego hay que dedicar alguna sesión para que los alumnos conozcan el material, para que se entiendan a fondo las reglas, para que todos conozcan la forma en que se gana o se pierde.
5. Todos los alumnos han de participar en el juego, que sea una actividad igual para todos, aunque en el desarrollo del mismo pueda haber grupos de alumnos que lo practiquen con diferentes grados de dificultad.
6. Arbitrar medidas para que la solución de juegos de estrategia lo puedan alcanzar todos, que no se haga pública la solución para que a ningún alumno (con las ayudas necesarias), se le hurte el placer de descubrir el resultado con sus propios medios. En ese sentido puede resultar interesante que el profesor tenga previsto pedir al alumno que ha encontrado la solución que trate de extender sus resultados a situaciones más complejas.

7. El profesor puede recurrir a los juegos comercializados o publicados para ponerlos a sus alumnos. Para hacer la elección más conveniente, el profesor debe hacer preguntas como las siguientes: ¿Sirve el juego para los objetivos propuestos?, ¿Qué conocimientos necesita el alumno para practicar el juego?, ¿Qué habilidades se requieren para practicar el juego?, ¿El juego es atractivo teniendo en cuenta la edad y maduración de los alumnos?, ¿Los alumnos tienen limitaciones físicas para practicar el juego?, ¿Hay problemas de costos o de espacio para la práctica del juego?, ¿Existe algún compañero que haya experimentado el juego en situaciones similares a las de mis alumnos?
8. Si el profesor decide elaborar un juego para que lo practiquen sus alumnos es conveniente recordar que hay muchos juegos, educativos o no, que ya han sido inventados, que llevan mucho tiempo practicándose y que suelen ser conocidos por los alumnos. Por ello, es bueno buscar un juego entre los existentes, para después modificar las reglas y/o los materiales y adaptarlos a nuestros intereses pedagógicos.

Para finalizar, es importante mencionar el rol del profesor o profesora, cuando se utiliza una metodología del Juego. Para esto, se considera lo más prudente y lógico, tomar el rol del profesor como un mediador del aprendizaje, el cual no es exclusivo para el Juego, sino que se enmarca en la búsqueda de aprendizajes significativos desde una perspectiva constructivista. En este aspecto se toman las principales características de las presentadas en León (2014, pág. 145) acerca de un docente mediador:

- Propicia espacios de interrelación, intercambios de conocimientos de diálogo y de apertura, donde él y el aprendiente son partícipes activos del proceso pedagógico
- Tiene la intención de facilitar el aprendizaje significativo: favorece la trascendencia, guía el desarrollo de estrategias, enriquece las habilidades básicas superando las dificultades.
- Anima a la búsqueda de la novedad: fomenta la curiosidad intelectual, la originalidad y el pensamiento divergente.
- Debe ofrecer el conocimiento como una actividad agradable, que genere placer en el proceso de aprendizaje y en su aplicación a la vida cotidiana.
- Despierta un sentimiento entremezclado de valores como libertad, humildad, responsabilidad, amor, y respeto por todos y todo.

- Emplea diferentes tratamientos pedagógicos según las demandas de los aprendientes.
- Desarrolla en los estudiantes actitudes positivas: haciéndoles vivir unos valores para que los hagan operativos en su conducta dentro de su realidad sociocultural.

Por desgracia, todo lo anteriormente mencionado queda debilitado pues, como lo señalan Garrido y Cárcamo (2020, pág. 20),

“Si bien el valor del juego en relación al aprendizaje ha comenzado a abrirse un espacio en las preocupaciones públicas de educación de algunos niveles educativos (específicamente educación inicial), es necesario que esto se traduzca en una política pública a todo nivel educativo, que tenga relación con abrir espacios de juego en la escuela, tales como ludotecas que proporcionen material concreto para los docentes a la hora de integrar el juego en el aula.”

Es así como la falta de políticas públicas que apoyen y fomenten el uso de Juegos en el aula de clases, afecta negativamente en la búsqueda de nuevas metodologías para la enseñanza, en particular el uso de recursos lúdicos y Juegos.

El Juego y la Combinatoria

“La combinatoria es el núcleo básico de todos los juegos en los que se pide enumerar las distintas formas de realizar una tarea, muchos de ellos sin resolver aún, como el de averiguar el número de formas distintas de plegar una tira de sellos, el problema del viajante”. (de Guzman, Juegos y matemáticas, 1989). Así, como menciona el autor, en el inicio del estudio combinatorio y probabilístico, la Combinatoria es utilizada en Juegos muy populares azar, resolución de problemas de la época y magia de alquimistas, según se menciona en Fernández (2007)

Cuando se investiga sobre la Combinatoria y su relación, o enseñanza a través, de Juegos, es común encontrar las llamadas preguntas de ingenio o de razonamiento, por ejemplo en Perelman (1980) se busca motivar el interés en el lector, por el estudio sistemático de la Aritmética, pues según se menciona, *“lo que en un principio es sólo curiosidad, posteriormente se puede llegar a transformar en un anhelo”* Así es que, por ejemplo, en el primer capítulo *“Desayuno y rompecabezas”* el autor propone un *“ingenioso truco”* para sorprender a los presentes, denominado ¿Quién ha cogido cada objeto?, este consiste en pedirle a tres

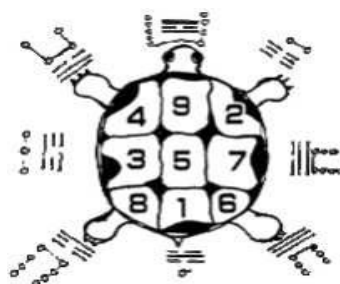
participantes que escojan, de manera secreta, entre tres objetos, uno cada uno. Esto para que, luego de otros diferentes pasos, “adivinar” quién de esos tres participantes tiene cada uno de los tres objetos. La manera en que el truco resulta está basada en un razonamiento combinatorio de los casos posibles, y así lograr “adivinarlo”. Como este ejemplo, existen muchos más en “*Matemáticas recreativas*” Perelman (1980) que realiza una mirada importante, pero no nueva, de cómo la Combinatoria no es solo utilización de fórmulas para el cálculo de probabilidades, si no como la base de diferentes juegos de ingenio, trucos, entre otros.

Lo anterior se ha escrito como ejemplo para mostrar que la Combinatoria tiene una profunda relación con el juego, lo cual será utilizado para contrastarlo más adelante, con las metodologías que actualmente se utilizan para el proceso de enseñanza aprendizaje de las técnicas Combinatorias.

Historia de las técnicas de conteo

Es importante contextualizar el estudio de la Combinatoria a lo largo de los años. Para esto encontramos la cronología hecha en Vargas (2015), la cual presenta algunos aspectos relevantes en el camino del descubrimiento y aprendizaje, a lo largo de la historia matemática de la Combinatoria.

La primera aparición se encuentra en la conocida leyenda de Los Cuadrados Mágicos, del siglo XXII AC, la cual narra la historia de cómo el emperador chino Yu se encuentra una tortuga mágica que dispone, en su caparazón, los números del 1 al 9 de tal forma que la suma horizontal, vertical o diagonal siempre sea un número constante. Así como muestra la imagen:



La historia de la Combinatoria continúa con su utilización en otras áreas de la matemática, hasta que, en el siglo XVI, los trabajos de Fermat y Pascal inician la visión, de que el análisis Combinatorio debe trabajarse con estudios formales, tal y como otros campos de la matemática. Así en el siglo XVII Wihem Leibniz, en *Dissertatio de Arte Combinatoria*, introduce formalmente el término combinatorio, el cual se consolida con el artículo de *Ars Conjectandi* (el arte de conjeturar) de J. Bernoulli, donde para trabajar la probabilidad, requiere dejar establecido nociones de Combinatoria. Con esto se inicia la investigación de la Combinatoria como una disciplina científica, es decir, siendo tratada tal y como otra rama de la matemática.

Bases curriculares

El MINEDUC entrega, el año 2015, las bases curriculares para 7°básico a 2°medio, de acuerdo con la Ley General de Educación de 2009. Este es el principal documento del Currículum nacional, por lo que, a pesar de su flexibilidad para ser aplicado, es utilizado casi en su totalidad en las planificaciones escolares.

Este documento se organiza a partir de objetivos de aprendizaje, de esto menciona que, *“Las Bases Curriculares, por medio de los Objetivos de Aprendizaje (OA), definen la expectativa formativa que se espera que logren las y los estudiantes en cada asignatura y curso.”* (Ministerio de Educación de Chile, 2016).

En la asignatura de matemática se espera desarrollar cuatro principales habilidades: Resolver Problemas, Argumentar y Comunicar, Representar y Modelar. Además los conocimientos se organizan en cuatro ejes temáticos: Números, Álgebra y Funciones, Geometría, y Probabilidad y Estadística (Ministerio de Educación, 2015)

En particular, el eje de Probabilidad y Estadística busca que los y las estudiantes sean capaces de interpretar y analizar la información de datos estadísticos, comprendiendo el rol de la probabilidad en la sociedad misma, para así ser utilizada como una herramienta diaria. (Ministerio de Educación, 2015).

Con respecto a los Métodos Combinatorios, o de Recuento, estos se encuentran en las bases curriculares en 2°medio, en el eje de Probabilidad y Estadística, en el objetivo de aprendizaje número once: *“OA11. Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para*

calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.” (Ministerio de Educación, 2015).

Para los cuales se consideran los siguientes indicadores de evaluación:

- Realizan permutaciones de hasta cinco elementos, con material concreto o pictóricamente.
- Reconocen el patrón con el cual se aumenta el total de posibilidades si se agrega un elemento.
- Aplican el término “ $n!$ ” en la resolución de problemas azarosos.
- Combinan las permutaciones con el sorteo al azar, con o sin reposición.
- Resuelven problemas de juegos de azar y de la vida cotidiana, aplicando combinatoria y permutaciones.

(Ministerio de Educación de Chile, 2016)

Por otra parte, en el programa de estudio para 2° medio, se encuentran, para la enseñanza de este contenido, ocho propuestas de actividades y una de evaluación. A continuación se detallan cuatro propuesta de actividades y la de evaluación.

Propuesta de actividad 1 y 2

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (0A a)

1. En una carrera de Fórmula 1, los autos no parten de la misma línea. Se fija una posición de partida para cada uno, según los resultados del entrenamiento. Una buena posición de partida mejora la posibilidad de ganar la carrera. Los mejores pilotos actuales del torneo, como Vettel, Alonso, Hamilton y Räikkönen, siempre luchan por las primeras cuatro posiciones de partida.



- Determinan sistemáticamente todas las permutaciones de las cuatro posiciones de partida; por ejemplo: la permutación (V, A, H, R) significa primera posición Vettel; segunda posición, Alonso; tercera posición, Hamilton; y cuarta posición, Räikkönen.
- Responden cuántas permutaciones habrá si se considera adicionalmente la quinta posición de partida. Explican las respuestas sin mencionar todas las permutaciones.

Resolver problemas

Utilizar estrategias avanzadas. (0A a)

2. El profesor de Matemática va al colegio solamente con camisas blancas o moradas. Para variar su presencia tiene, además, tres tipos de corbatas: unicolores, rayadas y punteadas.



- ¿Es posible que el profesor vaya al colegio los cinco días de la semana con diferentes tipos de combinaciones, sin repetir ninguna?

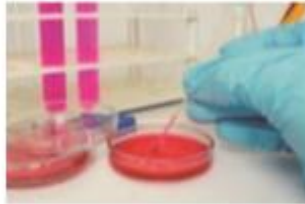
A un costado se detallan las habilidades a desarrollar, bajo las cuales se propone un objetivo de actitud.

Propuesta de actividad 5 y 6

Modelar

Ajustar modelos
acercándolos a la realidad.
(OA j)

5. En el desarrollo de un medicamento trabajan cuatro científicos; se elegirá a dos de ellos para que gestionen la parte financiera de la investigación. No habrá ninguna prioridad entre las personas elegidas.

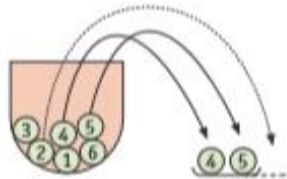


- Elaboran un modelo para la elección azarosa de las personas encargadas de la parte financiera.
- Responden: ¿Cuántas posibilidades de pares de personas hay?
- Comparan el número de posibilidades con el resultado del ejercicio c de la actividad anterior. Explican y comunican la diferencia.

Argumentar y comunicar

Demstrar resultados e
identificar saltos o errores
en el proceso. (OA g)

6. El centro de alumnos de un colegio pretende realizar una rifa a modo de "mini loto", con 6 bolitas numeradas del 1 al 6. Todavía no saben si harán un sorteo del tipo "2 de 6" o "3 de 6".



- Los alumnos y las alumnas conjeturan acerca de qué tipo de sorteo tiene más posibilidades: el "2 de 6" o el "3 de 6".
- Determinan sistemáticamente el número de posibilidades para los dos tipos de sorteo.
- Conjeturan, sin realizar ningún cálculo, acerca del número de posibilidades de ambos sorteos, sin importar el orden de los números sorteados. Razonan y comunican la conjetura.

Observaciones a la o el docente

Se sugiere al profesor o la profesora usar este tema para resaltar y valorar el aporte de los datos cuantitativos para comprender la realidad social. (OA E)

En algunas actividades, como el caso de la número 6, se detallan Observaciones a la o el docente.

Es importante mencionar que, en las ocho actividades propuestas para la enseñanza de Métodos Combinatorios, se detallan las habilidades y actitudes a desarrollar con cada una de ellas. En cuanto a las habilidades solo se menciona Resolver problemas, Modelar, y Argumentar y comunicar.

En cuanto a la evaluación, en el mismo material se propone una, en la que se detalla una actividad, con indicadores específicos, y criterios para tal evaluación. Tal y como se muestra en la siguiente imagen:

EVALUACIÓN 2

Objetivos de Aprendizaje

OA 11

Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Indicadores de Evaluación

- No consideran la aplicación de la fórmula " n sobre k ".
- Reconocen que el orden en que los tres mejores lleguen a la meta no importa, y consideran los 6 triples –por ejemplo (ABC), (ACB), (CBA)– como un solo triple.
- Determinan sistemáticamente todos los triples.
- Calculan correctamente las probabilidades.

ACTIVIDAD	CRITERIOS DE EVALUACIÓN
La resolución de esta actividad se puede agregar al Portafolio. En el entrenamiento para un campeonato regional de atletismo escolar, el profesor o la profesora realiza una carrera de selección para averiguar cuáles son 3 de los 5 mejores alumnos o alumnas de la competencia de 100 m, para que representen a su colegio. a. Responden: ¿Cuántas posibilidades de selección de 3 alumnas o alumnos hay? b. Entre los 5 alumnos o alumnas que participan en la carrera, hay 3 del mismo curso. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 estudiantes califiquen para el campeonato, si todos tienen aproximadamente el mismo rendimiento?  c. Antes de realizar la carrera de selección, una alumna o un alumno se retira voluntariamente. Determinan sistemáticamente las posibilidades de elegir a las 3 alumnas o los 3 alumnos para el campeonato.	• Elaboran un esquema para determinar sistemáticamente los triples de tres alumnos o alumnas. • Determinan correctamente el número de los triples. • Aplican el modelo Laplace para calcular la probabilidad de la actividad b. • Eligen un esquema nuevo para la actividad c, o utilizan el esquema anterior reduciendo el total de participantes.

2

U4

Por otra parte, en conjunto con la publicación de las bases curriculares, se entregan los estándares de aprendizaje para la educación. Estos “(...) son una herramienta que permite determinar qué tan adecuados son los aprendizajes de los y las estudiantes en relación con los objetivos planteados en el Currículum nacional” (Ministerio de Educación, 2015), y se organizan según niveles de aprendizaje, definiendo así aprendizajes mínimos para alcanzar cada uno de esos niveles. Para el sistema educacional chileno se definen tres niveles de aprendizaje: Adecuado, Elemental, e Insuficiente.

En el caso de la unidad de Datos y Azar de 2°medio, se observan los siguientes estándares para alcanzar el nivel adecuado y elemental:

DATOS Y AZAR	• Extraer información a partir de datos agrupados presentados en tablas, histogramas, gráficos de barras, circulares o de líneas, y realizar cálculos e inferencias. • Interpretar medidas de tendencia central (media aritmética, mediana y moda), de posición (cuartiles, quintiles y deciles) y de dispersión (rango) en situaciones cotidianas con datos no agrupados. • Comparar dos conjuntos de datos a partir de sus medidas de tendencia central y de dispersión. • Determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento, de su complemento y de un evento formado por la unión de dos sucesos simples en un experimento aleatorio, mediante frecuencias relativas o el modelo de Laplace.	• Extraer información a partir de datos presentados en tablas, gráficos de barras, circulares o de líneas, y realizar cálculos. • Calcular medidas de tendencia central (media aritmética, mediana y moda) de un conjunto de datos no agrupados. • Determinar la probabilidad de ocurrencia de un suceso simple en un experimento aleatorio, mediante frecuencias relativas o el modelo de Laplace.
--------------	---	---

A la izquierda, requisitos mínimos para alcanzar el nivel de aprendizaje adecuado, y a la derecha, requisitos mínimos para alcanzar el nivel de aprendizaje elemental. Obtenidos de (Ministerio de Educación, 2015, pág.45)

Textos escolares.

Texto escolar público.

El principal insumo para la enseñanza de Métodos Combinatorios en Chile es el texto para el estudiante, el cual es otorgado de manera gratuita a los establecimientos educacionales municipales, siendo un complemento para el aprendizaje en clases, pues, adicionalmente a este se le entrega al docente una guía didáctica que acompaña el uso de dicho texto. En estos materiales de apoyo se observa la siguiente línea de trabajo:

1) **Actividad de problematización:** Donde se propone un trabajo grupal para introducir el contenido y lograr un desequilibrio con los aprendizajes previos.

2) **Actividades de modelación:** Donde los estudiantes siguen un modelo que les da la solución al problema anterior, el cual luego deben replicar en otros problemas.

3) **Institucionalización:** Se materializa lo anterior a través de un cuadro al final de la página, el cual recoge lo estudiado y lo resume con las fórmulas correspondientes.

4) **Actividades de práctica:** Corresponde a ejercicios y problemas para ejercitar lo aprendido.

La enseñanza de Métodos Combinatorios, en el texto de matemática para el estudiante de 2° medio (Ministerio de Educación de Chile, 2018), se encuentra en la unidad 4, correspondiente al eje de Probabilidad y Estadística, lección nueve, “*Técnicas de conteo*”, e inicia con la enseñanza de la aplicación del principio multiplicativo, siendo este el tema uno, denominado: “*¿Cuándo se aplica el principio multiplicativo?*”. Se continua con el tema dos, llamado “*¿Qué son las permutaciones y las combinaciones?*”, en la cual se aplica la metodología anteriormente explicada de la siguiente forma:

1) Actividad de problematización: El texto inicia el tema con un problema cotidiano, en búsqueda de que pueda resolverse intuitivamente.

Lección 9

Tema 2: ¿Qué son las permutaciones y las combinaciones?

✓ ¿Qué aprenderé?

A reconocer las variaciones y las combinaciones, distinguirlas de las permutaciones y calcularlas.

✓ ¿Para qué?

Para aplicar las permutaciones, variaciones y combinaciones en la resolución de problemas de probabilidades.

Matemática en el deporte

La idea de la fase por grupos pretende que cada participante pueda asegurar un mínimo de partidos jugados que justifiquen su clasificación y participación. Fue creada a partir de los campeonatos mundiales de fútbol, ya que antiguamente muchos futbolistas no eran profesionales (tenían sus propios empleos) y la mayoría de los viajes largos se realizaban en barco. En esos tiempos, no era un buen estímulo obtener el permiso de viajar para todos, navegar varias semanas, para perder solo un partido y tener que regresar inmediatamente.

●●● Actividad grupal

Taller

Muchos campeonatos, de diversas disciplinas, se organizan en dos fases: la primera, conocida como "de grupos", en la que los primeros lugares de cada grupo clasifican a la siguiente y la segunda, de "eliminación directa", donde el ganador permanece en competencia y el perdedor queda eliminado.

El Campeonato de Fútbol Sudamericano Sub-20 se desarrolla en dos fases. En la fase inicial se organizan dos grupos de 5 países cada uno. Los primeros 3 lugares de cada grupo pasan a la fase final.

- 1 Consideren los grupos sorteados para el Campeonato Sudamericano Sub-20 Ecuador 2017, clasificatorio para el Mundial de Fútbol Sub-20.

Grupo A	Grupo B
 Ecuador	 Argentina
 Colombia	 Uruguay
 Brasil	 Perú
 Paraguay	 Venezuela
 Chile	 Bolivia

- a. ¿De cuántas maneras puede ordenarse el grupo A? Comenten y decidan la mejor forma de contar los casos sin repetirtos ni que falte alguno.
- b. De cada grupo, clasifican los tres primeros equipos a la segunda fase. Según estas posiciones se define el orden de los partidos, por lo tanto, es importante si lo hace en primer, segundo o tercer lugar. En el grupo A, ¿qué combinaciones posibles hubo para los tres primeros lugares? Escriban todas las posibilidades.
- c. ¿Cuántas son todas las combinaciones posibles para los tres primeros lugares?

¿Cómo se relaciona esta cantidad con la cantidad de selecciones que participaron en el campeonato y la de equipos que clasifican a la segunda fase? Expliquen.

2) **Actividades de modelación:** El texto trabaja una situación particular para encontrar la fórmula, esto a través del razonamiento necesario para resolver un problema. Este ya está resuelto, y busca que los y las estudiantes repliquen lo hecho, en ejercicios posteriores.

Lección 9

Ayuda

Un diagrama de árbol permite representar una secuencia de realizaciones de un experimento. En cada etapa, sus ramas indican la cantidad de casos posibles que existen para cada una.

Glosario

Factorial: de cualquier número natural n al producto de todos los números naturales menores o iguales que él.

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Variación: de m elementos tomados de n en n (con $m \geq n$) a los distintos grupos formados por n elementos de forma que no entran todos los elementos ni se repiten, pero sí importa el orden de los elementos en el grupo.

Actividades de modelación

1. La profesora Valentina debe seleccionar entre 5 de sus alumnos (Andrés, Bruno, Carla, Diego y Eugenia) a 3 de ellos, los cuales representarán al liceo en una competencia. ¿Cuántas posibilidades tiene de hacerlo?

Una forma de resolverlo es mediante un diagrama de árbol, pero también es posible imaginar que lo construye para contar las posibilidades. Observa.

- PASO 1** Si Valentina tuviera que escoger en orden a sus alumnos, tendría 5 posibilidades para escoger al primero. Luego, para escoger al segundo, tendría solo 4 posibilidades, 3 para el tercero, 2 para el cuarto y 1 para el quinto. Por lo tanto, en el diagrama de árbol se podrían ver:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ posibilidades.}$$

Este producto, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ corresponde a 5 **factorial**, que se escribe $5!$.

- PASO 2** Ya que Valentina debe escoger solo a 3 de sus alumnos, el diagrama de árbol habría llegado hasta la tercera etapa, es decir, habría tenido solo $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ posibilidades.

Observa que, al "suprimir" las últimas dos etapas en el diagrama de árbol, se ha debido dividir por $1 \cdot 2 = 2$ el número de casos de esas etapas, es decir:

$$60 = \frac{120}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5 - 3)!}$$

Al número $\frac{5!}{(5 - 3)!}$ le llamaremos **variación** de 3 objetos escogidos entre 5, y corresponde a la cantidad de formas en que se puede escoger, en orden, 3 objetos entre 5 disponibles. Se anota en este caso como V_3^5 .

- PASO 3** Al considerar estos 60 casos, se está pensando que escoger, por ejemplo, a Andrés, Bruno y Carla es distinto que escoger a Carla, Andrés y Bruno. Entonces, ya que las 3 personas pueden ordenarse de $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneras, se debe dividir los 60 casos por estas 6 maneras, para obtener las formas de escogerlos sin importar el orden:

$$\frac{60}{6} = 10 = \frac{\frac{5!}{2!}}{3!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5!}{(5 - 3)! \cdot 3!}$$

Al número $\frac{5!}{(5 - 3)! \cdot 3!}$ le llamaremos **combinación** de 5 sobre 3, y corresponde a la cantidad de formas en que podemos escoger, sin importar el orden, 3 objetos entre 5 disponibles.

3) **Institucionalización:** El texto resume el contenido trabajado en un recuadro con las definiciones, fórmulas, y algunas propiedades.

Si $m, n \in \mathbb{N}_0$, entonces:

- Se llama **permutación** de n elementos (se escribe P_n) a la cantidad de formas en que se pueden ordenar en una fila y se puede calcular como

$$P_n = n!$$

- Se llama **variación** de n elementos escogidos entre m (se escribe V_n^m) a la cantidad de ordenamientos posibles de n elementos, escogidos entre m . La cantidad de ellos se puede calcular como:

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

- Se llama **combinación** de n elementos escogidos de entre m a la cantidad de posibilidades que hay de escoger n elementos de un total de m , sin que importe el orden en que son escogidos. La cantidad de combinaciones se escribe como C_n^m , y se puede calcular como:

$$C_n^m = \frac{V_n^m}{n!} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

- La expresión $\frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$ suele escribirse como $\binom{m}{n}$ –que se lee “ m sobre n ”– y recibe el nombre de **número combinatorio**.

- Algunas propiedades de los números combinatorios son:

- Cualquier número sobre 0 es igual a 1.

$$\binom{n}{0} = 1$$

- Todo número sobre sí mismo es igual a 1.

$$\binom{n}{n} = 1$$

- Un número sobre 1 es siempre igual al número.

$$\binom{n}{1} = n$$

Ayuda

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{1}{c}} = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$$

4) **Actividades de práctica:** Para finalizar la lección se presentan ejercicios y problemas muy variados, que buscan poner en práctica lo aprendido, y con esto finaliza el tema 2 de la lección 9.

Lección 9

Actividades de práctica

1. Cinco estudiantes se presentan de candidatos para la directiva del curso. Si se debe escoger a tres de ellos para ocupar los cargos de presidente, secretario y tesorero, ¿cuántas son las distintas directivas posibles?
2. Gustavo tiene una colección de 40 revistas de cómics, de las cuales ha decidido regalarte 6 a Florencia, las que ella escoja. ¿De cuántas maneras puede elegir las revistas Florencia?
3. A partir de un grupo de 10 jugadores disponibles, se quiere formar un equipo de futbolito de 7 jugadores. ¿De cuántas maneras se puede hacer?
4. Un profesor distribuye a sus estudiantes en filas en la sala, de modo que cada fila tiene 6 puestos. Si en total hay 7 filas, ¿de cuántas formas distintas puede formarse la primera de ellas?
5. Rosario se cambió de departamento y quiere invitar a algunos de sus amigos para que lo conozcan. Como tiene poco espacio, decide invitar a 10 de ellos, pero en grupos de 5. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerlo?
6. Los estudiantes de un curso han organizado una rifa a beneficio de uno de sus compañeros, para el que venderán boletos en toda la comunidad del colegio. Cada boleto tiene 4 números impresos, que están entre 01 y 30 (ambos inclusive). El día del sorteo se utilizará una tómbola con bolitas numeradas del 01 al 30 y se extraerán cuatro de ellas sin reposición. Se adjudicará el premio mayor quien tenga en su boleto los 4 números que se sacaron. Si ningún boleto está repetido, ¿cuántos se pueden haber impreso (como máximo)?
7. La directora técnica de un equipo femenino de básquetbol debe definir a las jugadoras que integrarán la selección para un campeonato. En su equipo completo dispone de 5 bases, 8 escoltas, 10 aleros, 6 ala-pivot y 7 pivot.

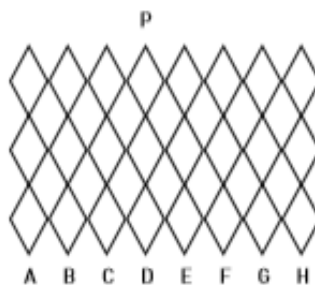
Glosario

En un equipo de básquetbol, normalmente, el **base** es el director del equipo sobre la cancha. El **escolta** es a menudo el mejor tirador, especialmente a gran distancia del aro. El **alero** habitualmente tiene capacidad para llegar a canasta con rapidez manejando la pelota. El **ala-pivot** suele ser un jugador corpulento que se desenvuelve cerca del aro. Por último, el **pivot** acostumbra a ser el jugador más alto y corpulento del equipo.



- a. En la nómina final tiene pensado incluir a tres jugadoras por cada posición. ¿De cuántas maneras puede formar su selección?
- b. Ella además definirá para cada posición la calidad de titular, suplente y sparring, es decir, integrante del equipo de entrenamiento. Con estas condiciones, ¿de cuántas maneras puede nominar la selección final?

8. Un grupo de 4 amigos se encuentra jugando cartas con un naipe inglés (52 cartas). Si cada uno de ellos recibe 5 cartas al azar, siguiendo el orden en el que están sentados, ¿cuántos posibles repartos hay?
9. Alejandra diseñó un sorteo en el que se escogerán 12 bolitas de una tómbola, de un total de 20 bolitas, numeradas del 01 al 20. Cada participante del sorteo tendrá un cartón con 12 números, y resultará ganador quien tenga todos los números escogidos. Marcelo le sugiere que, en lugar de 12 números, escojan 10, pues habrá mayores posibilidades de ganar, ya que habrá menos cartones posibles. ¿Estás de acuerdo con Marcelo?, ¿por qué?
10. ¿Cuántos números de 7 cifras se pueden formar utilizando tres 2 y cuatro 3?
11. Demuestra que si p y q son dos números enteros de modo que $p > q \geq 0$, se cumple que $\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q-1} + \binom{p-1}{q}$
12. Una reja de alambre tiene la siguiente forma:



Una gota de agua se encuentra en el punto P y en cada unión de los alambres puede irse por la derecha o la izquierda.

- a. ¿A qué puntos puede llegar en el último nivel?
- b. ¿De cuántas maneras puede llegar a cada uno de ellos? Explica.

¿Crees que alguien ha pensado en una solución diferente?, ¿por qué?

¿Qué aprendí hoy?

- 1 En un campeonato de vóleybol participan 12 equipos, cada uno de los cuales jugará contra cada rival un solo partido. Al finalizar, se entregarán premios a los tres primeros lugares.
 - a. ¿Cuántos partidos se jugarán en total?
 - b. ¿De cuántas maneras diferentes puede conformarse el podio?
- 2 Para una representación folclórica se necesita formar un grupo de 4 estudiantes de un taller de 8 integrantes. ¿Cuántos grupos diferentes se pueden formar?

Cuaderno
página 126

Para terminar la lección, se presenta el tema tres, denominado “¿En qué se aplican las combinaciones?”, siguiendo la forma presentada anterior, el texto se organiza así:

1) **Actividad de problematización:** El texto propone una actividad de inicio que continua con el contexto del tema anterior

Lección 9

Tema 3: ¿En qué se aplican las combinaciones?

✓ ¿Qué aprenderé?

A aplicar las combinaciones en la resolución de problemas cotidianos.

✓ ¿Para qué?

Para distinguir las combinaciones de las permutaciones y poder decidir en qué casos corresponde uno o el otro.

●●● Actividad grupal

Taller

Cuando se organiza un campeonato de fútbol, en el que los equipos participantes juegan todos contra todos, generalmente se intenta que el partido entre los dos equipos que atraen más público se realice en algunas de las fechas centrales, de modo que exista una mayor expectativa por el partido, es decir, por una parte que no se juegue con el campeonato ya definido y, por otra, que no resulte ser una final anticipada.

Si se está organizando un campeonato de fútbol en el que participan 12 equipos:

1 ¿Cuántos partidos se deben jugar en total?

2 ¿En cuántas fechas es posible completar el campeonato?, ¿por qué?

3 En su cuaderno, construyan una tabla en la que se muestre el desarrollo del campeonato, es decir, cuáles partidos se juegan en cada fecha. Consideren que cada equipo juega solo un partido por fecha. Luego, organicen un orden posible para cada partido. ¿De cuántas maneras distintas se podrían ordenar? Expliquen.

4 Si se prueba haciendo el calendario de los partidos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el partido entre los dos equipos favoritos se juegue entre las fechas 7 y 9 (ambas inclusive)? Justifiquen su respuesta.

¿Cómo trabajé el taller?

Individualmente



Grupalmente



¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?

Individualmente



Grupalmente



2) **Actividades de modelación:** El texto propone tres problemas donde se utilizan las diferentes técnicas de conteo para el cálculo de probabilidades, un ejemplo de esto es el siguiente:



Actividades de modelación

1. Cada competencia deportiva considera una instancia de desempate si es necesario determinar un ganador. Por ejemplo, en el tenis, se recurre al *tie break* para desempatar los sets. En el básquetbol se agregan tiempos adicionales de 5 minutos. En el caso del fútbol, se utiliza generalmente la **definición por penales**.

Si un equipo cuenta con 11 jugadores al comenzar los penales:

- a. ¿De cuántas maneras se puede escoger a los cinco primeros jugadores que patearán, si luego entre ellos definirán el orden que seguirán?

Ya que los jugadores acordarán el orden en que tirarán después de ser escogidos, la elección inicial no considerará el orden. Por lo tanto, se trata de una _____ de 5 elementos entre 11. En total serán:

- b. Si dos jugadores quieren calcular la probabilidad de ser escogidos ambos entre los cinco primeros tiradores, ¿qué cálculos deben realizar?

Podemos considerar todas las elecciones en las que dos jugadores fijos se encuentran presentes. En este caso, el problema se traduce en escoger solo 3 jugadores entre los 9 restantes, es decir:

$$C_3^9 = \frac{9!}{3! \cdot 9 - 3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!}$$

La probabilidad, por lo tanto, corresponde al cociente entre los casos favorables y los casos totales. Así:

$$P = \frac{C_3^9}{C_5^{11}} = \frac{\frac{9!}{3! \cdot 6!}}{\frac{11!}{5! \cdot 6!}} = \frac{9!}{3! \cdot 6} \cdot \frac{5! \cdot 6!}{11!} =$$

Por lo tanto, para dos jugadores determinados, la probabilidad de ser escogidos ambos dentro de los primeros cinco tiradores es .

Glosario

Definición por penales: serie de lanzamientos desde el punto penal, para los que ambos equipos deben comenzar los tiros con igual cantidad de jugadores. Primero, se lanzan cinco tiros por cada equipo, en forma alternada, al cabo de los cuales gana quien haya anotado más veces. Si el empate persiste, continúan lanzado un tiro cada equipo hasta que uno anota y el otro falla.

Ayuda

Recuerda que el factorial de un número representa una multiplicación; luego, una expresión con fracciones y factoriales generalmente puede simplificarse. Observa.

$$\frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4! \cdot 6!}{10!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{10 \cdot 9 \cdot 8!} = \frac{5 \cdot 6}{10 \cdot 9} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

3) **Institucionalización:** Al finalizar los ejercicios guiados, el texto escolar resume lo trabajado a través del siguiente cuadro.

Los problemas que involucran probabilidades se pueden resolver utilizando variaciones, combinaciones y el principio multiplicativo.

Dependiendo del caso de que se trate, es importante diferenciar si la situación involucra permutaciones o combinaciones, analizando si el orden es importante o no en la determinación de los casos.

Finalmente, se calcula el cociente entre los casos favorables y los casos totales, simplificando los factores y factoriales presentes según corresponda para expresar el resultado como fracción irreducible.

4) **Actividades de práctica:** El texto presenta ejercicios donde se busca calcular probabilidades en diferentes contextos. El tema finaliza con la siguiente actividad:



6. En el póker, se llama "mano" a las cinco cartas que recibe cada jugador. El juego consiste en formar alguna de las siguientes combinaciones:

Nombre	Descripción	Ejemplo				
Escalera Real	5 cartas seguidas, de la misma pinta, del 10 al As.	A ♠	K ♠	Q ♠	J ♠	10 ♠
Escalera de color	5 cartas seguidas, de la misma pinta, sin el As como carta más alta.	J ♥	10 ♥	9 ♥	8 ♥	7 ♥
Póker	4 cartas del mismo valor.	7 ♥	7 ♠	7 ♦	7 ♣	4 ♦
Full	3 cartas de igual valor y otras 2 de igual valor, pero distintas de las anteriores.	5 ♥	5 ♦	5 ♣	10 ♥	10 ♣
Color	5 cartas de la misma pinta, no seguidas.	8 ♠	7 ♠	4 ♠	3 ♠	2 ♠
Escalera	5 cartas seguidas, no de la misma pinta.	9 ♦	8 ♣	7 ♠	6 ♥	5 ♦
Trio	Tres cartas del mismo valor.	6 ♣	6 ♥	6 ♦	A ♠	K ♦
Doble par	Dos pares de cartas, de los mismos valores entre sí.	5 ♦	5 ♥	3 ♠	A ♣	A ♥
Par	Dos cartas del mismo valor.	7 ♣	7 ♥	6 ♦	2 ♠	A ♣

Un jugador ha recibido su mano. Calcula la probabilidad de que tenga:

- Una escalera real.
- Un póker de figuras (K, Q o J).
- Un full con un trío de figuras y un par de números menores que 4.
- Un póker de cartas de pinta roja.
- Un par de números.
- Una escalera cuya carta más alta sea un 8.

¿Qué aprendí hoy?

En una tómbola hay 8 bolitas en total, rojas o blancas y se extraerán tres de ellas sin reponerlas. Se sabe además que la probabilidad de que salgan tres bolitas rojas es igual a $\frac{5}{28}$.

- ¿Cuántas bolitas hay de cada color?
- ¿Cuál es la probabilidad de que las tres bolitas sean blancas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que salgan más bolitas rojas que blancas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que salgan más bolitas blancas que rojas?



Cuaderno
página 128

Texto escolar privado.

Otro ejemplo de texto escolar es el Texto-Manual 2 de la editorial Crecer Pensando (Santis Ávalos, Celedón Montiel, Aguilar Baeza, & García Escuti, 2016), el cual es ocupado, en su mayoría, en colegios particulares que siguen una metodología Montessori. Este texto sigue la siguiente línea de trabajo para la enseñanza de Métodos Combinatorios:

1) **Actividades resueltas acompañas del contenido:** En esta página se muestran diferentes tipos ejercicios resueltos, mediante fórmulas que son explicadas en globos de textos al costado de estos.

2) **Actividades propuestas:** En esta sección se muestran ejercicios y problemas de manera deductiva, para que los y las estudiantes los desarrollen de “menos a más” realizándolos. Además existe una sección donde se explica el trabajo son algún software.

Este texto propone la enseñanza de Métodos Combinatorios, primero de manera conjunta Permutación y Variación, y luego por separado Combinación. En el caso de la Combinación, la manera en que sigue la línea anteriormente explicada es la siguiente:

1) **Actividades resueltas acompañas del contenido:** Se proponen tres diferentes ejercicios resueltos, y al costado se encuentran las definiciones, fórmulas y propiedades.

Combinatoria



En una hoja de cálculo también es posible encontrar la función COMBINAT, que se utiliza para realizar los cálculos de las distintas maneras en que pueden agruparse los elementos muestrales.

También se utiliza para obtener los valores de los coeficientes numéricos del binomio $(a + b)^n$ a la n ; es decir, de $(a + b)^n$.

Actividades resueltas

1. En un taller de ciencias hay inscritos 67 estudiantes, de los cuales 48 son niñas; por lo que se pueden formar 19 parejas (niño y niña) de trabajo. Para una feria científica se seleccionarán 5 parejas. ¿De cuántas formas pueden formarse estas parejas?

Como se trata de una combinación, se tiene:

$$C_{19,5} = \binom{19}{5} = \frac{19!}{(19-5)! \cdot 5!} = \frac{19!}{14! \cdot 5!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14!}{14! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11.628$$

Las 19 parejas a formar es posible escogerlas de 11.628 maneras diferentes.

2. En el taller de Matemática, se realiza la actividad geométrica de hacer una circunferencia y cada 45° marcar un punto en ella, para poder trazar cuerdas que unan a todos los puntos entre sí. ¿Cuántas cuerdas deberán ser dibujadas?



Se trata de una combinación, ya que cada cuerda une dos puntos y la cuerda no se puede repetir de ida y de vuelta, es decir, entre un par de puntos solo se considera una cuerda.

Luego:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 2 \cdot 1} = 28$$

Por lo tanto, se deben dibujar 28 cuerdas.

3. Si $\binom{7}{3} = 35$, calcula $\binom{7}{4}$ solo utilizando propiedades.

Como $\binom{7}{4} = \binom{7}{7-4}$, es posible aplicar la propiedad

$$\binom{m}{m-n} = \binom{m}{n}. \text{ Luego } \binom{7}{7-4} = \binom{7}{3} = 35.$$

Combinaciones:
son subconjuntos del espacio muestral que pueden formarse teniendo en cuenta que no incide su orden en la cantidad de ellas, y que son diferentes solo cuando hay algún elemento distinto.

$$C_m^n = C_{n,m} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{V_{m,n}}{P_n}$$

La fracción $\frac{m!}{n!(m-n)!}$ se conoce como número combinatorio y se denota por $\binom{m}{n}$.

Algunas propiedades de los números combinatorios son:

- $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$
- $\binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m$
- $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$
- $\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}$

Recuerda que las igualdades permiten ser aplicadas en ambos sentidos.



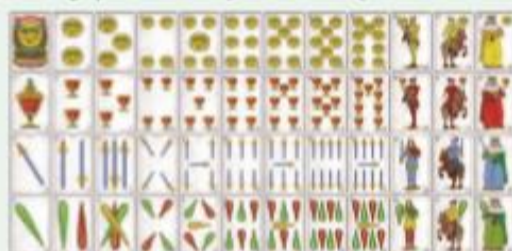
2) **Actividades propuestas:** El texto propone la utilización del software Excel, para luego comenzar con cálculo de Combinación, y luego resolución de problemas.



Aprendiendo del error

Analiza la resolución del problema. Luego, responde.

La baraja española tiene cuatro tipos de palos: espadas, bastos, copas y oros. La que tiene 40 naipes no trae ocho ni nueve. ¿Cuántos grupos de ocho naipes distintos se pueden hacer con este tipo de baraja?



- ¿Cuál es la respuesta al problema según las imágenes?
- ¿Es correcta la resolución del problema? De no serla, corrígela.

Actividades propuestas

1. Calcula las siguientes combinaciones.

- $C_{4,3}$
- $C_{12,8}$
- $C_{10,10}$
- $C_{17,4}$

2. Resuelve los siguientes problemas.

- Si se vende aceite embotellado en envases de 0,25 L, 0,5 L, 1 L y 2 L, ¿de cuántas formas distintas se pueden vender aceite, utilizando dos tipos de envases distintos? ¿Y utilizando tres tipos de envases distintos?
- Una casa cuenta con un sistema de seguridad codificado por un número compuesto por tres dígitos distintos. Si el tablero, desde donde se activa y desactiva el sistema, consta de las teclas numeradas con 1, 3, 4, 6, 8 y 9, ¿cuántos códigos son posibles digitar?
- Si para cocinar pizzas se cuenta con una variedad de 10 ingredientes, ¿cuántos tipos diferentes de pizzas de 5 ingredientes son posibles cocinar?
- En una baraja de naipes se tiene cuatro tipos de pintas y los números entre 1 y 5 inclusive, como se muestra en la imagen.
 - ¿De cuántas formas distintas se pueden extraer dos naipes?
 - ¿De cuántas formas distintas se pueden extraer tres naipes?
 - Si se eligen al azar dos naipes, ¿cuál es la probabilidad de que ambos naipes sean de la misma pinta?
 - Si se eligen al azar tres naipes, ¿cuál es la probabilidad de que todos tengan el mismo número?
- Si de un cajón, que tiene seis pares de calcetines sueltos: uno blanco, tres rojos y dos azules, se extraen aleatoriamente 2 calcetines, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?



267

Métodos Combinatorios

En palabras de Wilhelmi (2004), *“la combinatoria es el arte de contar sin enumerar directamente todos los casos.”*. Para esto (contar) es necesario recurrir a diferentes técnicas, en el inicio del aprendizaje las manos, en específico los dedos, son el principal recurso, pero a medida que se avanza en la vida, y requerimos contar más elementos, esto se vuelve insuficiente. Así es que para responder a la pregunta fundamental de ¿Cuántos hay? se llega, a través de los estudios de la matemática discreta, a la utilización de diferentes técnicas, desarrollando así el Razonamiento Combinatorio requerido para la resolución de la problemática en otros contextos. Morales y Frisancho (2013, pág. 134) detallan la importancia de la capacidad Combinatoria en que,

“posibilita y promueve el pensamiento sistemático, la consideración explícita de las posibilidades, la generalización reflexiva de procedimientos (heurísticos, algorítmicos), la optimización de métodos de registro o listado, la búsqueda de verificaciones exhaustivas, el razonamiento proposicional e hipotético-deductivo, entre otras capacidades fundamentales.”

Desde lo expuesto por Piaget (1985) es que se establece que este razonamiento, que es fundamental en el desarrollo humano, no se logra de manera espontánea, si no que es necesario el estudio de ella.

A nivel escolar en Chile, el estudio de la Combinatoria se centra en la utilización de tres principales técnicas para el conteo: Permutación, simple y con repetición, Variación, simple y con repetición, y Combinación, y en ese mismo orden se analizarán y trabajarán en esta investigación.

Para las siguientes definiciones se toma de referencia, principalmente, a Wilhelmi (2004), por sus acertadas definiciones, las cuales se adecuan a los requerimientos de esta investigación, ser útiles para la enseñanza a nivel escolar. Además se contrastan con Romagnoli (2011) por sus apropiados ejemplos y aplicaciones, y la definición y tratamiento del contenido entregada en Ministerio de Educación de Chile (2018), Texto escolar ministerial chileno para segundo año medio, el principal recurso de la educación pública en Chile.

Para cada técnica de recuento se analizan los ejemplos y representaciones tratadas por cada autor para la explicación del Método Combinatorio tratado.

Principio multiplicativo

Cuando una situación puede ocurrir de n maneras y otra de k maneras, entonces ambas situaciones pueden ocurrir de $n \cdot k$ maneras distintas, simultáneamente. (Wilhelmi, 2004) Esto es llamado principio multiplicativo, o del producto, y es muy relevante para el cálculo de los métodos de recuento que se verá más adelante.

Por otra parte en Romagnoli (2011) se encuentra una definición similar; Si una bolsa contiene n_1 elementos y otra bolsa contiene n_2 elementos distintos, entonces el total de parejas que se pueden formar con un elemento de la primera bolsa y otro de la segunda es $n_1 \cdot n_2$. Lo cual puede extenderse a más de dos operaciones de manera natural. Este hace referencia también, en lenguaje de conjuntos, que la definición sería: Dados dos conjuntos finitos A y B , $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

En Ministerio de Educación de Chile (2018, pág 253), Texto escolar público de segundo año medio en Chile, se encuentra definido de la siguiente manera:

El **principio multiplicativo** establece que si un procedimiento dado se compone de dos etapas, que tienen respectivamente m y n posibilidades, entonces dicho procedimiento tiene $m \cdot n$ casos posibles en total. Si luego se agrega una nueva etapa, que tenga p posibilidades, el procedimiento tendrá $m \cdot n \cdot p$ casos posibles, es decir, siempre se multiplica por la cantidad de posibilidades de cada etapa.

Principio aditivo

Si una situación puede ocurrir de m maneras diferentes y otra de k maneras diferentes, incompatibles las unas con las otras, entonces existen $m + k$ maneras en las cuales puede ocurrir la primera o la segunda, mas no ambas. Wilhelmi (2004). A su vez Romagnoli (2011) menciona que, si una bolsa contiene n_1 elementos distinguibles, y otra bolsa contiene n_2 elementos distinguibles, de modo que además todos los elementos de la primera son distinguibles de los elementos de la segunda bolsa, al mezclar las dos bolsas en 1 sola obtenemos $n_1 + n_2$ elementos distinguibles. A su vez, en lenguaje de conjuntos, dados dos conjuntos finitos y disjuntos A y B , **se tiene que** $|A \cup B| = |A| + |B|$.

En el Texto escolar ministerial para segundo año medio, no se encuentra una definición para el principio aditivo.

Ejemplos y representaciones.

En Wilhelmi (2004) una vez estudiado ambos conceptos, el autor propone problemas en los que se enfatiza analizar el método que se ha seguido para resolverlo, por ejemplo, construcción de objetos, simbolización de las configuraciones o diagrama de árbol. Un tipo de problema propuesto es el siguiente: *“Una clase está formada por 23 varones y 19 mujeres: ¿de cuántas formas puede elegirse un delegado? ¿de cuántas formas puede elegirse un delegado y un subdelegado?”* Para resolverlo el autor propone un razonamiento escrito, utilizando los principios estudiados anteriormente.

A su vez Romagnoli (2011) propone múltiples ejercicios y problemas, poniendo énfasis en la resolución utilizando distintos tipos de registros tales como: diagrama de árbol, además de dibujo de urnas y bolitas. Un ejemplo de esto es el siguiente: *“Problema de la Mesa Redonda II: ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 3 personas en una mesa redonda con $N \geq 6$ sillas? De ese total, ¿cuántas de ellas hacen que no haya 2 de ellos contiguos?”* Para resolverlo, el autor primero realiza un razonamiento escrito, luego un diagrama de árbol para resumir, y para finalizar utilizando los principios con fórmulas.

En el texto del estudiante para segundo año medio, se encuentra el siguiente ejemplo guiado, para la enseñanza del principio multiplicativo:

Actividades de modelación

Para recordar una clave de cinco letras, Diego decide usar solo las vocales sin repetir ninguna de ellas. ¿Cuántas claves distintas podría crear?

Para abordar este tipo de problemas, podemos utilizar un esquema de casilleros. En este caso, tenemos 5 casilleros que corresponden al orden que pueden dar a las vocales. Así:

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

- Para la primera posición existen 5 posibilidades, porque puede ser escogida cualquiera de las cinco vocales.
- En cada caso hay 4 posibilidades para ocupar la segunda posición, ya que las vocales no deben repetirse. Entonces, para los primeros dos casilleros hay $5 \cdot 4 = 20$ posibilidades.
- Para la tercera posición, quedan solo tres vocales. Es decir, en total son $20 \cdot 3 = 60$ posibilidades.
- En el cuarto lugar, hay dos vocales disponibles. Entonces, son $60 \cdot 2 = 120$ posibilidades.
- Para el último lugar, solo queda una opción en cada caso. Es decir, hay $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \cdot 1 = 120$ casos en total.

Extraído de Ministerio de Educación de Chile (2018, pág. 253)

Permutación

Se puede definir Permutar como “*Variar la disposición u orden en que estaban dos o más cosas.*” Real Academia Española (2020), siendo muy importante que dichas cosas se puedan distinguir entre sí, para asegurar la diferencia entre las configuraciones que se realicen. A Continuación se realiza una revisión bibliográfica de las técnicas de conteo a partir de los tres textos ya mencionados.

Permutación simple

Para contar el número de ordenaciones posibles que se pueden obtener con n ($n \geq 2$) objetos distintos, debemos, por el principio multiplicativo, calcular el producto de los n primeros términos. Este producto se denota por $n!$, que se lee: “factorial de n ”. Entonces la Permutación de n elementos se denota como P_n , que se define como una aplicación biyectiva, tal que:

$$P_n = n! = \begin{cases} n(n-1)!, & \text{si } n \geq 0 \\ 1, & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

De tal manera que, en cada grupo entren los n elementos, y que un grupo se diferencie de los demás en el orden de colocación de los estos. Lo que quiere decir que los elementos no se repiten entre sí, por lo que es llamada Permutación simple u ordinaria. Todo lo anterior mencionado en Wilhelmi (2004)

Por otra parte, el autor Romagnoli (2011), menciona que si se consideran n bolitas distinguibles que se colocan en N casillas con, a lo sumo, un elemento por casilla, y con $N \geq n$, se tiene que, por el principio multiplicativo, el total de configuraciones distintas estará dado por:

$$N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!},$$

Que cuando $N = n$ se conoce como el total de n -permutaciones de N elementos.

Así mismo, en Ministerio de Educación de Chile (2018) se encuentran dos definiciones, tipo resumen luego del trabajo de modelación con ejercicios. La primera, en el tema uno “¿Cuándo se aplica el principio multiplicativo?”:

Si $m, n \in \mathbb{N}_0$, entonces:

- Se llama **permutación** de n elementos (se escribe P_n) a la cantidad de formas en que se pueden ordenar en una fila y se puede calcular como

$$P_n = n!$$

Extraído de Ministerio de Educación de Chile (2018, pág. 253)

La segunda, en el tema dos: “¿Qué son las permutaciones y las combinaciones?”, en la misma lógica, a modo de resumen luego de la lección:

Una **permutación** de n elementos es cada uno de los posibles órdenes de ellos, sin repetición. Se anota la cantidad total de los órdenes posibles como P_n . (P_n se lee “p sub ene”)

El total de permutaciones de n elementos sin repetición se calcula como

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Este producto, de todos los números naturales de 1 hasta n , se llama **n factorial** (y se escribe $n!$).

Ejemplos y representaciones.

En Wilhelmi (2004) no se encuentran ejemplos para la explicación del contenido, solo ejercicios para la utilización de lo estudiado, los cuales no están resueltos. Por ejemplo: “¿Cuántas letras de cinco signos se pueden formar en el alfabeto Morse¹ con tres rayas y dos puntos?”

Por otro lado, en el texto Probabilidades Doctas, Romagnoli (2011) tampoco se proponen ejemplos para explicar el concepto de Permutación simple, sino más bien para ejercitar, aunque igualmente están resueltos. Un ejemplo de esto el ejercicio: “¿De cuántas maneras distintas se puede acomodar una reunión de 7 personas?, a) En una fila de 7 sillas.” Donde a continuación se entrega la respuesta: *Las siete personas pueden distribuirse en una fila de 7! Maneras distintas.* Así es como se observa que la representación utilizada corresponde al lenguaje natural y fórmulas.

Por el contrario, el Texto para el estudiante de 2º medio, se presenta un ejercicio que se desarrolla para explicar las diferentes técnicas de conteo. El caso de la Permutación simple es el siguiente:

Ayuda

Un diagrama de árbol permite representar una secuencia de realizaciones de un experimento. En cada etapa, sus ramas indican la cantidad de casos posibles que existen para cada una.

Actividades de modelación

1. La profesora Valentina debe seleccionar entre 5 de sus alumnos (Andrés, Bruno, Carla, Diego y Eugenia) a 3 de ellos, los cuales representarán al liceo en una competencia. ¿Cuántas posibilidades tiene de hacerlo?

Una forma de resolverlo es mediante un diagrama de árbol, pero también es posible imaginar que lo construye para contar las posibilidades. Observa.

- PASO 1** Si Valentina tuviera que escoger en orden a sus alumnos, tendría 5 posibilidades para escoger al primero. Luego, para escoger al segundo, tendría solo 4 posibilidades, 3 para el tercero, 2 para el cuarto y 1 para el quinto. Por lo tanto, en el diagrama de árbol se podrían ver:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ posibilidades.}$$

Este producto, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ corresponde a 5 **factorial**, que se escribe $5!$.

Glosario

Factorial: de cualquier número

Extraído de Ministerio de Educación de Chile (2018, pág. 258)

Permutación con repetición

Wilhelmi (2004) menciona que existen casos en que, en los n elementos que componen un conjunto, se encuentran elementos “repetidos”, por lo cual, si los ordenáramos utilizando la metodología anterior, no todas las configuraciones serían esencialmente distintas entre sí. Por esto debemos emplear una modificación al cálculo anterior, intentando no contar las ordenaciones que se repitan.

Formalmente el autor determina que, se llaman Permutaciones con repetición de n elementos, distribuidos en k grupos de $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k$ elementos indistinguibles, respectivamente, de tal forma que $n_1 + n_2 + \dots + n_{k-1} + n_k = n$, a las distintas configuraciones que se pueden formar con los n elementos, de tal forma que cada una de ellas se diferencie de las demás en el orden de colocación de sus elementos, excluyendo las reordenaciones de elementos indistinguibles. Si se denota por $PR_n^{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k}$ a este número se tiene que:

$$PR_n^{n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_{k-1}! \cdot n_k!}$$

En cambio, Romagnoli (2011) no menciona explícitamente el término Permutación con repetición, pero se encuentra en la aplicación número siete de Combinación y Permutación, explicando que si se tienen N bolitas, m_1 de tipo 1, m_2 de tipo 2, $\dots$, m_n del tipo n con $\sum_{i=1}^n m_i = N$. Se lanzan N bolitas sobre N urnas con a lo más una bolita por urnas. Si solo distingue el tipo de las bolitas, el total de configuraciones distinguibles es:

$$\frac{N!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_n!}$$

Al contrario de los textos anteriores, en Ministerio de Educación de Chile (2018) no existe una definición ni formal, ni informal, para la Permutación con repetición.

Existen otros diferentes casos, que no serán mencionados por no ser estudiados en la educaciones secundaria chilena, y por lo tanto, para efectos de esta investigación, no serán utilizados.

Ejemplos y representaciones.

Solamente se encuentra en Wilhelmi (2004) un ejemplo para explicar y varios para ejercitar la Permutación con repetición. Este autor, a través del ejemplo de un juego con tablero denominado “*El solitario sol y la luna*” (Wilhelmi, 2004, pág. 46), se razona para llegar a la deducción de la fórmula de la Permutación con repetición.

A diferencia de este, en los otros dos textos que se han trabajado, no existen ejemplos y ejercicios del tema, sin embargo en el texto del Ministerio de Educación de Chile (2018) se encuentra un ejercicio en la sección de ejercitar, a pesar de no haber explicado el contenido, tal ejercicio es: “¿Cuántos números de 7 cifras se pueden formar utilizando tres 2, y cuatro 3?”

Variación

Wilhelmi (2004) menciona que en matemática, una Variación de una familia de elementos es una modificación de alguno de sus elementos o del orden en que se presentan.

Luego el autor comienza a definir Variación puntualizando que, para contar la cantidad de ordenaciones diferentes que se pueden realizar con n elementos distintos, tomados de k en k

grupos, con $n \geq 2$, y $k < n$ se puede partir del mismo razonamiento anterior (el desarrollado en Permutación), notando que la diferencia radica en que se ordenará un subconjunto del total, por lo cual, la Permutación será un caso particular en que $k = n$.

Finalmente formaliza diciendo que, se llaman Variaciones ordinarias o sin repetición de n elementos, tomados de k en k , y se denota por $V_{k,n}$, a los distintos grupos que se pueden formar con los n elementos, de tal forma que en cada grupo entren k elementos distintos ($k < n$), y que un grupo se diferencie de los demás, bien en alguno de sus elementos, o bien en su orden de colocación. Se tiene que:

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

En cambio, en Romagnoli (2011) no se encuentra la palabra “Variación” para referirse a algún Método Combinatorio, pero comprendiendo la definición, se observa la presencia del contenido en lo descrito en la sección Permutación, “Si se consideran n bolitas distinguibles que se colocan en N casillas con, a lo sumo, un elemento por casilla, y con $N \geq n$, se tiene que, por el principio multiplicativo, el total de configuraciones distintas estará dado por:

$$N \cdot (N-1) \cdot \dots \cdot (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Ahora bien, para el caso de la Variación, el valor de n debe ser estrictamente menor que N .

Por otra parte, el Texto escolar para segundo año medio presenta una definición formal para Variación, la cual viene resumida en una cuadro, al igual que anteriormente se ha mencionado con otros Métodos Combinatorios. Esta es la siguiente:

- Se llama **variación** de n elementos escogidos entre m (se escribe V_n^m) a la cantidad de ordenamientos posibles de n elementos, escogidos entre m . La cantidad de ellos se puede calcular como:

$$V_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Extraída de Ministerio de Educación de Chile (2018, pág. 259)

Ejemplos y representaciones.

En el texto de Wilhelmi (2004, pp. 50-51), el autor propone un ejemplo para comprender la Variación, este es dirigido para ser utilizado más adelante en la Variación con repetición. Dicho ejercicio propone esencialmente que, si se quisiera escoger a tres estudiantes, de entre un total de 40, para la comisión de directiva del curso, donde existen tres cargos disponibles: secretario, tesorero, presidente. ¿De cuantas formas se pueden escoger a los estudiantes, si cada uno no puede estar en más de un cargo?

Para resolverlo, en el texto se estudia el siguiente razonamiento: Tenemos un total de 40 estudiantes que se deben escoger de 3 en 3 para calcular cuántos diferentes grupos de estudiantes pueden escogerse. Como un estudiante no puede tener más que un cargo, el secretario podrá ser escogido entre los 40 estudiantes de la clase; una vez que este ha sido elegido, el cargo de tesorero podrá ser tomado por uno de los 39 alumnos restantes; y por último, el cargo de presidente puede ser tomado por uno de los 38 alumnos restantes. Es decir, por el principio multiplicativo, existen $40 \cdot 39 \cdot 38$ formas de constituir la directiva del curso. Utilizando la fórmula anteriormente expuesta concluye determinando que se tiene:

$$V_{3,40} = \frac{40!}{(40-3)!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37!}{37!} = 40 \cdot 39 \cdot 38$$

Por otra parte, en el texto escolar público para segundo año medio, se utiliza el mismo ejemplo guiado que se presentó en la Permutación, realizando unos ajustes al problema, nombrándolo “PASO 2”, para que esta vez el estudiante deba emplear otro método para encontrar la solución. El problema, con la parte anterior incluida, continúa así:



Un diagrama de árbol permite representar una secuencia de realizaciones de un experimento. En cada etapa, sus ramas indican la cantidad de casos posibles que existen para cada una.

1. La profesora Valentina debe seleccionar entre 5 de sus alumnos (Andrés, Bruno, Carla, Diego y Eugenia) a 3 de ellos, los cuales representarán al liceo en una competencia. ¿Cuántas posibilidades tiene de hacerlo?

Una forma de resolverlo es mediante un diagrama de árbol, pero también es posible imaginar que lo construye para contar las posibilidades. Observa.

- PASO 1** Si Valentina tuviera que escoger en orden a sus alumnos, tendría 5 posibilidades para escoger al primero. Luego, para escoger al segundo, tendría solo 4 posibilidades, 3 para el tercero, 2 para el cuarto y 1 para el quinto.

Por lo tanto, en el diagrama de árbol se podrían ver:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ posibilidades.}$$

Este producto, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ corresponde a 5 **factorial**, que se escribe $5!$.

- PASO 2** Ya que Valentina debe escoger solo a 3 de sus alumnos, el diagrama de árbol habría llegado hasta la tercera etapa, es decir, habría tenido solo $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ posibilidades.

Observa que, al “suprimir” las últimas dos etapas en el diagrama de árbol, se ha debido dividir por $1 \cdot 2 = 2$ el número de casos de esas etapas, es decir:

$$60 = \frac{120}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

Al número $\frac{5!}{(5-3)!}$ le llamaremos **variación** de 3 objetos escogidos entre 5, y corresponde a la cantidad de formas en que se puede escoger, en orden, 3 objetos entre 5 disponibles. Se anota en este caso como V_3^5 .

Glosario

Factorial: de cualquier número natural n al producto de todos los números naturales menores o iguales que él.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Variación: de m elementos tomados de n en n (con $m \geq n$) a los distintos grupos formados por n elementos de forma que no entran todos los elementos ni se repiten, pero sí importa el orden de los elementos en el grupo.

Extraído de Ministerio de educación (2018, pág. 258)

Por el contrario a los dos textos anteriores, en el caso de Romagnoli (2011) no existen ejemplos de Variación, ni ejercicios desarrollados que busquen explicar dicho contenido.

Variación con repetición

De los tres textos que se han estudiado, solo en Wilhelmi (2004) se encuentra una definición y ejemplos para la Variación con repetición. El autor define que, se llaman variaciones con repetición de n elementos, tomados de k en k , con $n \geq k$, denotando como

$VR_{n,k}$, a los distintos grupos que se pueden formar con los n elementos, de tal manera que en cada grupo entren k elementos iguales o distintos, y que un grupo se diferencie de los demás, bien en algún elemento, o bien en su orden de colocación. Se tiene:

$$VR_{n,k} = n^k$$

Para continuar, el autor utiliza el ejemplo propuesto en la definición de Variación simple, realizando algunos arreglos para llegar desde un razonamiento al cálculo de la Variación con repetición del caso. El razonamiento es esencialmente el siguiente:

Si, continuando el ejemplo anterior, cada persona pudiese ocupar más de un cargo, es decir, un estudiante puede, por ejemplo, ser presidente y tesorero a la vez. Entonces ¿De cuántas formas puede constituirse la directiva de 3 estudiantes, si cada persona puede ocupar más que un cargo? Como cada estudiante puede estar incluso en los tres cargos, en el cargo de tesorero pueden escogerse entre los 40 estudiantes, una vez escogido, el secretario podrá ser electo entre los 40 estudiantes, y así mismo el de presidente, es decir, siguiendo el principio multiplicativo, puede escogerse de $40 \cdot 40 \cdot 40$ formas distintas la directiva del curso si cada estudiante puede ocupar más de un cargo.

Combinación

El concepto de Combinación tiene un significado muy concreto en matemática: brevemente, *corresponde al número de conjuntos de un determinado número de elementos que se pueden formar con un universo de objetos, donde no importa el orden en que estos elementos se seleccionen, sino más bien, cuales elementos son escogidos.* (Wilhelmi, 2004)

Así el autor formaliza, mencionando que, se llaman combinaciones ordinarias o sin repetición de n elementos, tomados de k en k , denotadas como $C_{n,k}$, a los diferentes conjuntos de k elementos distintos, esto es, un conjunto se diferencie de los demás en, al menos, un elemento (no importa el orden de colocación o selección). Se tiene:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Por otra parte, en el texto “Probabilidades Doctas Con Discos, Árboles, Bolitas y Urnas” Romagnoli (2011), se encuentra una definición formal que nace a partir de lo descrito para Permutación y Variación: Cuando las bolitas ya no se distinguen entre sí (digamos que son todas negras) El total de configuraciones distintas disminuye y ahora es:

$$\frac{N!}{(N-n)! \cdot n!}$$

Con lo cual, un poco más adelante en el texto, el autor afirma que esta fórmula será el total de subconjuntos de n elementos de un total de N elementos distintos.

Por otra parte, en Ministerio de Educación de Chile (2018) la definición se encuentra, tal y como se ha señalado en Métodos anteriores, en el cuadro resumen de la siguiente forma:

- Se llama **combinación** de n elementos escogidos de entre m a la cantidad de posibilidades que hay de escoger n elementos de un total de m , sin que importe el orden en que son escogidos. La cantidad de combinaciones se escribe como C_n^m , y se puede calcular como:

$$C_n^m = \frac{V_n^m}{n!} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

- La expresión $\frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$ suele escribirse como $\binom{m}{n}$ –que se lee “ m sobre n ”– y recibe el nombre de **número combinatorio**.

- Algunas propiedades de los números combinatorios son:

- Cualquier número sobre 0 es igual a 1.

$$\binom{n}{0} = 1$$

- Todo número sobre sí mismo es igual a 1.

$$\binom{n}{n} = 1$$

- Un número sobre 1 es siempre igual al número.

$$\binom{n}{1} = n$$

Extraído de Ministerio de Educación (2018, pág. 259)

Ejemplos y representaciones.

Para explicar la Combinación, el autor de Combinatoria y Probabilidad, Wilhelmi (2004) realiza un nuevo uso del ejemplo que trabaja desde la Variación simple. Para eso desarrolla que, si en el ejemplo anterior de la elecciones de estudiantes para la directiva, se veía que era tan importante qué estudiantes eran escogidos, como en qué puesto eran seleccionados, pues no era lo mismo ser seleccionado como presidente, o tesorero, o secretario. Pero, si se formará entonces, una comisión de directiva donde no existieran cargos, pero solo 3 personas lo conformarán, sería relevante quienes son escogidos, más no, en que puesto, u orden, pues no

existe diferencia entre que un estudiante haya sido seleccionado en primero, segundo o tercer lugar, si no que el mismo hecho de ser escogido.

Así es como el autor menciona que, si el orden de elección es importante (y un alumno no puede tener sino un cargo), existen $40 \cdot 39 \cdot 38$ formas de constituir la directiva, pero si el orden no importa, hay que dividir esta cantidad por 6, puesto que dados 3 estudiantes, podemos organizarlos de 6 formas distintas (P_3). Así, existen $\frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{6}$ formas de organizar la directiva si los tres integrantes van a desempeñar labores similares. En general, el razonamiento es válido si es preciso escoger, sin importar el orden, k estudiantes de entre n ($n \geq k$), el número de directivas que se pueden formar son:

$$\frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Finalmente el autor generaliza lo estudiado con un ejemplo con letras que representa a través de una tabla. Así pues menciona que de esta forma, las Combinaciones se determinan en función de las Variaciones y de las Permutaciones de éstas en clases. Por ejemplo, si se tiene un conjunto formado por los elementos a, b, c y d, y se quieren formar todas las combinaciones sin repetición de 3 en 3 se observa que:

Combinación	Variación
abc	abc, acb, bac, bca, cab, cba
abd	abd, adb, bad, bda, dab, dba
acd	acd, adc, cad, cda, dac, dca
bcd	bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb

Haciendo explícita, a través de esta tabla, la diferencia fundamental entre Variación y Combinación.

A su vez, en el texto de referencia que se ha estudiado “Probabilidades Doctas Con Discos Y Árboles, Bolitas y Urnas” se realiza un análisis de la definición de Combinación como una aplicación, este análisis se hace a través de la representación del caso en que $N = 4$ y $n = 3$. Aquí el autor representa cada urna con cuatro espacios en la que tres bolitas pueden ordenarse, mostrando como solo hay cuatro configuraciones distintas. De esta forma, el autor

explicita que, en efecto los N elementos distintos son N casillas distintas y un subconjunto de n elementos se forma al llenar n urnas con n bolitas no distinguibles.

Por último, como se ha mencionado, el Texto escolar para segundo año medio que entrega el MINEDUC a los colegios y liceos públicos, trabaja el contenido de Métodos Combinatorios a partir de un ejemplo, que desarrolla con cambios para que los y las estudiantes deban razonar y así utilizar otro Método Combinatorio basado en dichos cambios, y las nuevas problemáticas que aparecen. Finalmente, para el caso de la Combinación, se denomina paso tres, y se trabaja de la siguiente manera:

Ayuda

Un diagrama de árbol permite representar una secuencia de realizaciones de un experimento. En cada etapa, sus ramas indican la cantidad de casos posibles que existen para cada una.

Glosario

Factorial: de cualquier número natural n al producto de todos los números naturales menores o iguales que él.

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Variación: de m elementos tomados de n en n (con $m \geq n$) a los distintos grupos formados por n elementos de forma que no entran todos los elementos ni se repiten, pero sí importa el orden de los elementos en el grupo.

Actividades de modelación

1. La profesora Valentina debe seleccionar entre 5 de sus alumnos (Andrés, Bruno, Carla, Diego y Eugenia) a 3 de ellos, los cuales representarán al liceo en una competencia. ¿Cuántas posibilidades tiene de hacerlo?

Una forma de resolverlo es mediante un diagrama de árbol, pero también es posible imaginar que lo construye para contar las posibilidades. Observa.

- PASO 1** Si Valentina tuviera que escoger en orden a sus alumnos, tendría 5 posibilidades para escoger al primero. Luego, para escoger al segundo, tendría solo 4 posibilidades, 3 para el tercero, 2 para el cuarto y 1 para el quinto.

Por lo tanto, en el diagrama de árbol se podrían ver:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ posibilidades.}$$

Este producto, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ corresponde a 5 **factorial**, que se escribe $5!$.

- PASO 2** Ya que Valentina debe escoger solo a 3 de sus alumnos, el diagrama de árbol habría llegado hasta la tercera etapa, es decir, habría tenido solo $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ posibilidades.

Observa que, al "suprimir" las últimas dos etapas en el diagrama de árbol, se ha debido dividir por $1 \cdot 2 = 2$ el número de casos de esas etapas, es decir:

$$60 = \frac{120}{2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5 - 3)!}$$

Al número $\frac{5!}{(5 - 3)!}$ le llamaremos **variación** de 3 objetos escogidos entre 5, y corresponde a la cantidad de formas en que se puede escoger, en orden, 3 objetos entre 5 disponibles. Se anota en este caso como V_3^5 .

- PASO 3** Al considerar estos 60 casos, se está pensando que escoger, por ejemplo, a Andrés, Bruno y Carla es distinto que escoger a Carla, Andrés y Bruno.

Entonces, ya que las 3 personas pueden ordenarse de $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneras, se debe dividir los 60 casos por estas 6 maneras, para obtener las formas de escogerlos sin importar el orden:

$$\frac{60}{6} = 10 = \frac{\frac{5!}{2!}}{3!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5!}{(5 - 3)! \cdot 3!}$$

Al número $\frac{5!}{(5 - 3)! \cdot 3!}$ le llamaremos **combinación** de

5 sobre 3, y corresponde a la cantidad de formas en que podemos escoger, sin importar el orden, 3 objetos entre 5 disponibles.

Con lo anterior, se ha hecho un estudio de dos diferentes autores que se consideran adecuados en sus definiciones para el objetivo de esta investigación, viendo sus metodologías

empleadas en la definición de los métodos de recuento. A su vez, se ha contrastado con el material que se entrega por parte del Ministerio de Educación, el Texto Escolar para segundo año medio chileno.

Marco metodológico

La investigación tiene dos ejes fundamentales. El primero, recopilar información sobre las principales problemáticas y dificultades que enfrentan los docentes y futuros docentes en cuanto al proceso de enseñanza del contenido de Métodos Combinatorios en segundo año medio en Chile, y sobre sus habilidades y aprendizajes con este objeto matemático. El segundo eje es la confección y recopilación de actividades para la enseñanza de Métodos Combinatorios en segundo año medio en Chile, a través del recurso didáctico del Juego. La metodología trabajada en ambos ejes se detalla a continuación.

Recopilación de información

Diseño

Esta investigación es del tipo descriptivo, ya que se busca describir las dificultades que enfrentan los docentes y futuros docentes en el proceso de enseñanza de Métodos Combinatorios, y a su vez describir la percepción sobre ello. Las investigaciones de tipo descriptivas buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. (Hernández Sampieri, Fernández Collado, y Baptista Lucio, 2010). Además, esta investigación tiene un enfoque cualitativo pues se utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación. (Hernández Sampieri, Fernández Collado, y Baptista Lucio, 2010). Estos datos se refieren a la percepción de docentes y futuros docentes sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de Métodos Combinatorios en segundo año medio en la educación chilena, y el propio aprendizaje y habilidades que estos tienen para la enseñanza de Métodos Combinatorios. Así es que se analizan datos de tipo cualitativo. La temporalidad de esta investigación es de tipo transeccional o transversal puesto que recoge la información en un momento específico. (Hernández Sampieri, Fernández Collado, & Baptista Lucio, 2010)

Población de estudio

En relación con los objetivos de esta investigación, se definen dos poblaciones de estudio:

Población 1: Estudiantes de pedagogía en matemática de educación media en Chile que ya han recibido la lección de Métodos Combinatorios en su formación inicial docente.

Población 2: Docentes de matemática de educación media en Chile, que hacen o han hecho clase en segundo año medio.

Muestra

Para la recopilación de información se realizó un muestreo por conveniencia en cada población en estudio. El detalle es:

De la población 1, se obtuvo una muestra de 45 estudiantes de pedagogía en matemática que ya han recibido la lección de Métodos Combinatorios.

De la población 2, se obtuvo una muestra de 15 profesores y profesoras de matemática de educación media, que hacen o han hecho clase en segundo año medio.

Instrumento

Se utilizaron dos instrumentos, uno para cada población de estudio. Para la población 1, estudiantes de pedagogía en matemática, se aplicó la encuesta realizada en Peñailillo Olmos (2020), la cual consta de cuatro secciones o áreas para la recopilación de información para el análisis de las habilidades y percepciones que tienen los futuros docentes con respecto a la enseñanza de los Métodos Combinatorios. Las secciones corresponden a: área de formación escolar, área de formación inicial docente, área de futura labor docente, y selección de ejercicios para área de habilidades de Métodos Combinatorios. Este instrumento fue validado a través del juicio de expertos, primero por la profesora tutora del proyecto asociado, Giovanna Ticchione, Profesora de Matemática por la Universidad Metropolitana de las Ciencias de la Educación, y Máster en Estadística por la Pontificia Universidad Católica de Chile. Además de la aplicación de una prueba piloto de la encuesta a un representante de la población de estudio.

Para la población 2, profesores y profesoras de matemática de educación media en Chile, se adecuó la encuesta realizada en Peñailillo Olmos (2020), añadiendo o reformulando algunas preguntas de la sección de: área de formación escolar, área de formación inicial docente, y área de futura labor docente, para que así se pudiese recopilar la información necesaria, pero acorde al contexto de los y las docentes de educación media en Chile.

Finalmente este instrumento posee las áreas de: formación inicial docente, docencia, además del área habilidades de Métodos Combinatorios, la cual es igual en ambos instrumentos, tanto para la población 1 como la 2. La encuesta completa fue validada a través del juicio de

expertos, como se menciona en Martín Arribas (2004), estos deben juzgar la capacidad del instrumento para evaluar todas las dimensiones que deseamos medir. Así es como, primero fue evaluado por Giovanna Ticchione, Profesora de Matemática por la Universidad Metropolitana de las Ciencias de la Educación, y Máster en estadística por la Pontificia Universidad Católica de Chile, y por Eduardo Piña Flores, Profesor de Matemática por la Universidad Metropolitana de las Ciencias de la Educación. Además de la aplicación de una prueba piloto a un representante de la población de estudio, que como se menciona en Martín Arribas (2004), permite identificar, entre otras cosas, si el ordenamiento interno es lógico, y si la duración está dentro de lo aceptable por los encuestados.

Es importante mencionar, para el posterior análisis de ambas encuestas, que la sección de ejercicios corresponde a la versión corta del cuestionario creado en Navarro-Pelayo, Batanero, y Godino (1996). Aquí los autores proponen un cuestionario para evaluar el razonamiento combinatorio, este consta de 13 ítems, en los cuales se aborda Permutaciones y Variaciones, con y sin repetición, y Combinaciones ordinarias, y se propone una versión reducida del cuestionario usando solo los ítems 3, 5, 7, 9, 10 y 11, pues esta combinación incluye todas las operaciones combinatorias y modelos, y un rango de dificultad moderada en los ítems. (Navarro-Pelayo, Batanero, & Godino, 1996) Este cuestionario fue validado por los autores, teniendo en cuenta las sugerencias de algunos profesores y alumnos sobre la comprensión de los enunciados y la dificultad de los problemas. Además, según mencionan, se utilizaron dos muestras piloto de 106 y 37 alumnos, respectivamente, para estimar el tiempo necesario para completar el test y revisar los valores de los parámetros en algunos problemas, y así se calcularon los índices de generalizabilidad, que tomaron los valores $G=0.73$ para la generalizabilidad a la población de ítems, es decir, la posibilidad de generalizar los resultados a otra muestra diferente de problemas con valores similares de las variables de tarea, y $G=0.99$ para la generalizabilidad a la población de alumnos.

Estos ejercicios se modificaron adecuándolos, en cuanto al lenguaje, a contextos chilenos en Peñailillo Olmos (2020), y así fueron utilizados en esta investigación, tanto en el instrumento para futuros docentes, como para actuales docentes, y fueron sometidos a validación en la encuesta completa de la población 1, encontrada en Peñailillo Olmos (2020). Los instrumentos se encuentran en el Anexo al Marco Metodológico.

Recolección de datos

Los cuestionarios utilizados, dado el contexto santiario por Covid-19 mientras se realizaba la investigación, se aplicaron de manera virtual, siendo adecuados a un formato digital utilizando la plataforma Google Forms. Se buscó personas pertenecientes a cada población mediante un muestreo por conveniencia

Análisis de datos

Con el fin de analizar los datos obtenidos a través de las dos encuestas aplicadas, se realizó un trabajo de operacionalización de las variables definidas a estudiar, lo que bajo el concepto de Reguant y Martínez-Olmo (2014) permite por una parte, la elaboración de los instrumentos de medida, convirtiendo los indicadores en ítems o elementos de observación, e igualmente facilitan el proceso de construcción de índices al mostrar de una forma esquemática todo el contenido de la investigación, para así facilitar la visión global que permite recomponer la información recabada para integrarla en una “explicación” de cada una de las dimensiones y conceptos. Posterior a la operacionalización se procedió a la tabulación de los datos, y un análisis descriptivo y gráfico de estos según el área, a través de la utilización del software Microsoft 365 Excel. Lo anterior se realizó de manera particular para cada área, por lo que se definieron parámetros para cada pregunta que lo requiriesen. El detalle de cada pregunta y sus parámetros se encuentra en el Anexo.

Construcción de actividades

Para la construcción de las actividades se tomó en consideración la información obtenida en ambos cuestionarios aplicados, centrándose en la información obtenidas en el análisis de las áreas: futura labor docente, docencia, y habilidades de Métodos de Recuento, según corresponda.

Desde el área de futura labor docente y docencia, el principal insumo para la confección de actividades corresponde a la información recopilada por la pregunta “¿Cuál(es) de las siguientes habilidades se podría(n) desarrollar con la enseñanza de métodos combinatorios?: Resolver Problemas, Argumentar y Comunicar, Modelar, y Representar”. De la que del total de respuestas entre estudiantes de pedagogía en matemática, y docentes de matemática, las habilidades de Modelar y Representar son las menos escogidas en ambos grupos, en cambio, las habilidades de Resolver Problemas, y Argumentar y Comunicar son las que más se considera se

podrían desarrollar con la enseñanza de Métodos Combinatorios. Esta información se toma para diseñar actividades que desarrollen principalmente las habilidades de Modelar y Representar.

Por otra parte, en el área de habilidades de Métodos Combinatorios, se utiliza la información obtenida a cerca de las representaciones empleadas en la resolución de los ejercicios, y así potenciar las menos frecuentes en el diseño de actividades. Aquí se observa que el uso de “Fórmula” es utilizado muy por sobre las otras representaciones, le siguen de muy lejos la representación de “Casillas” y “Dibujos”, y por último el uso de “Lenguaje natural” y “Diagrama de árbol”, siendo este último casi nulo.

A partir de lo anterior es que se consultaron trabajos ya realizados que se adapten a las necesidades mencionadas, y se toman como referencia, para luego adaptarse al contexto de enseñanza de Métodos Combinatorios en segundo año medio en Chile.

Se establecen dos tipos de actividades, las primeras denominadas de “Motivación” que tienen por objetivo proponer a los y las estudiantes una situación problemática retadora. Esta puede ser una pregunta de ingenio, desafío, o un juego propiamente tal, en la que los y las estudiantes se involucren, en la búsqueda de una respuesta corta, semi instantánea, de manera intuitiva como un primer acercamiento a una estrategia. En estas actividades el o la docente se desarrolla como moderador, y se busca que los y las estudiantes se enfrenten, en el inicio de la clase, a una situación diseñada para no ser resuelta con matemática formal, para así motivar el proceso de enseñanza aprendizaje que posteriormente vendrá. Para estas actividades se han tomado de diferentes autores como D'Andrea (2012), Piedra Moreno y Camacho Ruiz (2013), y Daza Herrera (2007), y como ya se mencionó se adecúan al contexto de enseñanza de Métodos Combinatorios para segundo año medio, según las bases curriculares chilenas.

Se confeccionan cuatro actividades de Motivación, de las cuales dos corresponden a los denominados “Juegos de ingenio”, y las otras dos a “Situaciones problemáticas o Acertijos”.

En segundo lugar se confeccionan las actividades para “Desarrollo de clase”, estas tienen por objetivo brindar a los y las estudiantes la experiencia de enfrentarse a una situación problemática que los impulse a la búsqueda de estrategias, y, con la guía adecuada del o la docente, generar aprendizajes significativos mediante el ensayo y error. Estas se dividen según cada Método Combinatorio, Permutación, Variación y Combinación.

Para la creación de estas actividades se han tomado de referencia elementos de autores como González Poveda y Suescun Batista (2005), y páginas web como Refuerzo divertido (Del Castillo Pintado (2018), y Reseteo matemático (2017), modificadas para el propósito de enseñar Métodos Combinatorios en 2do año medio en Chile.

Por último se añade a las actividades de “Desarrollo de clase”, un excelente recurso de Tecnología de la Información y la Comunicación (TIC), que se encuentra en García Moreno, Laboratorio Básico De Azar, Probabilidad Y Combinatoria (LABAPC)(2010), una página web denominada “Laboratorio Básico De Azar, Probabilidad Y Combinatoria”¹, desde ahora LABAPC, la cual es un recurso multimedia, en forma de página web, formado por más de 50 aplicaciones o instrumentos interactivos, íntimamente interrelacionadas entre sí. Se diseñan a partir de este recurso actividades para la enseñanza de Métodos Combinatorios en segundo año medio en Chile.

Finalmente se confeccionan siete actividades del tipo “Desarrollo de clase” que se organizan de la siguiente manera:

- Actividades de Permutación:
 - A través del uso de material concreto.
 - A través del uso del Juego: “MasterMind”
- Actividades de Variación:
 - A través del uso de material concreto.
 - A través del uso del Juego: “MasterMind”
- Combinación:
 - A través del uso de material concreto.
- Uso de recurso TIC LABAPC:
 - A través de actividad propuesta en el texto escolar para 2do año medio en Chile.
 - A través de actividad del recurso web.

¹ <http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/index.html>

La descripción detallada del formato de las actividades se encuentra en el Anexo.

Resultados y Análisis

Los resultados obtenidos, se presentan en dos partes; la primera se asocia a la información obtenida a través del análisis de los datos obtenidos tras la aplicación de las dos encuestas realizadas, una para docentes de educación matemática en ejercicio, y otro para futuros y futuras docentes de matemática. La segunda parte, se asocia a las actividades confeccionadas a partir de la investigación realizada.

Resultados del análisis de los datos obtenidos en las encuestas

Para comenzar se presentan los resultados más relevantes obtenidos al analizar los datos obtenidos en las encuestas aplicadas a estudiantes de pedagogía en matemática, y a docentes de matemática de educación media en ejercicio, para lo cual se realiza un análisis particular de una pregunta relevante exclusiva de cada encuesta, para luego realizar un análisis de las preguntas comunes en ambos instrumentos. El detalle de los resultados se encuentra en el Anexo.

Estudiantes de pedagogía en matemática

La siguiente pregunta, se encuentra en la encuesta para futuros y futuras docentes de matemática, en el área de Formación escolar: “Dentro de tu enseñanza escolar, ¿Estuvieron presente los métodos de recuento?, ¿De qué forma?”. A tal pregunta, un 67% de los encuestados y encuestadas responde que no estudió Métodos Combinatorios en su enseñanza escolar formal.

Por otra parte, de quienes manifiestan haber estudiado Métodos Combinatorios en su enseñanza escolar formal, es decir un 33%, el 18% manifiesta que la enseñanza fue de manera incompleta o poco significativa, frente al 15% restante que declara que sí recibió la enseñanza de Combinatoria en la enseñanza media, y que esta fue de manera satisfactoria y completa.

La información se resume en el siguiente gráfico:

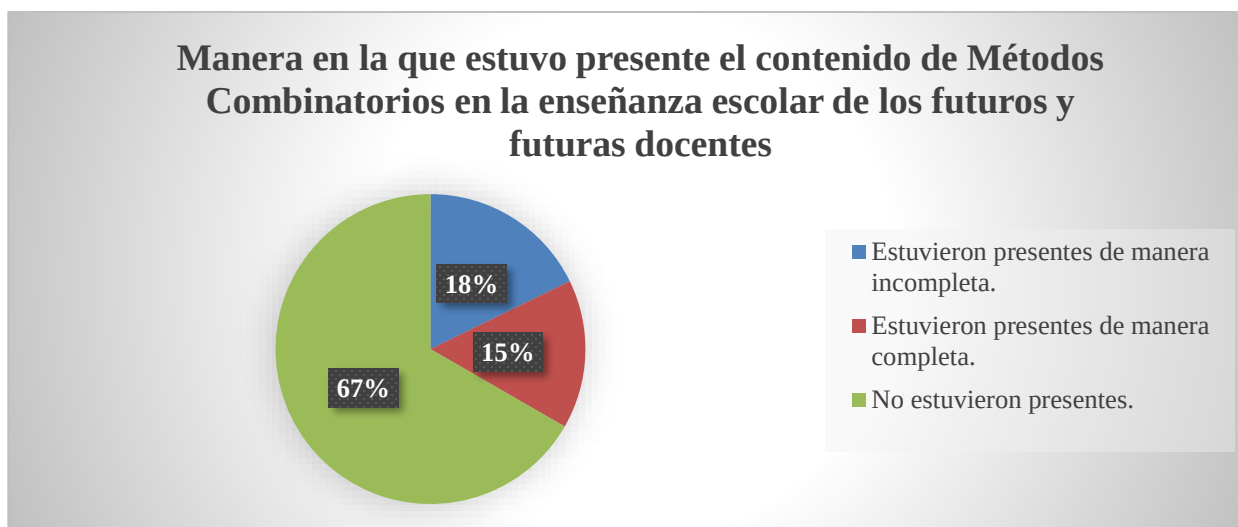


Gráfico 1, Fuente: Elaboración propia

Así es como se observa que más de la mitad de los futuros y futuras docentes encuestadas no estudiaron el contenido de Métodos Combinatorios en su enseñanza escolar formal.

Docentes de educación matemática en ejercicio

En la encuesta para docentes de matemática en ejercicio, se rescata la pregunta, exclusiva de esta encuesta, presente en el área de Docencia: “(...)Cuál(es) de las siguientes opciones identifica mejor las dificultades que enfrenta el profesor al enseñar métodos combinatorios en la escolaridad? (...)”.

La información obtenida se resume en el siguiente gráfico.

Principales dificultades que declaran enfrentar los y las docentes al momento de enseñar Métodos Combinatorios

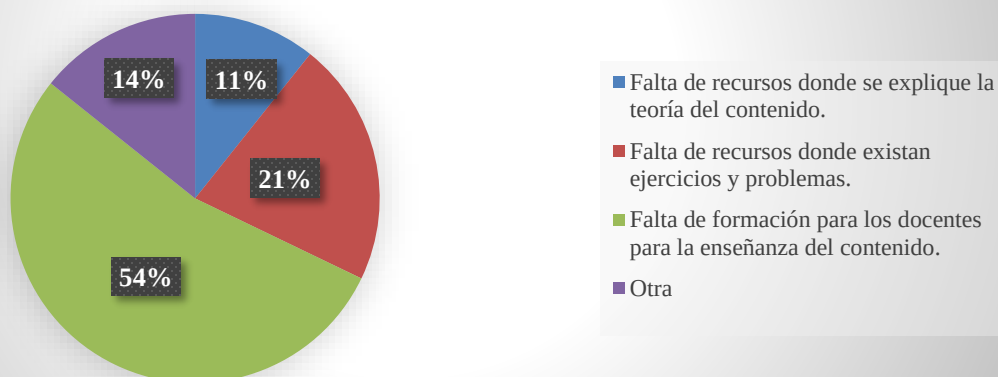


Gráfico 2, fuente: Elaboración propia.

Se observa que más de la mitad de los y las docentes detecta como dificultad la falta de formación para la enseñanza del contenido, seguido por la falta de recursos donde existan ejercicios y problemas acordes a la enseñanza. En cuanto a la elección de “Otra” dificultad, los y las docentes que la escogen mencionan que la dificultad en la enseñanza de Métodos Combinatorios tiene múltiples dimensiones, un ejemplo de esto se encuentra en la siguientes respuestas escogidas:

- “La combinatoria tiene una complejidad intrínseca. Hay variadas técnicas de conteo que requieren razonamientos sofisticados y poco usuales en matemáticas para su comprensión profunda”
- “El desinterés de los docentes, falta de compromiso en términos de la calidad de los aprendizajes que se desarrollan, formación académica, entre otras”

La primera respuesta hace referencia a una complejidad misma de la Combinatoria, en cuanto al razonamiento que esta requiere, y la segunda menciona por problemática un desinterés por parte de los docentes, lo cual perjudica la calidad de aprendizajes que los estudiantes reciben.

Análisis conjunto

A continuación se presenta un análisis de manera conjunta para ambas poblaciones en estudio. En primer lugar se exponen tablas que resumen la información asociada a las preguntas comunes en los instrumentos aplicados. En estas tablas se detalla la pregunta, el área a la que pertenece, y la población. Posteriormente se detallan los resultados por cada parámetro, y luego se realiza en particular un análisis del área de “Habilidades de Métodos Combinatorios”.

En el Anexo se encuentra un análisis detallado para todas las preguntas de manera individual para cada población, al igual que el detalle de cada parámetro.

Tablas comparativas.

1. Tabla n°1, elaboración propia.

Pregunta: “Señale brevemente: ¿Cuál es la diferencia entre combinación y variación?”	
Encuesta futuros y futuras docentes.	Encuesta docentes en ejercicio.
Área: Formación inicial docente.	Área: Formación inicial docente.
Parámetro: “Menciona correctamente la diferencia utilizando el concepto de orden.”	
91% de los y las estudiantes de pedagogía en matemática responden de acuerdo con este parámetro.	87% de los y las docentes de matemática en ejercicio responden de acuerdo con este parámetro.
Parámetro: “Menciona correctamente la diferencia, pero no explícitamente.”	
2% de los y las estudiantes de pedagogía en matemática responden de acuerdo con este parámetro.	Ninguno de los y las docente se encuentra de acuerdo con este parámetro.
Parámetro: “Contesta erróneamente.”	
7% de los y las estudiantes de pedagogía en matemática responden de acuerdo con este parámetro.	13% de los y las docentes de matemática en ejercicio responden de acuerdo con este parámetro.

2. Tabla n°2, elaboración propia.

Pregunta: “En el contexto de Métodos de Recuento, señale brevemente ¿Qué significa que no importa el orden?”	
Encuesta futuros y futuras docentes. Área: Formación inicial docente.	Encuesta docentes en ejercicio. Área: Formación inicial docente.
Parámetro: “Comprende la definición y logra explicarla correctamente:”	
21% de los y las estudiantes de pedagogía en matemática responden de acuerdo con este parámetro.	60% de los y las docentes de educación matemática en ejercicio responden de acuerdo con este parámetro.
Parámetro: “Comprende la definición pero no logra explicarla correctamente”	
58% de los y las estudiantes de pedagogía en matemática responden de acuerdo este parámetro.	27% de los y las docentes de educación matemática en ejercicio responden de acuerdo con este parámetro.
Parámetro: “Responde erróneamente”	
15% de los y las estudiantes de pedagogía en matemática responden de acuerdo con este parámetro.	13% de los y las docentes de educación matemática en ejercicio responden de acuerdo con este parámetro.

3. Tabla n°3, elaboración propia.

Pregunta: “(...) ¿Qué tan preparado/a se siente para enseñar Métodos de Recuento?, Justifique la opción escogida”	
Encuesta futuros y futuras docentes. Área: Futura labor docente.	Encuesta docentes en ejercicio. Área: Docencia.
Parámetro: “Muy preparado/a”	
2% de los y las estudiantes de pedagogía en matemática sienten dicho nivel de preparación.	Ninguno de los y las docente de matemática en ejercicio sienten dicho nivel de preparación.
Parámetro: “Preparado/a”	
18% de los y las estudiantes de pedagogía en matemática sienten dicho nivel de preparación.	Ninguno de los y las docente de matemática en ejercicio sienten dicho nivel de preparación.
Parámetro: “Medianamente preparado/a”	
35% de los y las estudiantes de pedagogía en matemática sienten dicho nivel de preparación.	27% de los y las docentes de matemática en ejercicio sienten dicho nivel de preparación.
Parámetro: “Poco preparado/a”	
36% de los y las estudiantes de pedagogía en matemática sienten dicho nivel de preparación.	33% de los y las docentes de matemática en ejercicio sienten dicho nivel de preparación.
Parámetro: “Muy poco preparado/a”	
9% de los y las estudiantes de pedagogía en matemática sienten dicho nivel de preparación.	40% de los y las docentes de matemática en ejercicio sienten dicho nivel de preparación.

4. Tabla n°4, elaboración propia.

Pregunta: “Justificación de elección de nivel de preparación”	
Encuesta futuros y futuras docentes. Área: Futura labor docente.	Encuesta docentes en ejercicio. Área: Labor docente.
Parámetro: “Buen aprendizaje”	
36% de los y las estudiantes de pedagogía en matemática justifican de este modo su elección.	47% de los y las docentes de matemática en ejercicio justifican de este modo su elección.
Parámetro: “Mal aprendizaje”	
24% de los y las estudiantes de pedagogía en matemática justifican de este modo su elección.	29% de los y las docentes de matemática en ejercicio justifican de este modo su elección.
Parámetro: “Obstáculo específico: Didáctica del tema”	
24% de los y las estudiantes de pedagogía en matemática justifican de este modo su elección.	18% de los y las docentes de matemática en ejercicio justifican de este modo su elección.
Parámetro: “Obstáculo específico: Problema con la elección de Método Combinatorio a utilizar”	
16% de los y las estudiantes de pedagogía en matemática justifican de este modo su elección.	6% de los y las docentes de matemática en ejercicio justifican de este modo su elección.

5. Tabla n°5, elaboración propia.

Pregunta: “(...) ¿Cuál(es) de las siguientes habilidades se podría(n) desarrollar con la enseñanza de métodos combinatorios?: Resolver Problemas, Argumentar y Comunicar, Modelar, y Representar”.	
Encuesta futuros y futuras docentes. Área: Futura labor docente	Encuesta docentes en ejercicio. Área: Labor docente
Parámetro: “Habilidad: Resolver Problemas”	
41 de 44 estudiantes de pedagogía en matemática encuestados seleccionan dicha habilidad.	13 de 15 docentes de pedagogía en matemática en ejercicio selección dicha habilidad.
Parámetro: “Habilidad: Argumentar y Comunicar”	
34 de 44 estudiantes de pedagogía en matemática encuestados seleccionan dicha habilidad.	10 de 15 docentes de pedagogía en matemática en ejercicio selección dicha habilidad.
Parámetro: “Habilidad: Modelar”	
31 de 44 estudiantes de pedagogía en matemática encuestados seleccionan dicha habilidad.	10 de 15 docentes de pedagogía en matemática en ejercicio selección dicha habilidad.
Parámetro: “Habilidad: Representar”	
27 de 44 estudiantes de pedagogía en matemática encuestados seleccionan dicha habilidad.	9 de 15 docentes de pedagogía en matemática en ejercicio selección dicha habilidad.

Toda la información que se ha presentado resulta de mucha utilidad para el propósito de analizar la situación actual de la enseñanza de Métodos Combinatorios, así es que se invita a revisar el Anexo al capítulo de Resultados para revisar de manera detallada el análisis realizado, el cual lleva a la conclusiones precisadas en esta investigación.

Área de “Habilidades de Métodos combinatorios”.

Finalmente, se realiza un análisis detallado del área de “Habilidades de Métodos Combinatorios”, la cual es común de las dos poblaciones de estudio. Esta está compuesta por 6 ejercicios que, como se señala en el Marco Metodológico, pertenecen a la versión corta del cuestionario creado en Navarro-Pelayo, Batanero, y Godino, “Razonamiento combinatorio el alumnos de secundaria” (1996).

En primer lugar, se realiza el análisis de los resultados en base a las respuestas obtenidas. A continuación, se presentan dos gráficos que resumen, respectivamente por pregunta, la cantidad de estudiantes de pedagogía en matemática, y de docentes de educación media en matemática que contestaron correctamente.

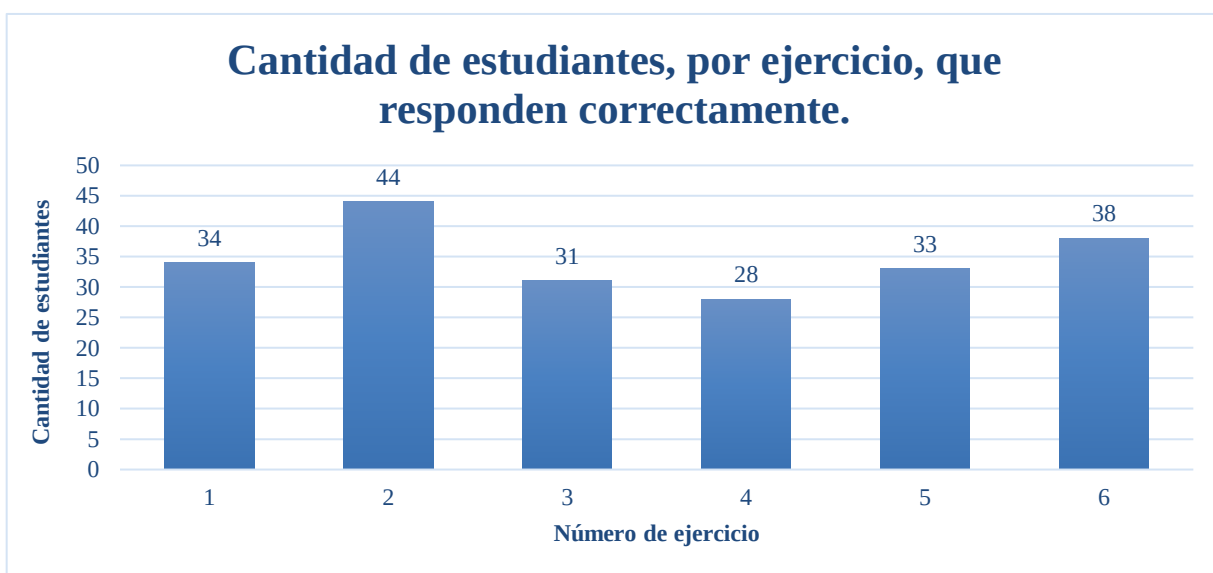


Gráfico 3, fuente: Elaboración propia.

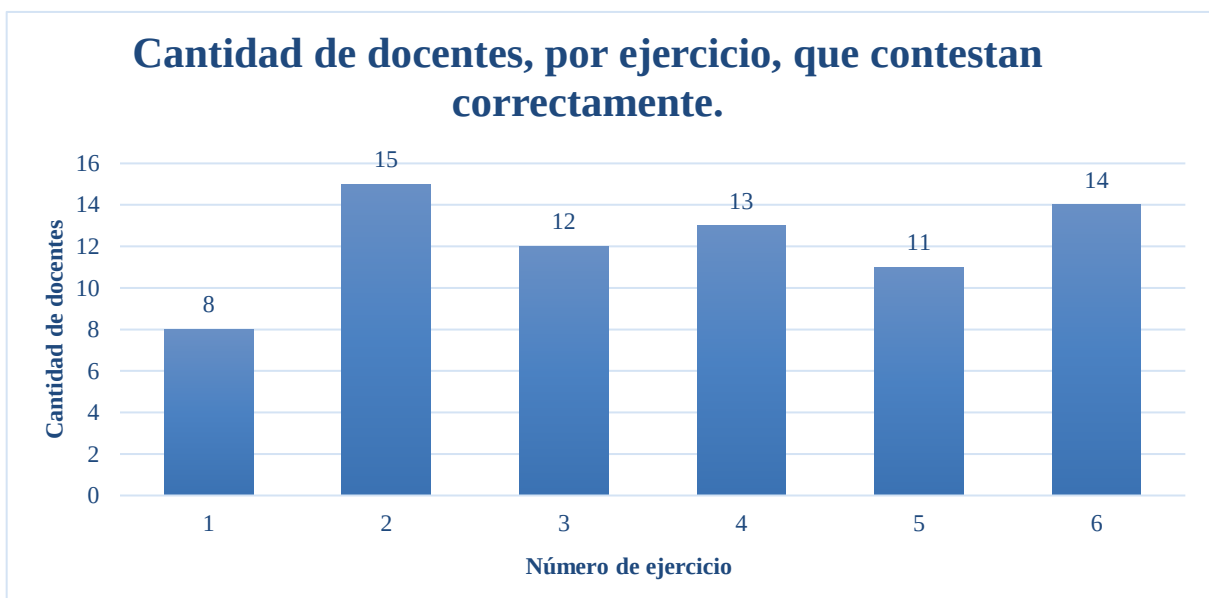


Gráfico 4, fuente: Elaboración propia.

Se observa que la pregunta dos fue respondida, tanto por los docentes y futuros docentes, correctamente por el total de encuestados.

El ejercicio dos corresponde a un modelo denominado, en Navarro-Pelayo, Batanero, y Godino (1996), de “Selección”, esto corresponde a cuando se considera un conjunto de m objetos (generalmente distintos), de los cuales se extrae una muestra de n elementos (Navarro-Pelayo, Batanero, & Godino, 1996). La respuesta a esta pregunta está determinada por una Permutación simple de tres elementos, dando como resultado $3!$. El otro tipo de pregunta de Selección presente en el cuestionario es el ejercicio número seis, que cuenta con 38 de 44 estudiantes de pedagogía en matemática que contestan correctamente, y 14 de 15 en el caso de los y las docentes, y en ambos casos corresponde a la segunda pregunta con mayor cantidad de respuestas correctas.

Por el contrario, los ejercicios con menor cantidad de respuestas correctas, en el caso de los estudiantes de pedagogía, son el número tres y cuatro, con una cantidad de 31 y 28, respectivamente, de estudiantes que contestan de forma correcta. En el caso de los y las docentes, los ejercicios con menor cantidad de respuestas correctas son el número uno, y el cinco, con una cantidad de 8 y 11, respectivamente, de docentes que responden adecuadamente.

El ejercicio cuatro, el cual obtuvo la menor cantidad de respuestas correctas en los estudiantes de pedagogía en matemática, es del tipo denominado “Colocación”, que según los

autores se refiere a la colocación de una serie de n objetos en m celdas, lo que es equivalente a establecer una aplicación desde el conjunto de los n objetos al conjunto de las m celdas. La respuesta a la pregunta corresponde a una Variación simple de cinco sobre 3, V_3^5 . El otro ejercicio del tipo “Colocación” presente en el cuestionario es el ejercicio número uno, y corresponde al que obtuvo menor cantidad de respuestas correctas por parte de los docentes. La respuesta a este ejercicio corresponde a una Combinación de 4 sobre 3, C_3^4 .

En cuanto a los errores cometidos, el más frecuente tanto en docentes como futuros docentes, y muy por sobre los demás, es el de tipo dos, que corresponde a la confusión por la importancia del orden de los objetos. Se observa que, los estudiantes de pedagogía en matemática, y los docentes de matemática que se equivocan en algún ejercicio, la mayoría lo hace por errar en la elección del Método Combinatorio, lo que tiene directa relación con la confusión sobre la importancia del orden de los elementos. A continuación se muestra la distribución de la cantidad de errores cometidos.



Gráfico 5, fuente: Elaboración propia.

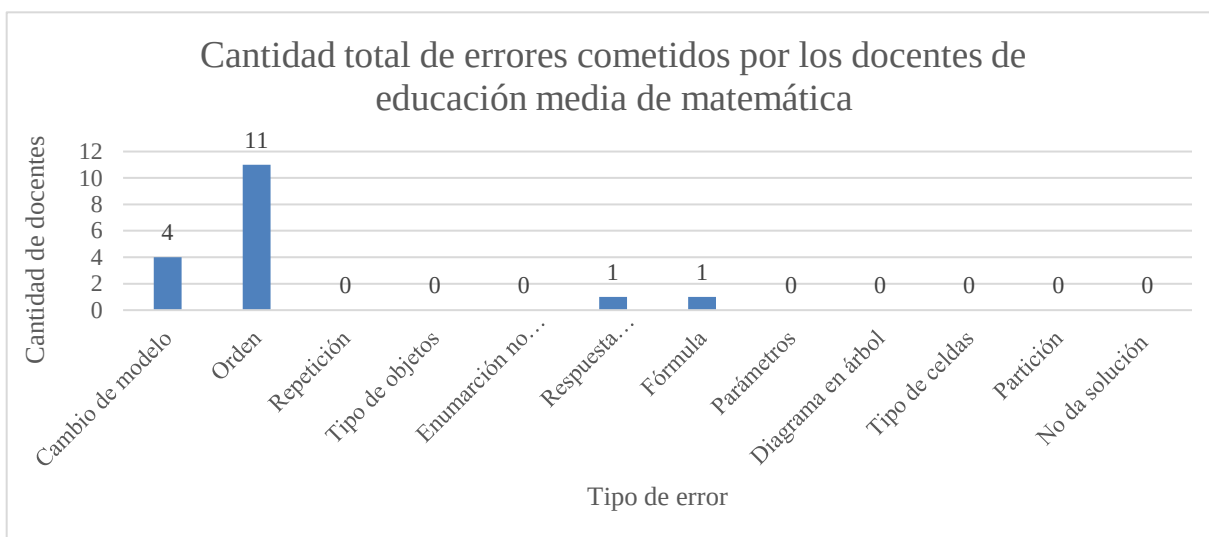


Gráfico 6, fuente: Elaboración propia

En base a esta información es que se procede a graficar la cantidad de errores de tipo dos por pregunta, y se observa que, en el caso de los estudiantes de pedagogía, las preguntas con más errores de tipo dos son las tres y cinco, ambas corresponden al tipo denominado de “Partición”. En este modelo se está interesado en dividir un conjunto de n objetos en m subconjuntos, es decir, en efectuar una partición de un conjunto. (Navarro-Pelayo, Batanero, & Godino, 1996). Así se muestra en el gráfico a continuación.

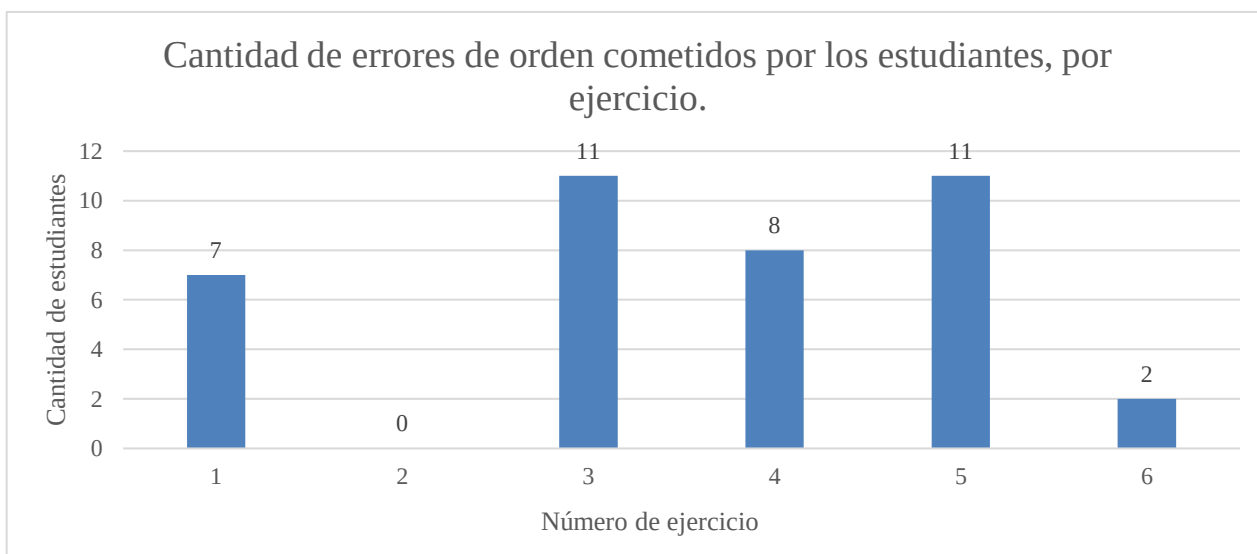


Gráfico 7, fuente: Elaboración propia.

A su vez, los ejercicios con más errores de tipo dos en la encuesta de docentes, son el uno y cinco, las cuales corresponden al modelo del tipo “Colocación” y “Partición”

respectivamente, que ya se han analizado en base al modelo determinado en Navarro-Pelayo, Batanero, y Godino (1996) Así se muestra en el gráfico a continuación.

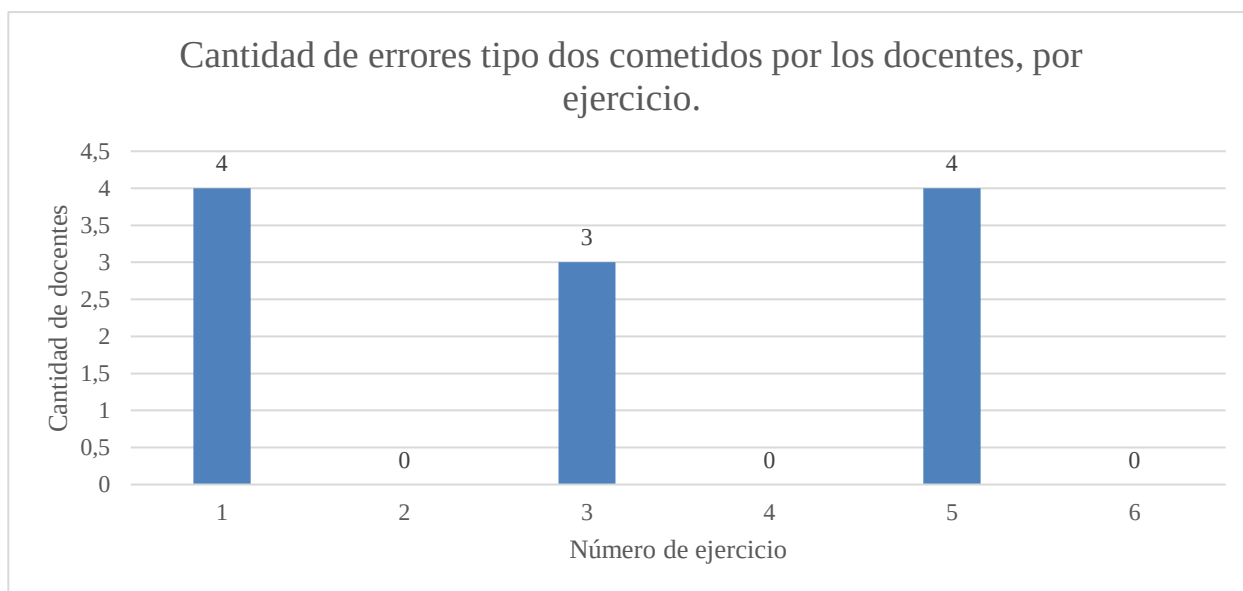


Gráfico 8, fuente: Elaboración propia.

En segundo lugar, se realiza un análisis en base a todas las representaciones utilizadas por los y las docentes, y futuros y futuras docentes al momento de responder los ejercicios de la sección. A continuación se muestra una tabla que lo resume en ambos casos.

Tabla que resume la cantidad de representaciones utilizadas por los y las estudiantes de pedagogía en matemática, por ejercicio.

Número de ejercicio	Representación utilizada				
	Casillas	Diagrama de árbol	Fórmula	Lenguaje natural	Dibujos
1	4	2	38	17	13
2	17	1	26	5	10
3	2	0	37	6	16
4	5	1	38	3	3
5	5	1	34	2	13
6	23	0	31	3	3

Tabla 6, fuente: Elaboración propia

Tabla que resume la cantidad de representaciones utilizadas por los y las docentes de pedagogía en matemática por ejercicio.

Número de ejercicio	Representación utilizada				
	Casillas	Diagrama de árbol	Fórmula	Lenguaje natural	Dibujos
1	11	1	13	8	3
2	7	1	15	9	6
3	3	0	13	12	4
4	7	0	15	9	2
5	3	1	15	7	0
6	9	0	15	5	3

Tabla 7, fuente: Elaboración propia.

Se observa que la gran mayoría de los encuestados y encuestadas utiliza una Fórmula explícita en la resolución de los ejercicios. En cambio, la utilización del Diagrama de Árbol es prácticamente nula.

En el caso de los estudiantes de pedagogía, se puede observar también que la pregunta dos, la cual cuenta con el mayor porcentaje de error, es en la que menos se utiliza la Fórmula, siendo muy frecuente el uso de Casillas en búsqueda de la respuesta.

A su vez, en el caso de los y las docentes, en el ejercicio uno, el que obtuvo la mayor cantidad de errores, es la que más utiliza la representación de Casillas en búsqueda de la resolución. También en el ejercicio tres se privilegia el uso de Lenguaje Natural para complementar el uso de Fórmula.

La información se grafica para evidenciar la distribución de la elección de representación al momento de resolver los ejercicios, tal y como se muestra a continuación.

REPRESENTACIONES UTILIZADAS POR LOS Y LAS ESTUDIANTES EN EL TOTAL DE RESPUESTAS OBTENIDAS

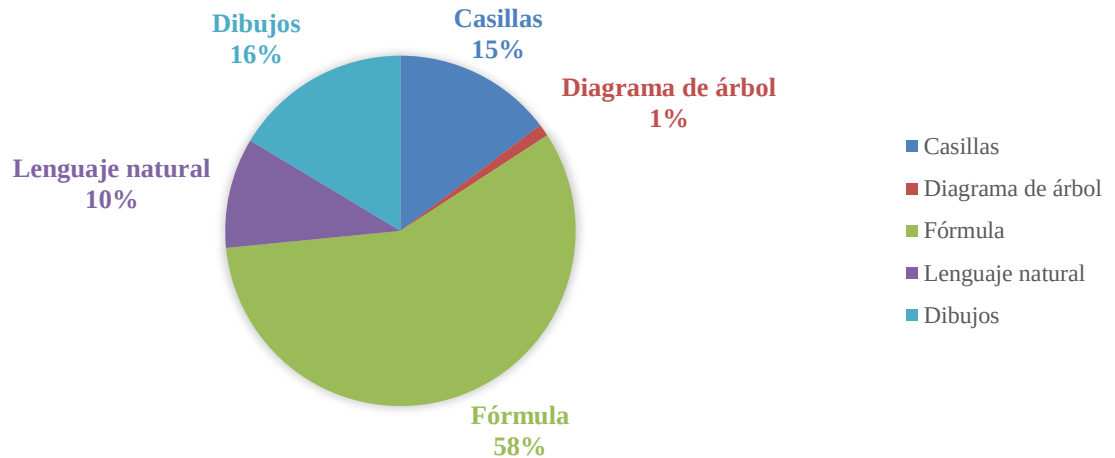


Gráfico 9, fuente: Elaboración propia.

REPRESENTACIONES UTILIZADAS POR LOS Y LAS DOCENTES EN EL TOTAL DE RESPUESTAS OBTENIDAS.

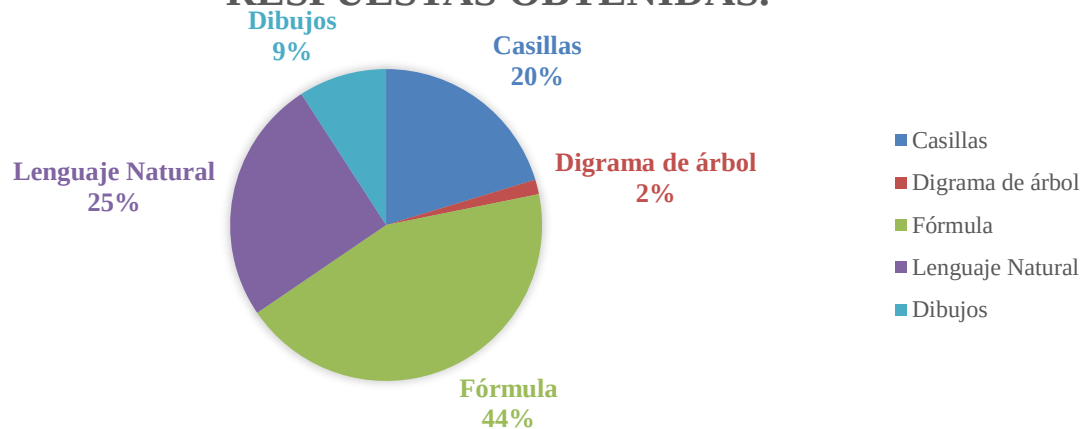


Gráfico 10, fuente: Elaboración propia.

Se observa que, como ya se ha mencionado, en ambas encuestas la mayoría de los encuestados y encuestadas utilizan la Fórmula explícita para la resolución de los ejercicios. En cambio, un porcentaje mínimo utiliza el Diagrama de árbol. El alto porcentaje en la utilización de la representación “Fórmula” se explica pues muchas resoluciones son hechas exclusivamente con ella. No obstante, las otras representaciones son, en su mayoría, utilizadas como un método de comprobación de lo hecho con Fórmula.

En el caso de los y las estudiantes, la resolución mediante las representaciones denominadas como “Dibujos” y “Casillas” tienen una elección del 16% y 15% respectivamente, lo cual las posiciona en un lugar intermedio de elección, lo que significa que, en su mayoría, los estudiantes las utilizan para confirmar su resolución hecha a través de “Fórmula”. Al igual que, pero en menor medida, el “Lenguaje natural”, que es utilizado solo por 10% de los encuestados.

El caso de los y las docentes es similar, pero con la resolución mediante las representaciones denominadas como “Lenguaje Natural” y “Casillas”, las que tienen una elección del 25% y 20% respectivamente. Es decir, los y las docentes utilizan la representación de “Lenguaje Natural” y “Casillas” para la comprobación de sus resultados obtenidos mediante “Fórmula”. De igual manera, la representación “Dibujo” es utilizada, pero solo por un 9% de los encuestados.

En ambos casos, docentes y futuros docentes, se puede decir también que las personas que utilizan otra representación, además de “Fórmula”, necesitan de esta para formalizar su respuesta, no creyendo suficiente una encontrada a través de otra representación.

De las actividades

Las actividades que se confeccionaron son propuestas para el trabajo en clases para la enseñanza de Métodos Combinatorios, tanto en el inicio como en el desarrollo de estas, y además se propone la utilización de un recurso TIC. No se propone un conjunto de ejercicios para resolver, sino que se proponen juegos, desafíos y situaciones diversas, algunas utilizando material concreto, que permiten desarrollar el Razonamiento Combinatorio en estudiantes de 2º medio.

Dichas actividades son flexibles, pueden ser modificadas acorde al contexto del grupo curso, tanto en materiales como en la metodología de aplicación. Se describe detalladamente el desarrollo del Razonamiento Combinatorio en las actividades, proponiendo preguntas orientadoras claves para dicho proceso.

A continuación se presentan los aspectos más relevantes de la propuesta de actividades, tanto de las actividades de Motivación como de Desarrollo de clase, y de las planificadas con el recurso TIC, tomando de ejemplo cuatro de las once actividades, para así ejemplificar el trabajo

realizado. **El detalle y las características de cada actividad se encuentran en el Anexo**, por lo que al leer las actividades pueden surgir algunas dudas que se encuentran resueltas allí.

Motivación

Las actividades propuestas, denominadas como “Motivación” de clase, no son solo para ser utilizadas como un momento individual al inicio de la clase, así como mencionan Alfaro Valverde y Chavarría Chavarría (2002) la motivación se convierte en el motor de una lección, y por lo tanto, como describe Nérici (1991) motivar es predisponer al alumno hacia lo que se quiere enseñar; es llevarlo a participar activamente en los trabajos escolares. Así pues, la motivación en el plano pedagógico significa proporcionar motivos, es decir, estimular la voluntad de aprender. (Alfaro Valverde & Chavarría Chavarría, 2002), y no debe quedar solo en la actividad inicial, si no que ser llevada a cabo a lo largo de la lección. Para este momento se diseñaron cuatro actividades, para ejemplificar y a modo de resumen se presenta la siguiente tabla con una de las actividades:

1. Actividad de Motivación del tipo Juego

Nombre: “El círculo de monedas”

Habilidades: Argumentar y Comunicar.

Resumen actividad: En el juego se disponen 6 monedas por participante, sin dejar espacio entre ellas, formando un círculo. El juego consiste en sacar monedas del círculo, el jugador que saque la o las últimas monedas del círculo ganará. Los jugadores se turnan para sacar una o dos monedas, pero si se sacan dos, estas deben estar una junto a otra, sin que haya entre ellas ninguna otra moneda o espacio vacío. Se le propone a los y las estudiantes jugar 2 ó 3 veces.

Preguntas Orientadoras:

- ¿Qué se debe hacer para asegurarse de ganar el juego?
- ¿Es difícil pensar en todas las opciones que tienen los compañeros y compañeras?
- ¿Si el grupo es de dos, es más fácil pensarlo que de cuatro?, ¿Por qué?

Tabla n°8, elaboración propia.

Desarrollo

Las actividades que se proponen para el “Desarrollo de la clase”, para la enseñanza de Métodos Combinatorios en segundo año medio, son actividades pensadas para que el o la estudiante comience y construya su aprendizaje, así como se menciona en Dueñas, y otros (2018) esta parte de la clase va, para el estudiante, desde su primer acercamiento con el contenido, hasta la capacidad de aplicarlo. Para el correcto desarrollo de estas actividades, es primordial como aprendizaje previo, que los estudiantes conozcan el principio multiplicativo y aditivo. Se diseñaron cinco actividades para este momento de la clase, para ejemplificar se muestra en una tabla el resumen de dos:

1. Actividad para el contenido de Permutación con la utilización de material concreto.

Nombre: “Pasteleros y pasteleras: Permutar con Policubos”

Habilidades: Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar.

Resumen actividad: Se le presenta a los y las estudiantes dos situaciones que deberán resolver con policubos.

Preguntas Orientadoras: Se presentan preguntas orientadoras por situación.

Primera situación

“Se debe determinar el orden de los sabores de una torta para la celebración del aniversario del colegio. Esta tiene tres pisos, cada uno con un sabor distinto, se deben distribuir entre: frambuesa, crema pastelera y menta. Se nos solicita describir cuántas diferentes tortas se podrían construir, teniendo en cuenta que el diferente orden de los sabores determina una torta distinta. El piso de frambuesa está identificado por el color rojo, el de crema pastelera por color amarillo, y el de menta por verde.”

Preguntas Orientadoras primera situación

- ¿Cuál es la mayor cantidad de tortas distintas que se pueden construir con tres sabores?
- ¿Por qué son estas, todas las tortas que se pueden construir?
- ¿Existe otra forma, distinta a la planteada, para representar las cantidad de tortas que se pueden construir?

Segunda situación	Preguntas Orientadoras segunda situación
“La directora se ha olvidado del sabor favorito de los estudiantes, el chocolate, que se representa con el color café. Por lo que se solicita, nuevamente, determinar la mayor cantidad de tortas que se pueden cocinar, esta vez, con los cuatro sabores, sin repetir ninguno.”	- ¿Cuál es la mayor cantidad de tortas distintas que se pueden cocinar con los cuatro sabores? - ¿Por qué son estas, todas las tortas que se pueden construir? - ¿Existen otras forma para representar y determinar la cantidad de tortas que se pueden preparar? - Si ahora fueran cinco sabores, ¿Habría más cantidad de tortas posibles?, ¿De qué manera podrías resolver la problemática?

Tabla n°9, elaboración propia.

2. Actividad para el contenido de Variación con la utilización del juego “Mastermind”

Nombre: “Mastermind: Adivina el código”

Habilidades: Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar.

Resumen actividad: Se les explica a los y las estudiantes la metodología e instrucciones del juego Mastermind o Código secreto, las que en general son:

En un sector se dispone un espacio para que, de manera secreta, un jugador cree un código, en este caso, con cuatro colores, que se pueden repetir o no según lo que disponga el moderador o moderadora.

Preguntas Orientadoras:

- ¿Qué estrategias utilizaron para intentar ganar el juego?
- Con la cantidad de filas disponibles para los

A continuación, el otro jugador, el descifrador, intentará descifrar el código, esto poniendo intentos en la sección de cuatro agujeros horizontales. Para ir avanzando y logrando determinar el código, el jugador que lo creó le dará pistas a través de fichas color rojo o blanco, que se dispondrán al costado de cada intento, de manera general, de la siguiente forma: - No se pondrá ninguna ficha, si ninguno de los colores dispuestos por el descifrador coincide con el código creado. - Se pondrá una ficha color blanco, por cada ficha de color correcto que haya dispuesto el descifrador. - Se pondrá una ficha color, rojo por cada ficha que haya dispuesto el descifrador con el color, y la posición correcta. El descifrador no sabrá cuál de sus fichas dispuesta es correcta, tanto en color como en posición. Este contará con una cantidad máxima de intentos, que estará determinada por el tablero. Ganará el descifrador si logra determinar correctamente el código en el número de intentos máximos, en caso contrario gana el otro jugador. En esta oportunidad, para la creación de la clave tenemos tres colores disponibles, pero esta debe tener solo se desarrolla con dos colores, los que no se pueden repetir, con un total de 4 filas para lograr adivinar.	intentos, ¿Se podrá ganar sí o sí el juego? - ¿Cuántas filas debería haber para asegurar que se va a ganar, sí o sí?, ¿y si el código a descifrar fuera de cinco colores sin repetirse? - Lo anterior, ¿Se puede generalizar para cualquier número de colores? - ¿De qué otra manera se puede representar la cantidad de claves que se pueden formar con los cuatro colores?, ¿y con cinco?
---	--

Tabla n°10, elaboración propia.

Recurso TIC

En las actividades que utilizan el recurso TIC se describen dos diferentes maneras de utilizar LABAPC (García Moreno, Laboratorio Básico de Azar, Probabilidad y Combinatoria., 2010), el cual es un software de libre acceso, primero a través de la ejemplificación con un ejercicio del texto escolar ministerial para 2º medio, y luego con las herramientas que proporciona el software. Estas son solo un pequeño ejemplo de las posibilidades del software. A continuación se muestra una síntesis de los aspectos más importantes de una de las actividades:

1. Actividad utilizando el recurso LABAPC

Nombre: “¿Camino lógico?”

Habilidades: Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar.

Resumen actividad: A través de la utilización del recurso web LABAPC, específicamente la sección “Caminos lógicos”, que se encuentra luego de, en el inicio de la página, escoger la sección “Combinatoria”, se propone la resolución del siguiente ejercicio: ¿Cuántos caminos existen para llegar del punto A al B en una cuadrícula de 4x2?

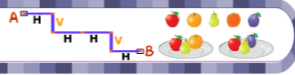
Se invita a los y las estudiantes a utilizar la sección para comprobar el resultado de su ejercicio, utilizando las herramientas que este trae.

Preguntas Orientadoras:

- ¿Cuáles fueron las dificultades que se enfrentaron al momento de resolver el ejercicio?
- ¿El software aportó a la solución de estas?

Imagen de referencia:

COMBINATORIA.
CAMINOS LÓGICOS SOBRE UNA CUADRÍCULA



Coloca adecuadamente 4 tramos verticales (V) y 2 tramos horizontales (H) para construir un camino de 6 tramos que una A con B sobre la cuadrícula. Esto es lo que se llama un CAMINO LÓGICO desde A hasta B. ¿Cuántos caminos lógicos diferentes se pueden construir?



Cada camino construido es una permutación de 6 elementos (6 tramos) con repetición (hay 4 tramos verticales indiferenciables y 2 tramos horizontales indiferenciables entre sí). Hay, por tanto:

$$PR_6^{4,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

...caminos lógicos diferentes. Trata de encontrar los 15 caminos lógicos diferentes. Cuando formes un camino, éste quedará registrado automáticamente siempre y cuando no se trate de un camino repetido.



Estado:
Camino sin construir

Cuando lo intentes, no tardarás en caer en la cuenta de la importancia de seguir un orden o una estrategia de formación.
También puedes utilizar la estrategia más utilizada en Combinatoria: tomar un papel y lápiz y hacer el correspondiente diagrama en árbol.



VOLUMEN
- 70 +



Imagen tomada de García Moreno (Laboratorio Básico De Azar, Probabilidad Y Combinatoria (LABAPC), 2010)

Tabla n°11, elaboración propia

Discusión y Conclusión

En la presente investigación se analizó la realidad de la enseñanza de la Combinatoria en Chile. Primero identificando el tratamiento que se le ha dado en diferentes textos de estudio, y cómo el recurso didáctico del Juego es contingente para su enseñanza. Luego recopilando y analizando información sobre las dificultades que enfrentan docentes, y futuros docentes, para así finalmente diseñar actividades que respondan a las necesidades detectadas.

A partir de lo anterior es que se puede evidenciar que la enseñanza de la Combinatoria se ha enfocado en la memorización de fórmulas, dejando de lado la comprensión. De este modo, se puede observar que si se realiza el ejercicio de buscar el contenido en diferentes plataformas educativas, se encuentran ejercicios y el contenido, pero solo dando énfasis en la memorización de fórmulas mediante diferentes técnicas. Esto puede explicarse pues a nivel escolar, en enseñanza media, existe un profundo enfoque en las salas de clases hacia la preparación de la Prueba de Selección Universitaria (actualmente prueba de transición), la cual evalúa precisamente lo mencionado, cálculo de Métodos Combinatorios, o cálculo de probabilidades. Esto conlleva a un déficit en el Razonamiento Combinatorio en los y las estudiantes de enseñanza media, pues en ningún otro momento, según las Bases Curriculares, se propician espacios para su análisis.

En cuanto a los textos estudiados, “Combinatoria y Probabilidad” (Wilhelmi, 2004), “Probabilidades doctas con discos, áboles, bolitas y urnas” (Romagnoli, 2011) , y el “Texto para el estudiante de segundo año medio” (Ministerio de Educación de Chile, 2018), se observó que existen diferencias en el tratamiento del contenido. Primero, la manera de definir cada Método Combinatorio presenta diferencias, según cada autor, por ejemplo Wilhelmi (2004) realiza una definición formal para cada Método Combinatorio de manera individual, a partir de la demostración y construcción de ella. De la misma manera, el Texto escolar para segundo año medio se encarga de construir con matemática de nivel escolar, a partir de un ejemplo, las definiciones y fórmulas, para al final de la lección explicitarlas a modo de resumen o cierre. En cambio, Romagnoli (2011) presenta las definiciones utilizando el modelo de urnas y extracción de bolitas, llevándolo siempre al concreto, es decir, no deja las definiciones de manera abstracta sino que las lleva a una situación real, para luego formalizar y generalizar la fórmula. Es importante mencionar que en este texto, los diferentes Métodos Combinatorios se muestran de

manera conjunta, uniéndolos para comprenderlos de esa manera. A diferencia de los otros dos textos, que muestran implícitamente o como consecuencia un método a partir de otro, pero no relacionándolos a ese nivel, dejando al lector o estudiante el trabajo de relacionar y determinar la relación existente.

Se observa que la construcción de un Razonamiento Combinatorio, en los textos citados, surge a partir del Lenguaje Natural, es decir, a través de un razonamiento lógico matemático de situaciones problemáticas, con y sin contexto, se ha de llegar a la formulación del Método Combinatorio en cuestión, quedando para posterior la ejercitación con juegos o contextos, dependiendo del texto.

Sumado a lo anterior, es que al estudiar el tratamiento del contenido en el Texto escolar de 2° año medio, de carácter privado, de la editorial Crecer Pensando (Santis Ávalos, Celedón Montiel, Aguilar Baeza, y García Escuti, 2016) se observa lo poco que es trabajado el Razonamiento, pues solo se entregan ejercicios resueltos, es decir, el contenido se lleva a la mecanización a través de las fórmulas.

Por otra parte y en relación con las encuestas aplicadas para esta investigación, se observó que en las respuestas de ambas poblaciones en estudio, futuros docentes y docentes en ejercicio, se mencionan ciertas habilidades que se pueden desarrollar con la enseñanza de Métodos Combinatorios muy por sobre otras. Se infiere que, posteriormente, en la labor docente, se llevará a cabo una planificación de la enseñanza en la búsqueda principalmente de esas habilidades, pues son de manejo personal del docente. Estas habilidades pueden no ser siempre las más desafiantes, y como consecuencia a esto, se observa de manera general en matemática que en muchos casos se planifica solo en la búsqueda de un aprendizaje memorístico, de utilización y comunicación de resultados, por lo que, por ejemplo, las habilidades de Modelación y Representación quedan fuera de ello. Dichas habilidades son las menos seleccionadas por los sujetos de ambas poblaciones de estudio, por lo que las actividades planteadas en esta investigación buscaron responder a esa necesidad. Sin embargo, debiese fomentarse en la formación inicial docente la visualización de planificaciones en búsqueda del desarrollo de otras habilidades de orden superior, para evitar así el sesgo con ciertos contenidos matemáticos que pudiesen considerarse de menor importancia, como es el caso, según lo investigado, de los Métodos Combinatorios.

En el análisis de los datos se observó una relación entre las respuestas ante la descripción de la importancia del orden, y el error más frecuente cometido en los ejercicios, en ambas poblaciones de estudio. En primer lugar, entre los y las estudiantes de pedagogía, y los y las docentes de educación matemática en ejercicio, existe, especialmente en los primeros, un porcentaje importante de personas que no logran definir correctamente la importancia o no del orden en contextos de Métodos Combinatorios. Sumado a esto, se determinó que el error más frecuente al momento de resolver la sección de habilidades de Métodos Combinatorios² es el de tipo dos, lo que corresponde a la confusión por la importancia del orden de los objetos a configurar. Es así como, analizando dichas situaciones, se observa que en ambas poblaciones de estudio no existe una confianza en un resultado que no sea obtenido a través de una Fórmula. En la mayoría de los casos, se utiliza primero otra representación, como Casillas o Lenguaje natural, para posteriormente comprobarlo o ratificarlo formalmente mediante la Fórmula del Método Combinatorio escogido.

Lo expuesto anteriormente evidencia un déficit en el Razonamiento Combinatorio, pues, para determinar la Fórmula a utilizar, se procedió por la memorización, y no por el razonamiento de la situación. De ese modo, se omitió el proceso de pensar en todos los casos posibles, por lo cual los sujetos de las poblaciones de estudio incurrieron en errores al no darse cuenta, o no razonar, a cerca de las posibilidades de organización que tenían los elementos, y las restricciones que existían en base a los contextos, lo que llevaba al resultado correcto por otro Método Combinatorio. Esto también puede deberse a un exceso de confianza con la fórmula, es decir, creer que esta se sabe de memoria, en cuanto a cuándo y cómo usarla, y que por lo tanto, es solo “llegar y aplicar”. Esto es un hallazgo de la investigación por lo que puede ser utilizado para futuras investigaciones en exploración de soluciones.

Por otra parte, en la búsqueda de información para la construcción de las actividades, se evidencia la falta de recursos para la utilización del juego en la enseñanza media, de lo cual se encontró información relevante e investigaciones que puntualizan sobre la importancia del juego en educación preescolar, pero a medida que se va avanzando en los niveles escolares, va disminuyendo drásticamente la información y recursos de este tipo. Las actividades que se presentaron aportan e innovan en la investigación, y constituyen un recurso para los y las

² Ejercicios de la versión corta del cuestionario encontrado en Navarro-Pelayo, Batanero, y Godino (1996)

docentes en la utilización de juegos en educación matemática en enseñanza media, la cual, como se mencionó, es aún escasa, debido a que es muy difícil encontrar juegos para dicho nivel en Chile, pues en esta etapa de la escolaridad se favorece el estudio a pruebas estandarizadas, como menciona Rupin (2019) *“pareciera que el juego no aportase cuando hay una presión tan grande por determinados resultados, llámese pruebas nacionales de conocimiento, que se cree que a los niños hay que “entrenarlos” para eso.”*. En ese sentido, la investigación y la propuesta de actividades propone mirar la educación desde otro punto de vista a lo que habitualmente se hace en la sala de clases, lo que no podrá traer repercusiones positivas si no se avanza en políticas públicas. En este sentido, la investigación pone en la mesa lo mencionado por Garrido y Cárcamo (2020), quienes especifican que

“Si bien el valor del juego en relación al aprendizaje ha comenzado a abrirse un espacio en las preocupaciones públicas de educación de algunos niveles educativos (específicamente educación inicial), es necesario que esto se traduzca en una política pública a todo nivel educativo, que tenga relación con abrir espacios de juego en la escuela, tales como ludotecas que proporcionen material concreto para los docentes a la hora de integrar el juego en el aula.”

De ser tomado en cuenta, y comenzar el camino de la utilización de espacios al Juego, aportaría a una de las principales dificultades de la implementación de actividades, la cual es el déficit de los materiales y herramientas necesarias para la correcta implementación en las salas de clases.

Es importante mencionar, que el hecho de que además de Juegos, también se hayan propuesto actividades con material concreto y recursos tecnológicos, no es necesariamente porque no haya habido más material con respecto al Juego, sino que es la muestra también de otra metodología para la enseñanza de Métodos Combinatorios, donde se propicie un espacio para el desarrollo de razonamientos matemáticos, y no conlleve solo a memorizar una fórmula.

Con todo lo que ya se ha expuesto en esta investigación, se evidencia que los aspectos principales del objetivo de esta investigación se han cumplido, pues por un lado, se consultaron y analizaron diferentes documentos de estudio de Métodos Combinatorios, desde las Bases Curriculares, pasando por el Texto de estudio escolar correspondiente a 2° medio, y su contraste con un Texto escolar privado, hasta libros de matemática discreta. Esto permitió dar un amplio espectro de la realidad actual, en cuanto al tratamiento del contenido, pudiendo evidenciar

similitudes y diferencias fundamentales, que aportan a la dirección en la que se quiera guiar la enseñanza de Métodos Combinatorios, para ampliar la manera en la que este objeto matemático puede ser tratado, tanto en definiciones, como representaciones, ejercicios y problemas.

Por otra parte, se revelan las dificultades que enfrentan los docentes y futuros docentes en su proceso de enseñanza aprendizaje de los Métodos Combinatorios. En primer lugar, con la población de futuros y futuras docentes, mediante la resolución de los ejercicios y las respuestas a preguntas fundamentales para la enseñanza del contenido³, presentes en el cuestionario, se evidenció principalmente, como ya se ha mencionado, un déficit en su Razonamiento Combinatorio. Esta información es útil para tomar medidas a corto plazo en la formación inicial docente, y reformular la manera en la que es enseñada el contenido, poniendo un énfasis mayor en el proceso, más que el resultado, y buscar estrategias para que los futuros y futuras docentes se formen, para que el tratamiento de este contenido en la sala de clases sea en la búsqueda de aprendizajes significativos, y no continuar con los errores evidenciados.

En segundo lugar, en la población de docentes que representan a esta investigación se evidencian dificultades similares en cuanto al proceso de enseñanza aprendizaje, lo cual lo ratifican respondiendo a la pregunta “(...)Cuál(es) de las siguientes opciones identifica mejor las dificultades que enfrenta el profesor al enseñar métodos combinatorios en la escolaridad? (...)”, en la cual un 54% manifiesta la falta de formación para la enseñanza del contenido. Es decir, los docentes señalan, consciente (en cuanto a dicha pregunta) e inconscientemente (en cuanto a sus respuestas de los ejercicios y preguntas fundamentales) que la preparación para la enseñanza de este contenido es débil, y debe fortalecerse.

Finalmente, se diseñaron once actividades que responden a las necesidades evidenciadas, pues no solo se presentan actividades como tal, sino que se ha realizado el trabajo de diseñar el paso a paso en la construcción de aprendizajes, mencionando preguntas orientadoras claves y el Razonamiento Combinatorio que se espera, vaya desarrollándose progresivamente. Además de presentar actividades para dos diferentes momentos de la clase, Motivación y Desarrollo, con el recurso didáctico del Juego, lo que es un gran aporte a la investigación de esta área en enseñanza media.

³ Principalmente: “En el contexto de Métodos de Recuento, señale brevemente ¿Qué significa que no importa el orden?”.

Por último, en las actividades se desarrollan habilidades matemáticas que ambas poblaciones de estudio mencionaron en menor medida se pudiesen generar, por lo que es una muestra legítima y tangible de que es posible trabajar el contenido de Métodos Combinatorios no solo en la memorización de fórmulas, y que es posible trabajar a través de Juegos y recursos lúdicos en enseñanza media.

Lamentablemente, por las condiciones sanitarias mundiales, que la Organización Mundial de la Salud ha calificado de pandemia, no se pudo tener una cantidad mayor de la muestra de docentes de matemática en ejercicio, con lo que se hace muy difícil generalizar las dificultades determinadas, por lo que esta investigación es un primer acercamiento e invita, a partir de lo expuesto, a que se pueden investigar y ahondar en las problemáticas de los docentes.

Debido a lo anterior, es una proyección de esta investigación, que en la puesta en práctica de las actividades, se recogiesen datos e informaciones que aportasen a la mejora de la propuesta, tanto particularmente, como a modo general en la aplicación del Juego en la enseñanza matemática en educación media.

A partir de esta investigación, se puede continuar esta línea investigativa sobre la utilización del Juego en la enseñanza matemática en educación media, para así proporcionar más recursos en el área, para los y las docentes.

Es así como, algunas preguntas que surgen a partir de esta investigación son:

- ¿De qué manera el recurso del Juego influye en el proceso de enseñanza aprendizaje matemático en educación media?
- ¿Cómo el uso de Juegos en el proceso de enseñanza aprendizaje afecta el desarrollo del Razonamiento Combinatorio?

Finalmente, es importante mencionar que esta investigación es una muestra de que es posible enseñar a través de metodologías que pareciesen no convencionales, más aún en contenidos poco valorados a nivel escolar, en la búsqueda de aprendizajes significativos. Es así como esta investigación es también una invitación a que, siempre cuando como docentes nos veamos enfrentados a contenidos que se sienten poco desafiantes, o que podrían parecer “poco útiles”, se indague su importancia, las habilidades y razonamientos que se construyen a partir

de ello, y así utilizar metodologías novedosas que aporten en la motivación de los y las estudiantes.

Referencias bibliográficas

- Alfaro Valverde, A., & Chavarría Chavarría, G. (2002). La motivación: Una actividad inicial o un proceso permanente. *Pensamiento actual*, 33-40.
- Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*15, 2-13.
- Chacón Aguirre, A. J., García Castillo, G., Rupinn Gutiérrez, P., Setz Mena, J., & Villena Ramirez, M. (2018). *Texto del estudiante, Matemática 2°medio*. Santiago de Chile.
- D'Andrea. (2012). *JUEGOS MATEMÁTICOS Y ANÁLISIS DE ESTRATEGIAS*. Universidad Nacional de Córdoba .
- Daza Herrera, J. (2007). *Desarrollo del pensamiento combinatorio. Una didáctica para el arte de contar*. Mérida, Venezuela: Universidad de los Andes.
- de Guzman, M. (1984). *Juegos Matemáticos en la Enseñanza*. Obtenido de Universidad Complutense Madrid:
<http://www.mat.ucm.es/cosasmdg/cdsmdg/05edumat/tendencias2000/laboratoriodiscojgk/tercera%20parte/juemat/juemat.htm>
- de Guzman, M. (1989). Juegos y matemáticas. *SUMA*, 61-64.
- del Castillo Pintado, P. (14 de Febrero de 2018). *Refuerzo divertido*. Obtenido de <https://refuerzodivertido.com/2018/02/14/matematicas-combinatoria-%F0%9F%92%9A%F0%9F%92%9C/>
- del Pino, G., & Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo*, 53-64.
- Dueñas, Y., Baquero, G., García-Martínez, A., Bravo-Osorio, F., Merino, C., & Calderón, D. (2018). *Modelo de Creaciones Didácticas en cooperación*. . Proyecto ACACIA.
- Edo, M., & Deulofeu, J. (2006). *Juegos interacción y construcción de conocimientos matemáticos: Investigación sobre una práctica educativa*. Barcelona.
- Fernández Lopez, M. (2014). *El juego y las matemáticas*. Universidad de la Rioja.

- Fernández Millán, E. (2013). Razonamiento Combinatoria y el currículo español. *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.*, 539-543.
- Fernández, S. (2007). Los inicios de la teoría de la probabilidad. *SUMA*, 7-20.
- Gairín Sallán, J. M. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Educación*, 105-118.
- García Moreno, J. (2010). *LABAPC*. Obtenido de Laboratorio Básico de Azar, Probabilidad y Combinatoria :
<http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/index.html>
- García Moreno, J. (2010). *Laboratorio básico de Azar, Probabilidad y Combinatoria (Guía didáctica)*.
- García Moreno, J. (2010). *Laboratorio Básico de Azar, Probabilidad y Combinatoria*.
Obtenido de
<http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2010/labazar/index.html>
- Gardner, M. (1979). *Circo matemático*.
- Garrido, V., & Cárcamo, P. (2020). El valor del juego en educación: Hacia una política pública en todos los sistemas escolares en Chile. *Observatorio del Juego*, 17-21.
- González Poveda, M., & Suescun Batista, M. (2005). Mastermind. Aprender matemáticas jugando. *Matemáticas experiencias*, 90-91.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, M. (2010). *Metología de la investigación*. México D.F.: McGRAW-HILL.
- León, G. (2014). Aproximaciones a la mediación pedagógica. *Calidad en la educación superior*, 136-155.
- Martín Arribas, M. C. (2004). Diseño y validación. *Matronas Profesión*, 23-29.
- Martín Vilchez, C. (2015). *El juego como recurso didáctico en el aula de matemáticas*.

- Mestre Rodríguez, M. T. (2016). *El valor del juego dentro de las aulas de matemáticas. Recursos didácticos.*
- Ministerio de Educación. (2015). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio.* Santiago.
- Ministerio de Educación. (2015). *Estándares de aprendizaje Matemática 2°medio.* Santiago de Chile.
- Ministerio de Educación de Chile. (2015). *Bases curriculares 7° básico a 2° medio.* Santiago.
- Ministerio de Educación de Chile. (2016). *Matemática, programa de estudio segundo año medio.* Santiago de Chile.
- Ministerio de Educación de Chile. (2016). *Matemática, programa de estudio segundo medio.* Santiago de Chile.
- Ministerio de Educación de Chile. (2018). *Texto del estudiante, Matemática 2°medio.* Santiago de Chile.
- Morales, J. A., & Frisancho, S. (2013). Operaciones combinatorias en estudiantes universitarios de ciclo inicial. *Revista electrónica de tecnologías y epistemologías genéticas.* , 130-156.
- Muñiz-Rodríguez, L., P. A., & J. Rodríguez, L. (2014). El uso de los juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 19-33.
- Navarro-Pelayo, V., Batanero, C., & Godino, J. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria . *Educación matemática*, 26-29.
- Néricsi, I. (1991). *Hacia una didáctica general dinámica.* Bueno Aires: Kapelusz.
- Peñailillo Olmos, P. A. (2020). *Propuesta de encuesta para el análisis de las habilidades y percepciones que tienen los estudiantes de licenciatura en educación y pedagogía en educación matemática con respecto a la enseñanza de los métodos combinatorios.* Santiago de Chile: UMCE.
- Perelman, Y. (1980). *Matemáticas recreativas.* Moscú: MIR.

- Piaget, J. (1985). *Seis estudios de psicología*.
- Piedra Moreno, D. P., & Camacho Ruiz, C. G. (2013). Probabilandia, un escenario de juegos de azar para la enseñanza de las técnicas de conteo y el concepto básico de probabilidad. *Educación científica y tecnológica*, 655-659.
- Real Academia Española. (06 de Marzo de 2020). *Real Academia Española*. Obtenido de <https://dle.rae.es/>
- Reguant, M., & Martínez-Olmo, F. (2014). *Operacionalización de conceptos/variables*. Dipòsit Digital de la UB: Barcelona.
- Riedemann Carrillo, A. (2020). Los juegos de mesa como herramienta para el desarrollo de las funciones ejecutivas. *Revista Observatorio del Juego*, 16-20.
- Roa, R. (2000). *Razonamiento Combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Granada.
- Roca, G. (. (2015). *Las nuevas tecnologías en niños y adolescentes. Guía para educar saludablemente en una sociedad digital*. Barcelona: Hospital Sant Joan de Déu (ed).
- Romagnoli, P. P. (2011). *Probabilidades doctas con discos, árboles, bolitas y urnas*. Santiago de Chile: Universidad de Chile.
- Rupin, P. (2019). El papel del juego en la educación bajo la lupa del Doctor en Ciencias de la Educación Pablo Rupin. (Observatorio del Juego, Entrevistador)
- Santis Ávalos, M. A., Celedón Montiel, J., Aguilar Baeza, M., & García Escuti, C. (2016). *Texto-Manual Matemática 2º medio*. Santiago de Chile: Crecer Pensando.
- SARA RESETEO. (17 de Febrero de 2017). *RESETEO MATEMÁTICO*. Obtenido de <http://reseteomatematico.com/policubos-estadistica-combinatoria-probabilidad/>
- Vargas, D. M. (2015). Análisis histórico-epistemológico de la iniciación de la combinatoria.
- Venegas Guerrero, A. A. (2018). *Razonamiento Combinatorio en futuros profesores de educación primaria*. Universidad de Granada.

Venegas Guerrero, A., Gea Serrano, M. M., Roa Guzmán, R., & Díaz Pallauta, J. (2019).

Lenguaje empleado por futuros profesores de educación primaria en la resolución de problemas combinatorios. Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.

Wilhelmi, M. R. (2004). *Combinatoria y probabilidad*. Granada.

Anexos

Del Marco Metodológico

A continuación se detallan los anexos correspondientes al Marco Metodológico.

Instrumentos

Encuesta futuros docentes.

Las siguientes preguntas y problemas tienen por objetivo identificar las dificultades que tienen los/as profesores/as con el contenido “métodos de recuento (combinaciones y permutaciones)” de segundo año medio.

I. Responda las siguientes preguntas respecto a su formación y labor docente.

1. Dentro de tu enseñanza escolar, ¿Estuvieron presente los métodos de recuento? ¿De qué forma?

2. En una escala del 1 al 5, siendo:

- 1 muy poco preparado/a
- 2 poco preparado/a
- 3 medianamente preparado/a
- 4 preparado/a
- 5 muy preparado/a

Escoja la opción que da respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué tan preparado/a se siente para enseñar métodos de combinatorios? _____

Justifique la opción escogida: _____

3. Señale brevemente: ¿Cuál es la diferencia entre combinación y variación?

4. En el contexto de métodos combinatorios, señale brevemente ¿Qué significa que no importa el orden?

5. Según define el programa de estudio segundo medio, ministerio de educación, noviembre 2016: “Las habilidades son capacidades para realizar tareas y para solucionar problemas con precisión y adaptabilidad. Pueden desarrollarse en los ámbitos intelectual, psicomotriz o psicosocial.”, ¿Cuál(es) de las siguientes habilidades se podría(n) desarrollar con la enseñanza de métodos combinatorios?

- ☐ Resolver problemas
- ☐ Argumentar y comunicar
- ☐ Modelar
- ☐ Representar

II. Resuelva los siguientes problemas dejando registro de la manera en la que lo hizo.

1. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre solo puede contener, a lo más, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

2. En una urna hay tres bolas marcadas con los números 2, 4 y 7. Extraemos una bola de la urna y anotamos su número. Sin devolver la bola extraída, se elige una segunda bola y se anota su número; y sin devolverla, se saca una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes podemos obtener? Ejemplo: el número 724.

3. Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lenguaje. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

4. El estacionamiento de Ángel tiene espacio para cinco autos. Como la casa es nueva, hasta ahora solo hay tres autos; el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el auto en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema del estacionamiento:

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Por ejemplo, Ángel puede estacionar su auto en el espacio número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen estacionar sus autos?

5. María y Josefina tienen cuatro láminas enumeradas del 1 al 4. Deciden repartírselas entre las dos (dos láminas para cada una). ¿De cuántas formas se las pueden repartir? Ejemplo: María puede quedarse con las láminas 1 y 2, y Carmen con las láminas 3 y 4.

6. En una caja hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos una bola de la caja y anotamos su número. La bola extraída se introduce en la caja. Se elige una segunda bola y se anota su número. La bola extraída se vuelve a introducir en la caja. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: se puede obtener el número 222.

Encuesta docentes de matemática en ejercicio.

Las siguientes preguntas y problemas tienen por objetivo identificar las dificultades que tienen los/as profesores/as con el contenido “métodos de recuento (combinaciones y permutaciones)” de segundo año medio.

III. Responda las siguientes preguntas respecto a su formación y labor docente.

1. En su formación universitaria ¿Le enseñaron los métodos de recuento?

- ☐ No
- ☐ Sí
- ☐ No lo recuerdo

2. En caso de su respuesta anterior sea “Sí”. ¿En qué asignatura fue tratada?

- ☐ Estadística
- ☐ Otra: ¿Cuál? _____

3. Indique, aproximadamente, la cantidad de años que lleva ejerciendo como docente de matemática:

4. Aproximadamente. ¿A cuántos cursos, en la educación escolar, ha tenido que enseñar métodos de recuento?

5. El último ajuste curricular, para segundo año medio, eje de probabilidad y estadística, propone tratar los contenidos de permutación y combinatoria.

¿Usted los enseña?

- ☐ No
- ☐ Sí

- Si su respuesta anterior fue “No”, escoja la alternativa que mejor describa por qué no lo ha enseñado:

- ☐ Falta de tiempo
- ☐ En la planificación del año escolar, no se considera tratar este contenido.
- ☐ Poco manejo del contenido.
- ☐ Otro. ¿Cuál? _____

6. En una escala del 1 al 5, siendo:

- 1 muy poco preparado/a
- 2 poco preparado/a
- 3 medianamente preparado/a
- 4 preparado/a
- 5 muy preparado/a

Escoja la opción que da respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué tan preparado/a se siente para enseñar métodos de combinatorios? _____

Justifique la opción escogida: _____

7. Según su experiencia. ¿Cuál(es) de las siguientes opciones identifica mejor las dificultades que enfrenta el profesor al enseñar métodos combinatorios en la escolaridad? Escoja como máximo dos.

- ☐ Falta de recursos donde se explique la parte teórica del contenido.
- ☐ Falta de recursos donde existan ejercicios y problemas.
- ☐ Falta de formación para los docentes para la enseñanza del contenido.
- ☐ Otra. ¿Cuál? _____

8. ¿Ha recibido algún tipo de apoyo (taller, especialización, seminario, capacitación, otros) para la enseñanza de los métodos combinatorios?

☐ No

☐ Sí Especifique: _____

9. Señale brevemente: ¿Cuál es la diferencia entre combinación y variación?

10. En el contexto de métodos combinatorios, señale brevemente ¿Qué significa que no importa el orden?

11. Según define el programa de estudio segundo medio, ministerio de educación, noviembre 2016: “Las habilidades son capacidades para realizar tareas y para solucionar problemas con precisión y adaptabilidad. Pueden desarrollarse en los ámbitos intelectual, psicomotriz o psicosocial.”, ¿Cuál(es) de las siguientes habilidades se podría(n) desarrollar con la enseñanza de métodos combinatorios?

☐ Resolver problemas

☐ Argumentar y comunicar

☐ Modelar

☐ Representar

IV. Resuelva los siguientes problemas dejando registro de la manera en la que lo hizo.

7. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, crema y dorado. Si cada sobre solo puede contener, a lo más, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el crema.

8. En una urna hay tres bolas marcadas con los números 2, 4 y 7. Extraemos una bola de la urna y anotamos su número. Sin devolver la bola extraída, se elige una segunda bola y se anota su número; y sin devolverla, se saca una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes podemos obtener? Ejemplo: el número 724.

9. Un grupo de cuatro amigos, Andrés, Benito, Clara y Daniel, tienen que realizar dos trabajos diferentes: uno de Matemáticas y otro de Lenguaje. Para realizarlo deciden dividirse en dos grupos de dos chicos cada uno. ¿De cuántas formas pueden dividirse para realizar los trabajos? Ejemplo: Andrés-Benito pueden hacer el trabajo de Matemáticas y Clara-Daniel el trabajo de Lengua.

10. El estacionamiento de Ángel tiene espacio para cinco autos. Como la casa es nueva, hasta ahora solo hay tres autos; el de Ángel, Beatriz y Carmen que pueden colocar cada día el auto en el lugar que prefieran, si no está ocupado. Este es el esquema del estacionamiento:

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

Por ejemplo, Ángel puede aparcarse su auto en el espacio número 1, Beatriz en el número 2 y Carmen en el número 4. ¿De cuántas formas posibles pueden Ángel, Beatriz y Carmen estacionar sus autos?

11. María y Josefina tienen cuatro láminas enumeradas del 1 al 4. Deciden repartírselas entre las dos (dos láminas para cada una). ¿De cuántas formas se las pueden repartir? Ejemplo: María puede quedarse con las láminas 1 y 2, y Carmen con las láminas 3 y 4.

12. En una caja hay cuatro bolas numeradas con los dígitos 2, 4, 7 y 9. Elegimos una bola de la caja y anotamos su número. La bola extraída se introduce en la caja. Se elige una segunda bola y se anota su número. La bola extraída se vuelve a introducir en la caja. Finalmente se elige una tercera bola y se anota su número. ¿Cuántos números de tres cifras podemos obtener? Ejemplo: se puede obtener el número 222.

Operacionalización de las variables.

Encuesta para estudiantes de pedagogía en matemática en educación media.

Área de formación escolar.	
Pregunta	“Dentro de tu enseñanza escolar, ¿Estuvieron presente los Métodos de Recuento? ¿De qué forma?”.
Método de análisis	Se definen los parámetros: • “No estuvieron presentes”: Manifiesta no haber recibido en su paso por la escolaridad los Métodos de Recuento. • “Estuvieron presentes de manera incompleta”: Manifiesta que si estudió Métodos de Recuento, pero de manera insatisfactoria. • “Estuvieron presentes de manera completa”: Manifiesta que si estudió Métodos de Recuento, de manera satisfactoria.

Área de formación inicial docente	
Pregunta	“Señale brevemente: ¿Cuál es la diferencia entre Combinación y Variación?”
Método de análisis	Se definen los parámetros: • “Menciona correctamente la diferencia utilizando el concepto de orden”: Manifiesta correctamente, de manera explícita, que la diferencia radica en el ordenamiento de los elementos de los subconjuntos a configurar. • “Menciona correctamente la diferencia, pero no explícitamente”: Manifiesta correctamente la diferencia utilizando explícitamente otro concepto diferente a orden. • “Contesta erróneamente”: Declara una respuesta errónea en cualquiera de sus sentidos.
Pregunta	“En el contexto de Métodos de Recuento, señale brevemente ¿Qué significa que no importa el orden?”
Método de análisis	Se definen los parámetros:

	• “Comprende la definición y logra explicarla correctamente”: Manifiesta una respuesta correcta, y explica la definición a través de lenguaje matemático, natural, o ejemplos que posteriormente son descritos. • “Comprende la definición pero no logra explicarla correctamente”: Manifiesta una respuesta incompleta que demuestra una correcta comprensión del concepto, más no, una correcta explicación, esto por no poseer el lenguaje matemático o natural requerido, o por utilizar ejemplos correctos, pero no describirlos para la respuesta. • “Responde erróneamente”: Manifiesta una respuesta que está errónea en elementos fundamentales de la definición.
--	---

Área futura labor docente		
Preguntas	“En una escala del 1 al 5, siendo 1 muy poco preparado/a, 2 poco preparado/a, 3 medianamente preparado/a, 4 preparado/a, y 5 muy preparado/a. Escoja la opción que da respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué tan preparado/a se siente para enseñar Métodos de Recuento? Justifique la opción escogida”	“(…) ¿Cuál(es) de las siguientes habilidades se podría(n) desarrollar con la enseñanza de métodos combinatorios?: Resolver Problemas, Argumentar y Comunicar, Modelar, y Representar”.
Método de análisis	Por una parte se determinó el porcentaje de respuesta para cada nivel de preparación, y de elección de habilidad. Además se describieron cuatro parámetros para la justificación de elección de nivel de preparación: 1. “Buen aprendizaje”: Manifiesta que su respuesta se debe al buen aprendizaje que ha obtenido en sus diferentes experiencias académicas. 2. “Mal aprendizaje”: Manifiesta que su respuesta se debe al mal aprendizaje que ha obtenido en sus diferentes experiencias académicas, tanto por vacíos o déficit en dichos lugares, como por desempeño personal. 3. “Obstáculo específico: Didáctica del tema”: Manifiesta la falta de didáctica para la enseñanza del contenido como argumento para su respuesta. 4. “Obstáculo específico: Problema con la elección de Método Combinatorio a utilizar”: Manifiesta el problema específico de confusión al momento de escoger un Método Combinatorio, como argumento para su respuesta.	

Encuesta de docentes de matemática de educación media.

Área de formación inicial docente	
Pregunta	“En su formación universitaria ¿Le enseñaron Métodos de Recuento?”
Método de análisis	Cálculo de porcentajes por respuesta positivas y negativas.
Pregunta	- “Señale brevemente: ¿Cuál es la diferencia entre Combinación y Variación?” - “En el contexto de Métodos de Recuento, señale brevemente ¿Qué significa que no importa el orden?”
Método de análisis	Se analizan utilizando la misma clasificación y procedimiento que en la encuesta de estudiantes de pedagogía en matemática.

Área de docencia	
Preguntas	- “El último ajuste curricular, para segundo año medio, eje de probabilidad y estadística, propone tratar los contenidos de permutación y combinatoria. ¿Usted los enseña?, si su respuesta anterior fue “No”, escoja la alternativa que mejor describa por qué no lo ha enseñado: Falta de tiempo, En la planificación del año escolar no se considera tratar este contenido, Poco manejo del contenido, Otro” - “Según su experiencia. ¿Cuál(es) de las siguientes opciones identifica mejor las dificultades que enfrenta el profesor al enseñar métodos combinatorios en la escolaridad? Escoja como máximo dos: Falta de recursos donde se explique la parte teórica del contenido, Falta de recursos donde existan ejercicios y problemas, Falta de formación para los docentes para la enseñanza del contenido, Otra. ¿Cuál?” - ¿Ha recibido algún tipo de apoyo (taller, especialización, seminario, capacitación, otros) para la enseñanza de los métodos combinatorios? En caso positivo, especifique.
Método de análisis	Cálculo de porcentaje de respuesta, en base a las opciones de cada una.

Preguntas	- “En una escala del 1 al 5, siendo 1 muy poco preparado/a, 2 poco preparado/a, 3 medianamente preparado/a, 4 preparado/a, y 5 muy preparado/a. Escoja la opción que da respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué tan preparado/a se siente para enseñar métodos de combinatorios? Justifique la opción escogida” - “(...) ¿Cuál(es) de las siguientes habilidades se podría(n) desarrollar con la enseñanza de métodos combinatorios?: Resolver Problemas, Argumentar y Comunicar, Modelar, y Representar”.
Método de análisis	Se analiza de la misma manera que en la encuesta de estudiantes de pedagogía de matemática.

Como se mencionó, el área de habilidades de Métodos Combinatorios es igual en ambas encuestas, por lo que el análisis se desarrollará de la misma manera, tal y como se detalla a continuación.

Área de habilidades de Métodos Combinatorios.	
Análisis por representaciones	Se realiza un análisis de las representaciones utilizadas para la resolución de los ejercicios, independiente si la respuesta está correcta o no. Las representaciones se clasifican en: 1. Casillas: Resuelve el ejercicio utilizando casillas. 2. Diagrama de árbol: Resuelve el ejercicio utilizando un digrama de árbol. 3. Fórmula: Resuelve el ejercicio utilizando la fórmula correspondiente al Método Combinatorio escogido. 4. Lenguaje natural: Resuelve el ejercicio utilizando un razonamiento combinatorio que deja explícito con lenguaje natural. 5. Dibujos: Resuelve el ejercicio manifestando a través de dibujos todos o la mayoría de las configuraciones pedidas.
Análisis por errores	Se realiza un análisis de los resultados en relación con los errores que se cometen. Esto según se indica en Navarro-Pelayo, Batanero, y Godino, “Razonamiento combinatorio el alumnos de secundaria” (1996), donde se identifican en las soluciones de los alumnos pertecientes a la muestra errores que se clasifican como se muestra a continuación:

	E1: Cambiar el tipo de modelo matemático en el enunciado del problema: Por ejemplo, cambiar un problema de selección por un problema de partición. E2: Error de orden: Confundir los criterios de combinaciones y variaciones; es decir, considerar el orden de los elementos cuando es irrelevante o, al contrario, no considerar el orden cuando es esencial. E3: Error de repetición: El alumno no considera la posibilidad de repetir los elementos cuando esto es posible o repite los elementos cuando no es posible hacerlo. E4: Confundir el tipo de objetos: Considerar objetos idénticos cuando son distinguibles o que objetos diferentes son indistinguibles. E5: Enumeración no sistemática: Este tipo de error fue descrito por Fischbein y Gazit (1988), y consiste en resolver el problema por enumeración, mediante ensayo y error, sin un procedimiento recursivo que lleve a la formación de todas las posibilidades. E6: Respuesta intuitiva errónea: Los alumnos solo dan una solución numérica errónea, sin justificar la respuesta. E7: No recordar la fórmula correcta de la operación combinatoria que ha sido identificada correctamente. E8: No recordar el significado de los valores de los parámetros en la fórmula combinatoria. E9: Interpretación errónea del diagrama en árbol. Errores adicionales, específicos de los problemas de colocación y partición E10: Confusión en el tipo de celdas (tipo de subconjuntos): Es decir, creer que podríamos distinguir celdas (subconjuntos) idénticas o que no es posible diferenciar las celdas (subconjuntos) distinguibles. E11: Error en las particiones formadas. Esto puede ocurrir en los dos siguientes casos. a) La unión de todos los subconjuntos en una partición no contiene a todos los elementos del conjunto total. b) Olvidar algunos tipos posibles de partición.
--	---

Formato actividades

Se debe tener en consideración de acuerdo con el formato para las actividades de Motivación, lo siguiente:

- **Nombre:** A cada actividad se le asigna un nombre de fantasía llamativo.
- **Tiempo:** Se terminó un tiempo estimado basado en la experimentación y creación de las actividades.
- **Disposición de estudiantes:** Se propone una disposición de los y las estudiantes que será utilizada para la propuesta de actividad, pero puede ser flexible.
- **Materiales:** Se propone la utilización de cierto material específico, pero se mencionan propuestas de opciones en caso de no poder contar con lo solicitado.
- **Objetivo de aprendizaje:** Se manifiesta el objetivo de aprendizaje de acuerdo con las Bases Curriculares de 2do año medio.
- **Habilidad:** Se manifiestan las habilidades que se logran desarrollar con las actividades, de acuerdo con las Bases Curriculares de 2do año medio.
- **Actitud:** Se manifiestan las actitudes que se logran desarrollar con las actividades, de acuerdo con las Bases Curriculares de 2do año medio.
- **Instrucción del juego:** Presente en las actividades de Motivación del tipo “Juego de ingenio”, se detallan las instrucciones del juego en la que se basará la actividad.
- **Situación:** Presente en las actividades de Motivación del tipo “Situaciones problemáticas o Acertijos, se detalla la situación en la que se basará la actividad.
- **Respuesta:** Presente en las actividades de Motivación del tipo “Situaciones problemáticas o Acertijos, se detalla la respuesta a la situación en la que se basará la actividad.
- **Descripción de la actividad:** Se describe una propuesta de actividad utilizando el “Juego de ingenio” o “Situación problemática o Acertijo”, la que el o la docente puede seguir para la aplicación de ésta.

Para las actividades denominadas como “Desarrollo de clase”, las que se desarrollan a través del uso de material concreto, se continua con el formato de las actividades de “Motivación”, pero no se describe un juego o instrucciones previo a la descripción de actividad. A su vez, las actividades que se desarrollan a través del uso del recurso TIC LABAPC, también

continúan con el formato anteriormente mencionado, pero haciendo explícito la actividad o recurso web utilizado. A su vez, en las actividades que se desarrollan a través del uso del juego “MasterMind”, se describe previo a la descripción de la actividad el detalle de las instrucciones particulares del juego.

De Resultados y Análisis

A continuación se detallan los anexos al capítulo de Resultados y Análisis.

Resultados encuestas

De la encuesta estudiantes de pedagogía en matemática de educación media.

A continuación se especifican los resultados relevantes por área, en base a los parámetros especificados en el Marco Metodológico.

Área de formación escolar.

Frente a la pregunta, “Dentro de tu enseñanza escolar, ¿Estuvieron presente los métodos de recuento? ¿De qué forma?”, se encuentra que un 67% de los encuestados no estudió métodos combinatorios en su enseñanza escolar formal. De quienes manifiestan haberlos recibido, es decir 33%, un 18% manifiesta que la enseñanza fue realizada de manera incompleta.

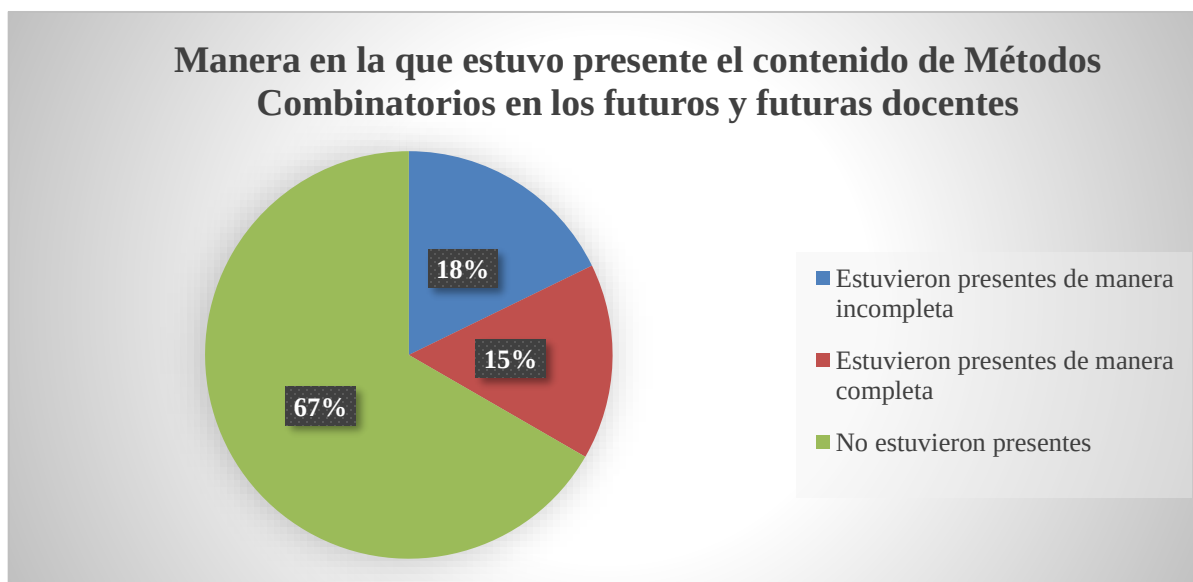


Gráfico 1, fuente: Elaboración propia

Área de formación inicial docente.

Frente a la pregunta “Señale brevemente: ¿Cuál es la diferencia entre combinación y variación?”, un 91% responde correctamente utilizando explícitamente el concepto de orden, un 7% de los encuestados responde correctamente utilizando otro concepto, no explícito de orden, y solo un 2% responde erróneamente.

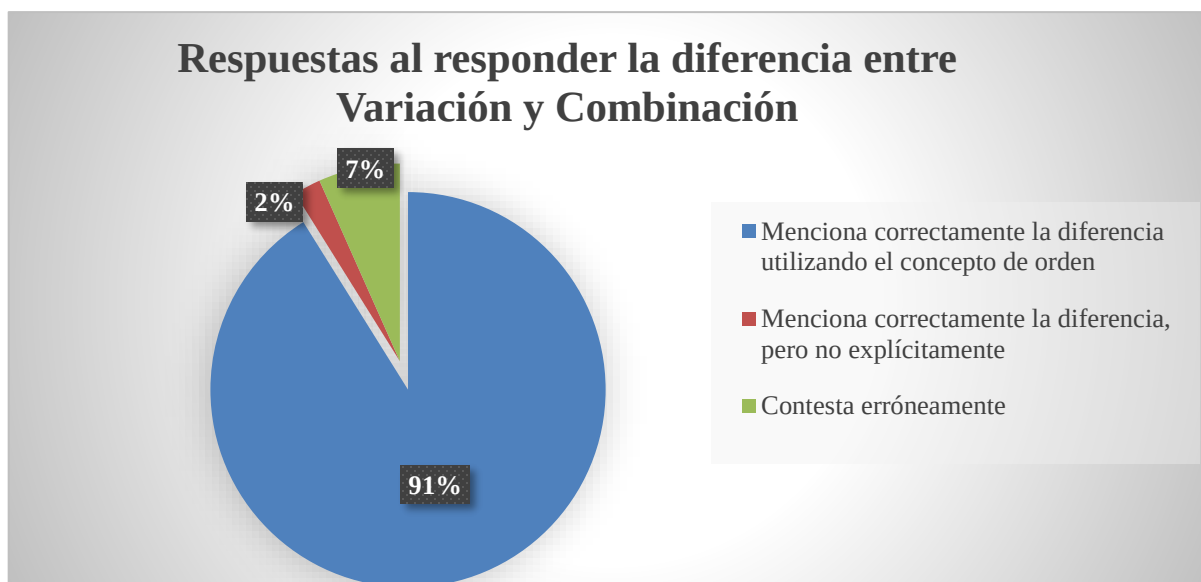


Gráfico 2, fuente: Elaboración propia

Por otra parte, en cuanto a la pregunta “En el contexto de métodos combinatorios, señale brevemente ¿Qué significa que no importa el orden?”, existe un 27% de los futuros y futuras docentes que comprenden la definición y logran explicarla correctamente, en cambio, un 58% a través de su respuesta muestra comprender la definición pero no logra explicarla correctamente. Finalmente un 15% de las respuestas son erróneas en aspectos fundamentales. En conclusión, se puede aseverar que un 85% de los encuestados comprende la definición sobre la importancia, o no, del orden, en el contexto de Métodos Combinatorios, pero solo un 27% es capaz de explicarla correctamente. Así como se resume en el gráfico a continuación.

Logro de respuesta al definir la importancia del orden, en el contexto de Métodos Combinatorios de los y las estudiantes.

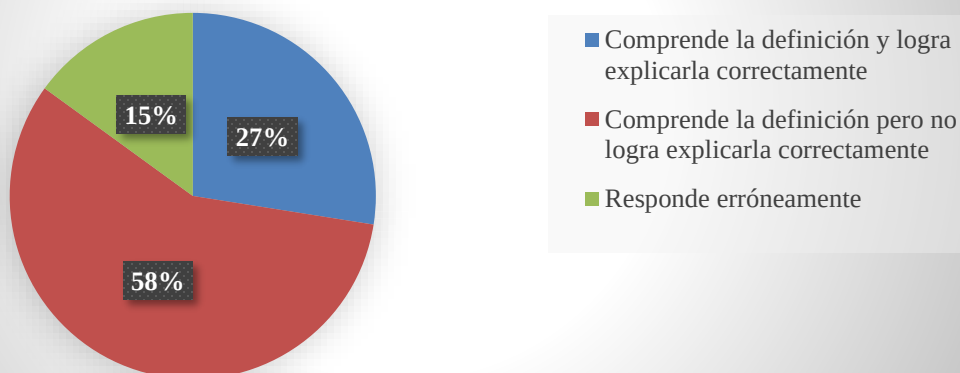


Gráfico 3, fuente: Elaboración propia

Así es como se determina que, aunque el 91% de los y las estudiantes menciona explícitamente que la diferencia entre Variación y Combinación está determinada por el orden de los elementos, solo un 27% comprende el concepto y es capaz de definirlo correctamente. En cambio, el 58% lo comprende pero no lo logra explicar de manera adecuada.

Área futura labor docente.

Esta área está compuesta por dos preguntas. En cuanto a la primera “(...) ¿Qué tan preparado/a se siente para enseñar métodos de combinatorios? Justifique la opción escogida”, las respuestas son disímiles. Los porcentajes más altos de preparación que sienten los y las estudiantes encuestados son: Preparado/a y Medianamente preparado/a. La primera opción cuenta con un 36% de elección, la segunda con un 35%, y le sigue a esta, con un 18%, la elección de Poco Preparado/a. Los extremos, tanto superior como inferior de opciones de la encuesta, son los menos escogidos por los futuros y futuras docentes. Por otra parte, solo un 9% se considera Muy preparado, y un 2% muy poco preparado para la enseñanza de los Métodos Combinatorios. Así lo muestra el gráfico a continuación.

Nivel de preparación para la enseñanza de Métodos Combinatorios que sienten los futuros docentes de matemática

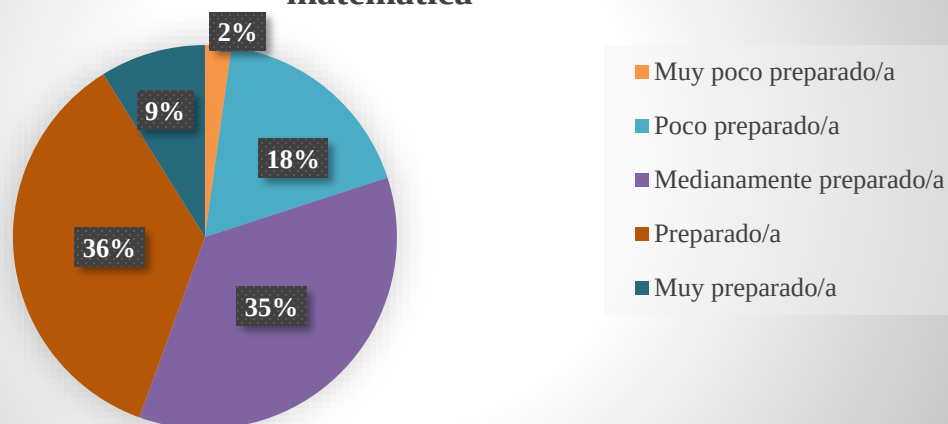


Gráfico 4, fuente: Elaboración propia

A su vez, en la justificación a esta elección, un 36% lo atribuye al buen aprendizaje que ha obtenido mediante la educación formal, tanto escolar como universitaria, y su proceso individual, en cambio, hay un 24% de estudiantes que atribuyen su preparación para la enseñanza de los Métodos Combinatorios al mal, o débil aprendizaje que obtuvieron en dichas instancias. A su vez, existe un 24% que menciona que la elección se debe al problema específico de la elección de Método Combinatorio a escoger, en particular, si importa o no el orden, y la dificultad que esto les conlleva. Por último el 16% de los estudiantes encuestados lo atribuye al obstáculo específico de la didáctica para la enseñanza de Métodos Combinatorios.

Justificación para la elección del nivel de preparación para la enseñanza de Métodos Combinatorios

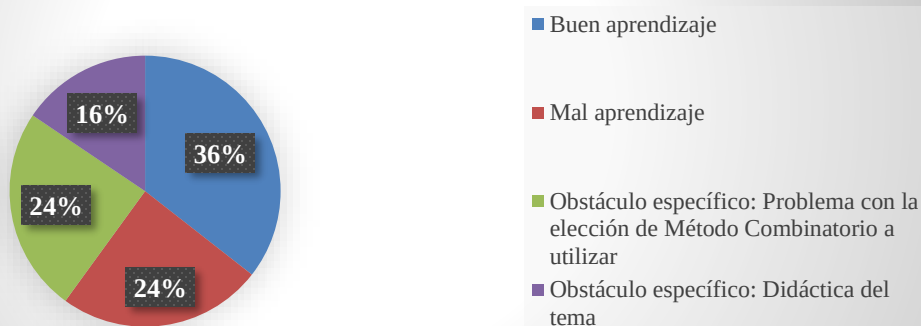


Gráfico 5, fuente: Elaboración propia

En segundo lugar se encuentra la pregunta, “(...) ¿Cuál(es) de las siguientes habilidades se podría(n) desarrollar con la enseñanza de métodos combinatorios?: Resolver Problemas, Argumentar y Comunicar, Modelar, y Representar”, donde se observa que del total de los 44 estudiantes encuestados, 41 considera que la habilidad de Resolver Problemas puede desarrollarse a través de la enseñanza de Métodos Combinatorios. Por otra parte, las habilidades de Argumentar y Comunicar, y Modelar, tienen una elección de 34 y 31 estudiantes respectivamente. Para finalizar, se encuentra en último lugar de elección la habilidad de Representar, con 27 de estudiantes que la seleccionan.

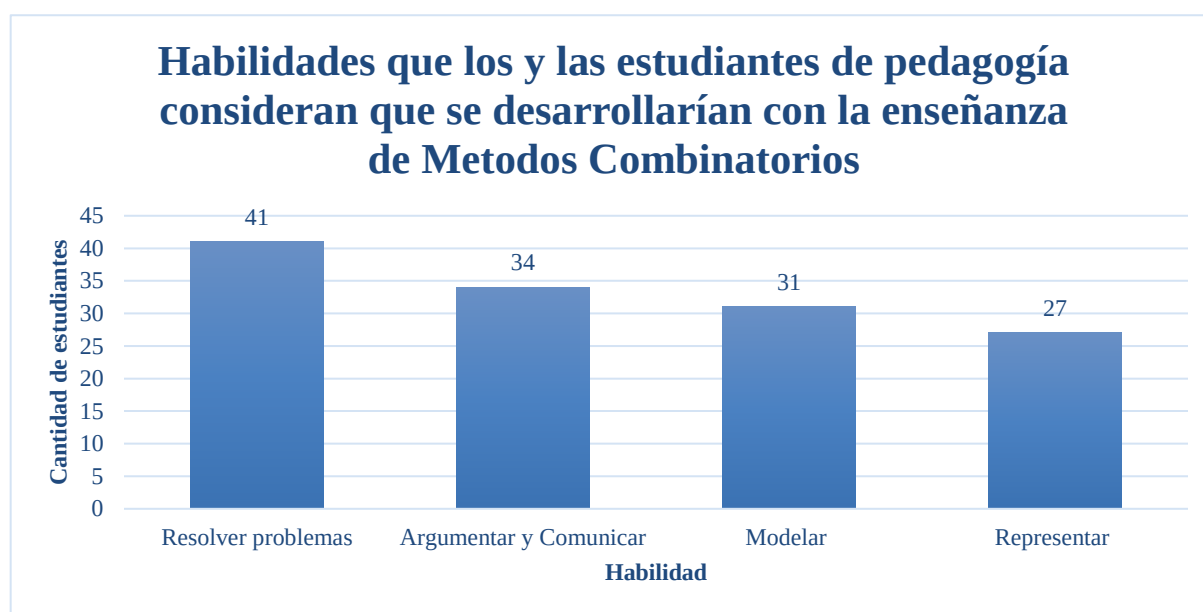


Gráfico 6, fuente: Elaboración propia

De la encuesta docentes de matemática de educación media

A continuación se especifican los resultados relevantes por área, en base a los parámetros especificados en el Marco Metodológico.

Área formación inicial docente

En esta área se encuentra primero la pregunta “En su formación universitaria ¿Le enseñaron los métodos de recuento?”, donde un 78,6% afirma haber recibido la enseñanza de Métodos Combinatorios en su formación, específicamente en áreas relacionadas con la estadística, esto frente al 21,4% que menciona no haberla recibido.

Posterior a esto se encuentran las preguntas “Señale brevemente: ¿Cuál es la diferencia entre Combinación y Variación?”, y “En el contexto de Métodos de Recuento, señale brevemente ¿Qué significa que no importa el orden?”.

En cuanto la primero se obtiene que un 87% de los docentes mencionan correctamente la diferencia haciendo uso explícito del concepto de orden, frente al 13% restante que contesta erróneamente.

Las respuestas de la segunda pregunta se resumen en el siguiente gráfico:

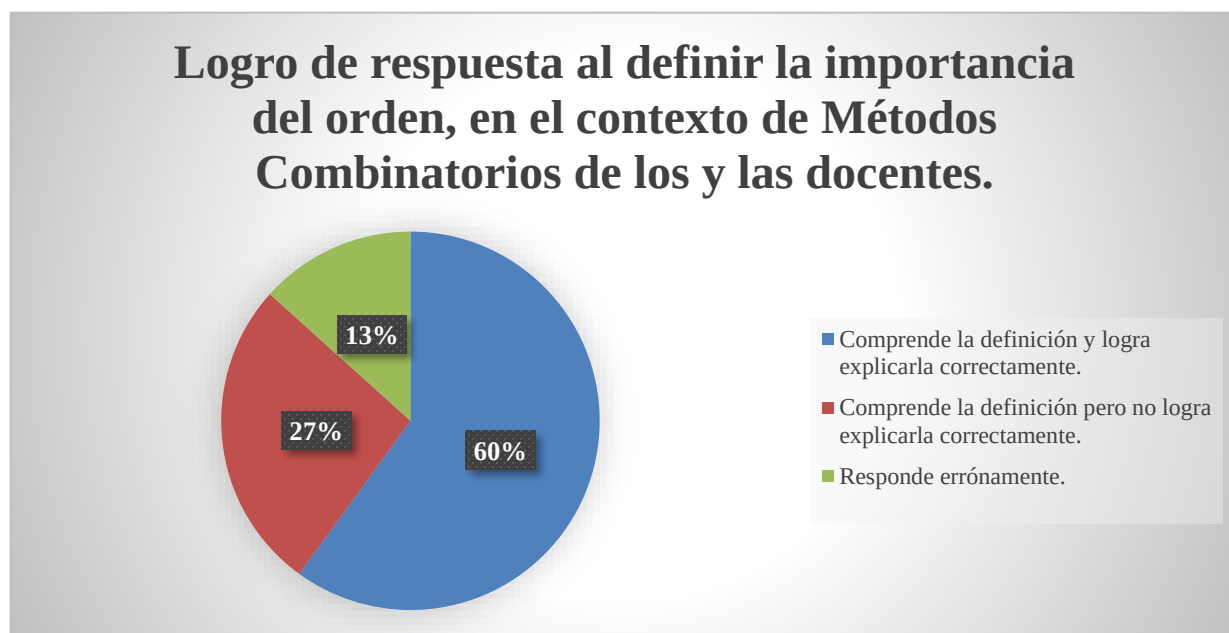


Gráfico 7, fuente: elaboración propia.

Donde se observa que más de la mitad de los y las docentes comprende la definición y logra explicarla correctamente, esto frente a un 27% que pese a comprender la definición no logra explicarla de manera adecuada. Finalmente existe un 13% que contesta erróneamente.

Área docencia

En esta área se identifica, en base a la pregunta, que los y las docentes encuestadas, en su mayoría si enseñan Métodos Combinatorios, dado que un 78,6% así lo afirma. En otra perspectiva el 21,4% restante no lo enseña principalmente por no estar planificado en el año escolar, o debido a falta de tiempo, se ha descartado la enseñanza del contenido.

Por otra parte, de los aspectos más relevantes evidenciados en esta área se encuentra primero la pregunta sobre el nivel de preparación que sienten los y las docentes para la

enseñanza de Métodos Combinatorios. Se encuentra que, el nivel más bajo de preparación que sienten los docentes es Medianamente preparado, el cual tiene solo un 27% de preferencia, por otra parte la mayoría de los y las docentes se siente Muy Preparados/as para la enseñanza de Métodos Combinatorios, y un 33% siente tener un nivel de Preparado/a para ello. Nadie manifiesta sentirse ni Muy poco preparado/a, ni Poco preparado/a para la enseñanza de Métodos Combinatorios. Así se muestra en el gráfico adjunto.

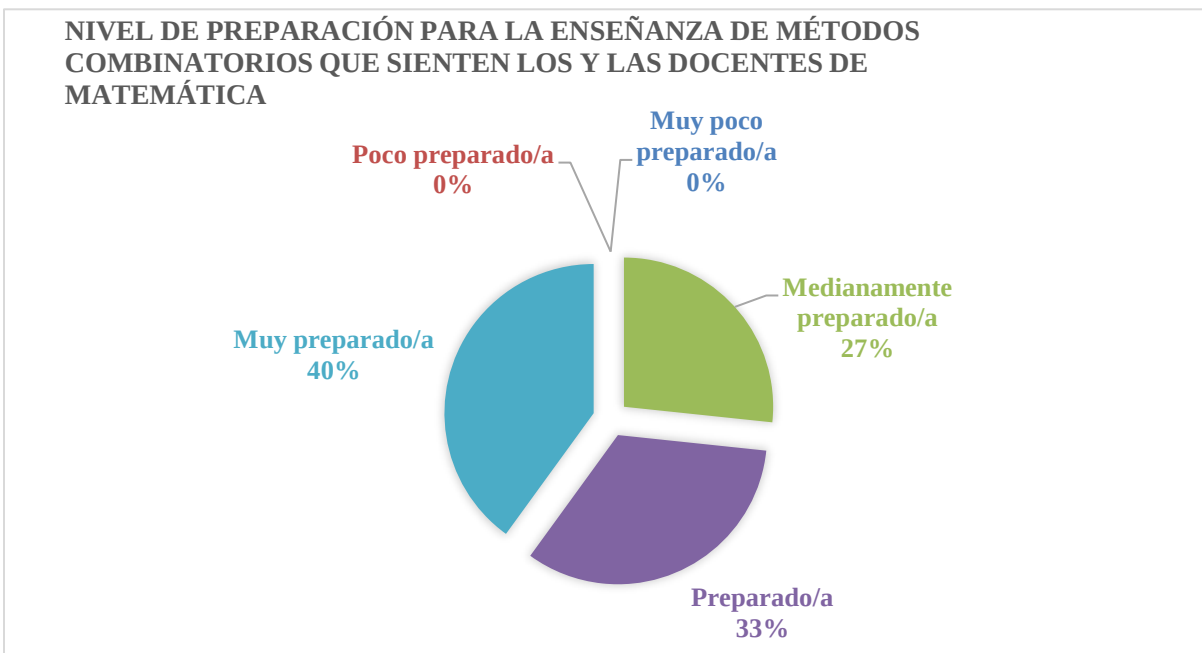


Gráfico 8, fuente: Elaboración propia.

En cuanto a la justificación al nivel de preparación escogido, el 47% de los y las docentes le atribuye de manera positiva dicha elección al buen aprendizaje recibido en su formación inicial docente y la formación continua. Por el contrario, un 29% le atribuye su justificación de modo negativa al déficit en la didáctica para la enseñanza de Métodos Combinatorios, y de la misma manera es que un 18% se lo atribuye al mal o débil aprendizaje que obtuvieron en las instancias de aprendizajes formales obtenidas a lo largo de su formación. El 6% restante se lo atribuye al obstáculo específico de la dificultad en la elección de Método Combinatorio a utilizar.

Finalmente, en esta área se encuentra la pregunta “(...)Cuál(es) de las siguientes opciones identifica mejor las dificultades que enfrenta el profesor al enseñar métodos combinatorios en la escolaridad? (...)”, la información se ha resumido en el siguiente gráfico.

Principales dificultades que declaran enfrentar los y las docentes al momento de enseñar Métodos Combinatorios

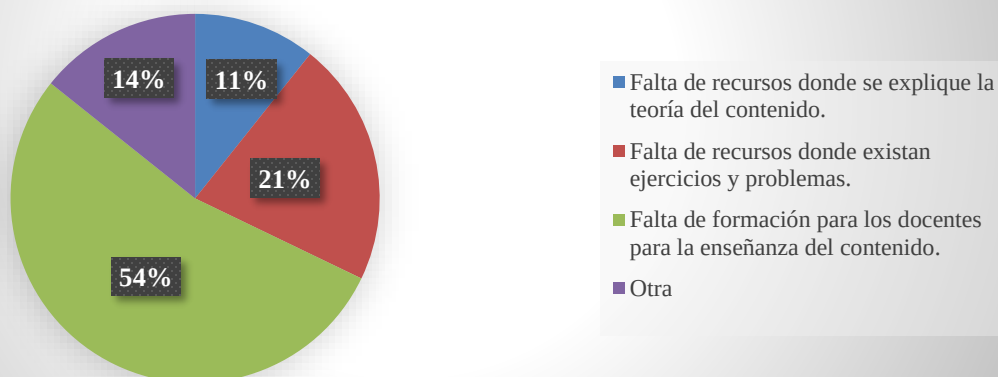


Gráfico 9, fuente: Elaboración propia.

Se observa que más de la mitad de los y las docentes detecta como dificultad la falta de formación para la enseñanza del contenido, seguido por la falta de recursos donde existan ejercicios y problemas acordes a la enseñanza. En cuanto a la elección de “Otra” dificultad, los y las docentes que la escogen mencionan que la dificultad en la enseñanza de Métodos Combinatorios tiene múltiples dimensiones, un ejemplo de esto se encuentra en la siguientes respuestas:

- “La combinatoria tiene una complejidad intrínseca. Hay variadas técnicas de conteo que requieren razonamientos sofisticadas y poco usuales en matemáticas para su comprensión profunda”
- “El desinterés de los docentes, falta de compromiso en términos de la calidad de los aprendizajes que se desarrollan, formación académica, entre otras”

La primera respuesta hace referencia a una complejidad misma de la Combinatoria, en cuanto al razonamiento que esta requiere, y la segunda menciona por problemática un desinterés por parte de los docentes que perjudica la calidad de aprendizajes que los estudiantes reciben.

Por otra parte, en esta área se encuentra la pregunta, “(...) ¿Cuál(es) de las siguientes habilidades se podría(n) desarrollar con la enseñanza de métodos combinatorios?: Resolver Problemas, Argumentar y Comunicar, Modelar, y Representar”, donde se observa que de los 15 docentes encuestados, 13 considera que la habilidad de Resolver Problemas puede desarrollarse

a través de la enseñanza de Métodos Combinatorios, a su vez 10 docentes seleccionan que las habilidades de Argumentar y Comunicar, y Modelar. Finalmente, en último lugar de elección se posiciona la habilidad de Representar, con 9 de 15 docentes que la consideran.

Además, se encuentra la información acerca de que 11 de los 15 encuestados manifiesta no haber recibido ningún tipo de apoyo para la enseñanza de Métodos Combinatorios, quienes si la obtuvieron fue mediante estudios de postgrado.

Resumen de actividades.

Las actividades que se presentan a continuación son propuestas para el trabajo en clases para la enseñanza de Métodos Combinatorios, tanto en el inicio como en el desarrollo. Estas son propuestas flexibles, que pueden ser modificadas acorde al contexto del grupo curso, tanto en materiales como en la metodología de aplicación.

No se proponen ejercicios para resolver, sino que se proponen juegos, desafíos, situaciones diversas, algunas utilizando material concreto, que permiten desarrollar el Razonamiento Combinatorio en estudiantes de 2º medio.

A continuación se presenta un resumen de los aspectos más relevantes de la propuesta de actividades, el detalle y otras características se encuentran en el Anexo.

Motivación

Las actividades propuestas denominadas como “Motivación” de clase son más que solo para ser utilizadas como un momento individual al inicio de la clase, así como mencionan Alfaro Valverde y Chavarría Chavarría (2002) la motivación se convierte en el motor de una lección, y por lo tanto, como describe Nérici (1991) motivar es predisponer al alumno hacia lo que se quiere enseñar; es llevarlo a participar activamente en los trabajos escolares. Así pues, la motivación en el plano pedagógico significa proporcionar motivos, es decir, estimular la voluntad de aprender. (Alfaro Valverde & Chavarría Chavarría, 2002), y no debe quedar solo en la actividad inicial, si no que ser llevada a cabo a lo largo de la lección.

Juegos

1. Tabla n°1, elaboración propia

Nombre: “El círculo de monedas”

Habilidades: Argumentar y Comunicar.

Resumen actividad: En el juego se disponen 6 monedas por jugador de manera junta, sin dejar espacio entre ellas, formando un círculo. El juego consiste en sacar monedas del círculo, el jugador que saque la o las últimas monedas del círculo ganará. Los jugadores se turnan para sacar una o dos monedas, pero si se sacan dos, éstas deben estar una junto a otra, sin que haya entre ellas ninguna otra moneda o espacio vacío. Se le propone a los y las estudiantes jugar 2 ó 3 veces.

Preguntas Orientadoras:

- ¿Qué se debe hacer para asegurarse de ganar el juego?
- ¿Es difícil pensar en todas las opciones que tienen los compañeros y compañeras?
- ¿Si el grupo es de dos, es más fácil pensarlo que de cuatro?, ¿Por qué?

2. Tabla n°2, elaboración propia

Nombre: “Sumar 15”

Habilidades: Argumentar y Comunicar.

Resumen actividad: Para comenzar el juego, en la pizarra o cuaderno se escriben los números del 1 al 9. Por turnos los participantes deberán escoger un número, y se queda con él, es decir, se saca de la lista. Ganará el primer jugador que logre sumar 15 con tres números de los escogidos. Se le propone a los y las estudiantes jugar 2 ó 3 veces.

Preguntas Orientadoras:

- ¿Qué se debe hacer, para asegurarse de ganar el juego?
- ¿Es difícil pensar en todas las opciones para sumar 15 que el compañero o compañera tiene?, ¿Por qué?

Acertijos

3. Tabla n°3, elaboración propia

Nombre: “El sexteto de dados, ¿Juego justo o injusto?”

Habilidades: Argumentar y Comunicar.

Resumen actividad: Se le presenta a los y las estudiantes la siguiente situación: En este juego hay dos secciones, el jugador o jugadora lanza seis dados, en la sección “A” gana si obtiene las seis caras de los dados con números diferentes y en la sección “B” gana si se obtiene dos números iguales y el resto diferentes. ¿Es este juego injusto en la sección “A”, por qué? ¿Es este juego injusto en la sección “B”, por qué?

Preguntas Orientadoras:

- ¿Qué les hace pensar que el juego es o no justo?
- ¿De qué manera podemos representar la situación para buscar una solución a la problemática?

4. Tabla n°4, elaboración propia

Nombre: “¿Cómo cruzar el río?”

Habilidades: Argumentar y Comunicar.

Resumen actividad: Se le presenta a los y las estudiantes la siguiente situación: Homero Simpson tuvo que ir a comprar veneno con su hija Maggie y Ayudante de santa, su perro. Al volver se pierde, y debe cruzar en bote un río para llegar a su destino. El problema es que, si el perro se queda solo con Maggie la morderá, y si ella se queda sola con el veneno se lo comerá. ¿Cómo podrá cruzar el río, si en el bote solo puede ir Homero y uno de los

Preguntas Orientadoras:

- ¿Cuál es la dificultad que enfrenta Homero?
- ¿Qué hay que pensar para poder solucionar el problema?
- ¿De qué maneras se puede representar las soluciones de la situación?

“objetos” ?, ¿Cuál es el número mínimo de viajes que deberá hacer?	- ¿Hay más de una forma para que Homero realice una cantidad mínima de viajes?
--	--

Desarrollo

Las actividades que se proponen para el “Desarrollo de la clase”, para la enseñanza de Métodos Combinatorios en segundo año medio son actividades pensadas para que el estudiante comience y construya su aprendizaje, así como se menciona en Dueñas, y otros (2018) esta parte de la clase va, para el estudiante, desde su primer acercamiento con el contenido, hasta la capacidad de aplicarlo.

Para el correcto desarrollo de estas actividades, es primordial como aprendizaje previo, que los estudiantes conozcan el principio multiplicativo y aditivo.

Actividades para el contenido de Permutación

1. Tabla n°5, elaboración propia

<u>Nombre:</u> “Pasteleros y pasteleras: Permutar con Policubos” <u>Habilidades:</u> Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar.	
<u>Resumen actividad:</u> Se le presenta a los y las estudiantes dos situaciones que deberán resolver con policubos.	<u>Preguntas Orientadoras:</u> Se presentan preguntas orientadoras por situación.
Primera situación “Se debe determinar el orden de los sabores de una torta para la celebración del aniversario del colegio. Esta tiene tres pisos, cada uno con un sabor distinto, se deben distribuir entre: frambuesa, crema pastelera y menta. Se nos solicita describir cuantas diferentes tortas se podrían construir, teniendo en cuenta que el diferente orden de los sabores determina una torta distinta. El piso de frambuesa está identificado por el color rojo, el de crema pastelera por color amarillo, y el de menta por verde.”	Preguntas Orientadoras primera situación - ¿Cuál es la mayor cantidad de tortas distintas que se pueden construir con tres sabores? - ¿Por qué son estas, todas las tortas que se pueden construir? - ¿Existe otra forma para representar las cantidad de tortas que se pueden construir?

Segunda situación “La directora se ha olvidado del sabor favorito de los estudiantes, el chocolate, que se representa con el color café. Por lo que se solicita, nuevamente, determinar la mayor cantidad de tortas que se pueden cocinar, esta vez, con los cuatro sabores, sin repetir ninguno.”	Preguntas Orientadoras segunda situación - ¿Cuál es la mayor cantidad de tortas distintas que se pueden cocinar con los cuatro sabores? - ¿Por qué son estas, todas las tortas que se pueden construir? - ¿Existen otras forma para representar y determinar la cantidad de tortas que se pueden preparar? - Si ahora fueran cinco sabores, ¿Habrá más cantidad de tortas posibles?, ¿De qué manera podrías resolver la problemática?
--	---

2. Tabla n°6, elaboración propia.

<u>Nombre:</u> “Mastermind: Adivina el código” <u>Habilidades:</u> Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar.	
<u>Resumen actividad:</u> Se les explica a los y las estudiantes la metodología e instrucciones del juego Mastermind, las que son las siguientes: En un sector se dispone un espacio para que, de manera secreta, un jugador cree un código, en este caso, con cuatro colores, que se pueden repetir o no según lo que disponga el moderador o	<u>Preguntas Orientadoras:</u> - ¿Qué estrategias utilizaron para intentar ganar el juego? - Con la cantidad de filas disponibles para los

moderadora. A continuación, el otro jugador, el descifrador, intentará descifrar el código, esto poniendo intentos en la sección de cuatro agujeros horizontales. Para ir avanzando y logrando determinar el código, el jugador que lo creó le dará pistas a través de fichas color rojo o blanco, que se dispondrán al costado de cada intento, de manera general, de la siguiente forma:

- No se pondrá ninguna ficha, si ninguno de los colores dispuestos por el descifrador coincide con el código creado.
- Se pondrá una ficha color blanco, por cada ficha de color correcto que haya dispuesto el descifrador.
- Se pondrá una ficha color, rojo por cada ficha que haya dispuesto el descifrador con el color, y la posición correcta.

El descifrador no sabrá cuál de sus fichas dispuestas es correcta, tanto en color como en posición. Este contará con una cantidad máxima de intentos, que estará determinada por el tablero. Ganará el descifrador si logra determinar correctamente el código en el número de intentos máximos, en caso contrario gana el otro jugador. En esta oportunidad la clave de cuatro dígitos, solo se desarrolla con cuatro colores, los que no se pueden repetir, con un total de 8 filas para lograr adivinar.

intentos, ¿Se podrá ganar sí o sí el juego?

- ¿Cuántas filas debería haber para asegurar que se va a ganar, sí o sí?, ¿y si el código a descifrar fuera de cinco colores sin repetirse?
- Lo anterior, ¿Se puede generalizar para cualquier número de colores?
- ¿De qué otra manera se puede representar la cantidad de claves que se pueden formar con los cuatro colores?, ¿y con cinco?

Actividades para el contenido de Variación

Las actividades que aquí se presentan, siguen un orden lógico con las de permutación, es decir, se sugiere antes de utilizar estas actividades, aplicar las actividades de permutación, o haber estudiado permutación.

1. Tabla n°7, elaboración propia.

<u>Nombre:</u> “Pasteleros y pasteleras: Permutar con Policubos”	
<u>Habilidades:</u> Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar.	
<u>Resumen actividad:</u> Se le presenta a los y las estudiantes dos situaciones que se proponen resolver con policubos.	<u>Preguntas Orientadoras:</u> Se presentan preguntas orientadoras por situación.
Primera situación “Debemos determinar los sabores de la torta para la celebración del aniversario del colegio, y el orden en los que se encontrarán. Esta torta tiene dos pisos, cada uno con un sabor distinto, se deben distribuir entre: frambuesa, crema pastelera y chocolate. Se nos solicita describir cuantas diferentes tortas se podrían construir, teniendo en cuenta que, el diferente orden de los sabores determina una torta distinta. El piso de frambuesa está determinado por el color rojo, el de crema pastelera por color amarillo, y el de chocolate por café.”	Preguntas orientadoras primera situación - ¿Cuál es la mayor cantidad de tortas distintas que se pueden construir con tres sabores? - ¿Por qué son estas, todas las tortas que se pueden construir? - ¿Existe otra forma para representar las cantidad de tortas que se pueden construir?

Segunda situación	Preguntas orientadoras segunda situación
“La directora se ha olvidado del sabor favorito de los profesores, la menta, que se representa con el color verde. Por lo que se solicita, nuevamente, determinar la mayor cantidad de tortas que se pueden cocinar, siguiendo con dos pisos, y sin repetir los sabores.”	- ¿Cuál es la mayor cantidad de distintas tortas de dos pisos que se pueden cocinar con los cuatro sabores, sin repetir ningún sabor?, ¿Por qué? - ¿Existen otras formas para representar y determinar la cantidad de tortas que se pueden preparar? - ¿Por qué la cantidad de tortas es menor a cuando ordenamos los mismos cuatro sabores en una torta de cuatro pisos, sin repetirlos? - Si ahora fueran cinco sabores, ¿Habría más cantidad de tortas posibles?, ¿De qué manera podrías resolver la problemática?

2. Tabla n°8, elaboración propia.

Nombre: “Mastermind: Adivina el código”

Habilidades: Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar.

Resumen actividad: Se les explica a los y las estudiantes la metodología e instrucciones del juego Mastermind, las que en general son:

En un sector se dispone un espacio para que, de manera secreta, un jugador cree un código, en este caso, con cuatro colores, que se pueden repetir o no según lo que disponga el moderador o moderadora. A continuación, el otro jugador, el descifrador, intentará descifrar el código, esto poniendo intentos en la sección de cuatro agujeros horizontales. Para ir avanzando y logrando determinar el código, el jugador que lo creó le dará pistas a través de fichas color rojo o blanco, que se dispondrán al costado de cada intento, de manera general, de la siguiente forma:

- No se pondrá ninguna ficha, si ninguno de los colores dispuestos por el descifrador coincide con el código creado.
- Se pondrá una ficha color blanco, por cada ficha de color correcto que haya dispuesto el descifrador.
- Se pondrá una ficha color, rojo por cada ficha que haya dispuesto el descifrador con el color, y la posición correcta.

El descifrador no sabrá cuál de sus fichas dispuesta es correcta, tanto en color como en posición. Este

Preguntas Orientadoras:

- ¿Qué estrategias utilizaron para intentar ganar el juego?
- Con la cantidad de filas disponibles para los intentos, ¿Se podrá ganar sí o sí el juego?
- ¿Cuántas filas debería haber para asegurar que se va a ganar, sí o sí?, ¿y si el código a descifrar fuera de cinco colores sin repetirse?
- Lo anterior, ¿Se puede generalizar para cualquier número de colores?
- ¿De qué otra manera se puede representar la cantidad de claves que se pueden formar con los

contará con una cantidad máxima de intentos, que estará determinada por el tablero. Ganará el descifrador si logra determinar correctamente el código en el número de intentos máximos, en caso contrario gana el otro jugador. En esta oportunidad, para la creación de la clave tenemos tres colores disponibles, pero esta debe tener solo se desarrolla con dos colores, los que no se pueden repetir, con un total de 4 filas para lograr adivinar.

cuatro colores?, ¿y con cinco?

Actividad para el contenido de Combinación

La actividad de Combinación se presenta para ser trabajada luego de la lección de Permutación y Variación.

1. Tabla n°9, elaboración propia

Nombre: “¿Cuántas conversaciones tendré?”

Habilidades: Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar.

Resumen actividad: Se le presenta a los y las estudiantes la siguiente situación: “Se está organizando una reunión para interesados e interesadas en participar del taller de pintura. El objetivo de la primera reunión es que todos y todas se conozcan, para esto se formarán parejas entre los y las participantes, y se les invitará conversar con unas preguntas. Para esto se quiere determinar el tiempo que debería tomar esta parte de la reunión, teniendo en cuenta que cada pareja conversará 5 minutos aproximadamente, y hay cinco asistentes confirmados, ¿Cuánto tiempo se deberá disponer para esta parte de la reunión?” Para esto se les entregará a los y las estudiantes cinco copias de una imagen con cinco personas distintas, y se les solicitará formar las parejas de la reunión, para así encontrar el tiempo necesario para la parte de conocerse.

Preguntas Orientadoras:

- ¿Cuánto tiempo deberá durar la parte de conocerse de la reunión?, ¿Por qué?
- ¿Cuántas parejas distintas conversarán durante la reunión?
- ¿Qué estrategias usaste para determinar el número de parejas?
- ¿De qué otra manera se puede representar la solución a la situación?
- Si ahora quisiera hacerse un trabajo en tríos, ¿cuántos grupos se formarían?

Actividades a través del recurso TIC

A continuación, se describen diferentes maneras de utilizar LABAPC, primero a través de la ejemplificación con un ejercicio del texto escolar ministerial para 2° medio, y luego con

las herramientas que proporciona el software. Estas son solo un pequeño ejemplo de las posibilidades del software.

2. Tabla n°10, elaboración propia

Nombre: “Candidatura combinada”

Habilidades: Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar.

Resumen actividad: A través de la utilización del recurso web LABAPC, específicamente la sección “Calculadora y editora de combinaciones”, que se encuentra luego de, en el inicio de la página, escoger la sección “Combinatoria”, se propone la resolución de los ejercicios del texto escolar, por ejemplo: 1. Cinco estudiantes se presentan de candidatos para la directiva del curso. Si se debe escoger a tres de ellos para ocupar los cargos de presidente, secretario y tesorero, ¿cuántas son las distintas directivas posibles?
Se invita a los y las estudiantes a utilizar la sección para comparar el resultado de su ejercicio, utilizando las herramientas que este trae.

Preguntas Orientadoras:

- ¿Cuáles fueron las dificultades que se enfrentaron al momento de resolver el ejercicio?
- ¿El software aportó a la solución de estas?

Imagen de referencia, extraída de García Moreno, LABAPC (2010):

[illegible]

3. Tabla nº11, elaboración propia.

Nombre: “¿Camino lógico?”

Habilidades: Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar.

Resumen actividad: A través de la utilización del recurso web LABAPC, específicamente la sección “Camino lógico”, que se encuentra luego de, en el inicio de la página, escoger la sección “Combinatoria”, se propone la resolución del siguiente ejercicio: ¿Cuántos caminos existen para llegar del punto A al B en una cuadrícula de 4x2?

Se invita a los y las estudiantes a utilizar la sección para comparar el resultado de su ejercicio, utilizando las herramientas que este trae.

Preguntas Orientadoras:

- ¿Cuáles fueron las dificultades que se enfrentaron al momento de resolver el ejercicio?
- ¿El software aportó a la solución de estas?

Imagen de referencia extraída de García Moreno, LABAPC (2010):

COMBINATORIA. CAMINOS LÓGICOS SOBRE UNA CUADRÍCULA

Coloca adecuadamente 4 tramos verticales (V) y 2 tramos horizontales (H) para construir un camino de 6 tramos que una A con B sobre la cuadrícula. Esto es lo que se llama un CAMINO LÓGICO desde A hasta B. ¿Cuántos caminos lógicos diferentes se pueden construir?

Cada camino construido es una permutación de 6 elementos (6 tramos) con repetición (hay 4 tramos verticales indiferenciables y 2 tramos horizontales indiferenciables entre sí). Hay, por tanto:

$$PR_{6}^{4,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

...caminos lógicos diferentes. Trata de encontrar los 15 caminos lógicos diferentes. Cuando formes un camino, éste quedará registrado automáticamente siempre y cuando no se trate de un camino repetido.

Estado:
Camino sin construir

Cuando lo intentes, no tardarás en caer en la cuenta de la importancia de seguir un orden o una estrategia de formación.
También puedes utilizar la estrategia más utilizada en Combinatoria: tomar un papel y lápiz y hacer el correspondiente diagrama en árbol.

VOLUMEN 70

Actividades detalladas

Actividades de motivación

Juegos

1. **Nombre:** “El círculo de monedas”

Tiempo: 10 a 15 minutos

Disposición de estudiantes: Grupos de 2 a 4 estudiantes.

Materiales: 6 monedas, tapas de bebidas, o elementos parecidos, por participante.

Objetivo de aprendizaje asociado: OA11. Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Habilidad: Argumentar y Comunicar: Explicar: - Soluciones propias y los procedimientos utilizados. - Demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas. - Generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores utilizándolos apropiadamente.

Actitud: OAB. Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.

Instrucciones del juego: Se disponen todas las monedas juntas, sin dejar espacio entre ellas, formando un círculo. El juego consiste en sacar monedas del círculo, el jugador que saque la o las últimas monedas del círculo ganará. Los jugadores se turnan para sacar una o dos monedas, pero si se sacan dos, éstas deben estar una junto a otra, sin que haya entre ellas ninguna otra moneda o espacio vacío.

Descripción de la actividad: Se presenta y explica a los estudiantes el juego, luego se invita a jugar 2 ó 3 veces dependiendo del tiempo disponible. Una vez terminado, se pregunta al curso sobre su apreciación, es decir, dificultades que puedan haber aparecido al momento de jugarlo, estrategias, entre otras cosas, para así guiar la conversación con la siguiente pregunta: ¿Qué se debe hacer para asegurarse de ganar el juego? Se espera que los y las estudiantes mencionen el hecho de tener que pensar las diferentes maneras

en que los otros jugadores pueden extraer las monedas, para así asegurar que en su turno, especialmente en los últimos, se logre tomar la o las últimas monedas. Con esto se debe guiar la conversación a hablar sobre las dificultades que esto trae, es decir, ¿Es difícil pensar en todas las opciones que tienen los compañeros y compañeras?, y, ¿Si el grupo es de dos, es más fácil pensarlo que de cuatro?, ¿Por qué?

Se espera que aparezcan por primera vez las palabras combinaciones, casos, opciones, u otros que hagan alusión al hecho de que, mientras más compañeros formen el grupo, más difícil puede ser pensar en que elección harán hasta llegar a mi turno, esto, por la cantidad de combinaciones posibles que existen. Con este se logra los primeros a vistos al Razonamiento Combinatorio que se quiere lograr. Una vez llegada a esta conclusión se puede dar paso al desarrollo de la clase.

2. **Nombre:** Sumar 15

Tiempo: 10 a 15 minutos

Disposición de estudiantes: Grupos de 2 estudiantes.

Materiales: Pizarra y plumón, o cuaderno y lápices.

Objetivo de aprendizaje asociado: OA11. Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Habilidad: Argumentar y Comunicar: Explicar: - Soluciones propias y los procedimientos utilizados. - Demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas. - Generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores utilizándolos apropiadamente.

Actitud: OAB. Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.

Instrucciones del juego: En la pizarra o cuaderno se escriben los números del 1 al 9. Por turnos los participantes deberán escoger un número, y se queda con él, es decir, se

saca de la lista. Ganará el primer jugador que logre sumar 15 con tres números de los escogidos.

Descripción de la actividad: Se le presenta y explica a los estudiantes el juego, luego se invita a jugarlo 2 o 3 veces dependiendo del tiempo disponible. Una vez terminado se pregunta al curso sobre su apreciación, es decir, dificultades que puedan haber aparecido al momento de jugarlo, estrategias, entre otras cosas, para así guiar la conversación con la siguiente pregunta: ¿Qué se debe hacer, para asegurarse de ganar el juego? Se espera que los y las estudiantes mencionen el hecho de tener que pensar las diferentes maneras en que el otro jugador podrá sumar 15 en base a los números que se van escogiendo. Así, se debe guiar la conversación a hablar sobre las dificultades que esto trae, es decir, ¿Es difícil pensar en todas las opciones que el compañero o compañera tiene?, ¿Por qué? Se espera que aparezcan por primera vez las palabras, combinaciones, casos, opciones, u otras que hagan alusión al hecho de que son múltiples las opciones para llegar a la suma esperada, y se puede pasar por alto algún número que nos haga perder inmediatamente, esto, por la cantidad de combinaciones posibles que existen. Con esto se logra visualizar los primeros indicios del Razonamiento Combinatorio que se busca desarrollar, y así comenzar el camino a ellos. Una vez llegada a esta conclusión se puede dar paso al desarrollo de la clase.

Acertijos

3. Nombre: El sexteto de dados, ¿Juego justo o injusto?

Tiempo: 10 a 15 minutos.

Disposición de estudiantes: Trabajo personal, grupos de la cantidad que se estime conveniente o conversación a nivel curso.

Materiales: Lápiz, papel.

Objetivo de aprendizaje asociado: OA11. Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Habilidad: Argumentar y Comunicar: Explicar: - Soluciones propias y los procedimientos utilizados. - Demostraciones de resultados mediante definiciones,

axiomas, propiedades y teoremas. - Generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores utilizándolos apropiadamente.

Actitud: OAB. Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.

Situación: En este juego hay dos secciones, el jugador o jugadora lanza seis dados, en la sección “A” gana si obtiene las seis caras de los dados con números diferentes y en la sección “B” gana si se obtiene dos números iguales y el resto diferentes. ¿Es este juego injusto en la sección “A”, por qué? ¿Es este juego injusto en la sección “B”, por qué?

Respuesta: El juego “A”, es un juego justo pues las posibilidades para ganar son muchas más que las de perder. En cambio, en el juego “B” las posibilidades en las que se gana son muy pocas comparas con las que se pierde.

Desarrollo de la actividad: Esta actividad puede desarrollarse de múltiples formas. Para que funcione es primordial adecuarlo a la personalidad del curso. Una manera de plantearlo es proponerle al curso que trabajen en grupos, para determinar cuál de los juegos es justo o no. Una vez que pase un tiempo adecuado (se estiman 5 a 8 minutos), se conversa con el grupo curso y se escuchan las elecciones sobre cual juego es justo, puede ser tipo votación. A su vez se escuchan algunos argumentos de los y las estudiantes, y el o la docente guía la conversación preguntando: ¿Qué les hace pensar que el juego es o no justo?, ¿De qué manera podemos representar la situación para buscar una solución a la problemática? Se espera que aparezcan por primera vez las palabras, combinaciones, casos, opciones, u otras que hagan alusión al hecho de que, cuando el juego es justo, como es el caso del “A”, hay más opciones donde se puede ganar. En cambio, en el juego “B”, es muy poco probable que se pueda lograr lo que se pide, esto, por la cantidad de opciones posibles que existen. Con esto se logra visualizar los primeros indicios del Razonamiento Combinatorio que se busca desarrollar, y así comenzar el camino a ellos. Una vez llegada a esta conclusión se puede dar paso al desarrollo de la clase.

4. **Nombre:** ¿Cómo cruzar el río?

Tiempo: 10 a 15 minutos.

Disposición de estudiantes: Grupos de la cantidad que se estime conveniente.

Materiales: Lápiz, papel.

Objetivo de aprendizaje asociado: OA11. Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Habilidad: Argumentar y Comunicar: Explicar: - Soluciones propias y los procedimientos utilizados. - Demostraciones de resultados mediante definiciones, axiomas, propiedades y teoremas. - Generalizaciones por medio de conectores lógicos y cuantificadores utilizándolos apropiadamente.

Actitud: OAB. Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.

Situación: Uno de los ejercicios más antiguos de la combinatoria es acerca de la situación problemática del granjero que viaja con un lobo, un cordero y una cesta de repollos. No puede dejar solos en ningún momento al lobo y al cordero, pues el lobo se lo comería, ni al cordero y los repollos, pues el cordero se comería el repollo. En un momento dado llegan a un río. Para cruzarlo tiene un bote en el que solamente puede cruzar él con uno de los tres "objetos". El problema es ¿Cuántos viajes mínimos deberá realizar para lograr cruzar el río?

Este problema se ha abordado en la serie animada “Los Simpson”, por lo que se puede adaptar siguiendo ese capítulo: Homero tuvo que ir a comprar veneno con su hija Maggie y Ayudante de santa, su perro. Al volver se pierde, y debe cruzar en bote un río para llegar a su destino. El problema es que, si el perro se queda solo con Maggie la morderá, y si ella se queda sola con el veneno se lo comerá. ¿Cómo podrá cruzar el río, si en el bote solo puede ir Homero y uno de los “objetos” ?, ¿Cuál es el número mínimo de viajes que deberá hacer?

Respuesta: La respuesta son 7 viajes como mínimo, llevando primero al personaje que no puede quedarse solo con ninguno de los otros, Maggie, volviendo por cualquiera de los otros dos “objetos”, por ejemplo el veneno, y una vez que ha llegado al otro lado del río, nuevamente se lleva a Maggie para buscar al perro, aquí vuelva a dejar a Maggie en el punto inicial, y se lleva a ayudante de santa, al cual lo deja con el veneno en la otra parte del río. Finalmente va nuevamente por Maggie, y así logra cruzar el río. La solución está ilustrada en el mismo capítulo que se puede encontrar fácilmente en plataformas como Youtube⁴. Al igual que la solución para el caso original del granjero⁵

Desarrollo de la actividad: Esta actividad puede desarrollarse de múltiples formas. Para que funcione es primordial adecuarlo a la personalidad del curso. Una manera de plantearlo es proponerle al curso que trabajen en grupos, para determinar una estrategia para calcular la cantidad mínima de viajes que deberá realizar Homero. Una vez que pase un tiempo razonable (se estiman 5 a 8 minutos), se conversa con el grupo curso sobre su apreciación de la situación, es decir, dificultades que puedan haber aparecido al momento de intentar resolver la situación, estrategias, entre otras cosas, para así guiar la conversación preguntando ¿Cuál es la dificultad que enfrenta Homero?, ¿Qué hay que pensar para poder solucionar el problema?, ¿De qué maneras se puede representar las soluciones de la situación?, ¿Hay más de una forma para que Homero realice una cantidad mínima de viajes?. Se espera, a partir de las respuestas de los y las estudiantes, que aparezcan por primera vez las palabras, combinaciones, casos, opciones, u otras que hagan alusión al hecho de que existen muchos casos para cruzar el río, y podría escogerse una inadecuada, o hacer más caminos que los mínimos, esto, por la cantidad de combinaciones posibles que existen. Una vez llegada a esta conclusión se puede dar paso al desarrollo de la clase, pues ya se ha logrado visualizar los primeros indicios del Razonamiento Combinatorio que se busca desarrollar, y así es que se puede comenzar el camino a ellos.

⁴ <https://www.youtube.com/watch?v=KvFIJULbe6g>.

⁵ <https://www.youtube.com/watch?v=sBfL4LMmFNA>

Actividades para el desarrollo de la clase

Permutación

Material concreto

1. **Nombre:** Pasteleros y pasteleras: permutar con polícubos.

Tiempo: 35 a 40 minutos.

Materiales: 18 polícubos por cada color (4 colores a lo menos)

Esto es reemplazable por cualquier elemento que sea apilable y de colores, por ejemplo bloques tipo “lego”, palos de helados, entre otros. En su defecto puede trabajarse con lápices de colores y dibujar lo solicitado.

Disposición de los estudiantes: Grupos de la cantidad que se estime conveniente.

Objetivo de aprendizaje: OA11. Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Habilidad: Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar.

Actitud: OAB. Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.

OAD. Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.

Descripción de la actividad: La actividad comienza proponiéndole al curso la siguiente situación:

“Se debe diseñar una torta para la celebración del aniversario escolar, esta tendrá dos pisos, y hay dos sabores disponibles, que no se pueden repetir en la torta. El piso de frambuesa está determinado por el color rojo, y el de crema pastelera por color amarillo. ¿Entre cuantas opciones tengo para decidir?”

Intuitivamente los estudiantes dirán dos opciones, pues deben decidir si poner en el primer nivel el sabor frambuesa, y en el segundo el de crema pastelera, o al revés. Es importante preguntar: ¿Por qué solo son esas dos?, aunque sea poco desafiante, es

relevante verbalizar el hecho de que, los sabores solo se pueden “ordenar” de esa forma. Continuando con esto, se le propone al curso trabajar en grupos, según se estime conveniente atendiendo a la diversidad, para resolver una situación similar a la anterior: “Se debe determinar el orden de los sabores de una torta para la celebración del aniversario del colegio. Esta tiene tres pisos, cada uno con un sabor distinto, se deben distribuir entre: frambuesa, crema pastelera y menta. Se nos solicita describir cuantas diferentes tortas se podrían construir, teniendo en cuenta que el diferente orden de los sabores determina una torta distinta. El piso de frambuesa está identificado por el color rojo, el de crema pastelera por color amarillo, y el de menta por verde.”

Para esto tienes a disposición los policubos, con los cuales deberás representar todas las distintas tortas que se pueden construir.

Junto con la situación se les entrega a los estudiantes, de la manera que se estime conveniente, unas preguntas orientadoras y de desarrollo, que acompañan la actividad una vez que se han construido las seis tortas posibles:

- ¿Cuál es la mayor cantidad de tortas distintas que se pueden construir con tres sabores?
- ¿Por qué son estas, todas las tortas que se pueden construir?
- ¿Existe otra forma para representar las cantidad de tortas que se pueden construir?

Una vez que haya pasado el tiempo adecuado, el o la docente genera un espacio de conversación con el grupo curso para escuchar su apreciación de la situación, es decir, dificultades que puedan haber aparecido al momento de intentar resolverla, estrategias, entre otras cosas, para así guiar la sociabilización de las respuestas, poniendo énfasis en la forma en que los grupos crearon las diferentes tortas, escuchando las estrategias para guiar el desarrollo de la actividad y los aprendizajes esperados. Se espera que, los y las estudiantes mencionen el hecho de tener que pensar como mover los policubos para no olvidar ningún caso, siguiendo alguna estrategia particular, por ejemplo fijar un color y mover los otros. Con esto observar el Razonamiento Combinatorio en los y las estudiantes, y además, asegurar el correcto desarrollo de la actividad y la construcción de las seis tortas.

La actividad continúa con, en los mismos grupos, proponer una segunda situación:

“La directora se ha olvidado del sabor favorito de los estudiantes, el chocolate, que se representa con el color café. Por lo que se solicita, nuevamente, determinar la mayor cantidad de tortas que se pueden cocinar, esta vez, con los cuatro sabores, sin repetir ninguno.” Para esto tienes a disposición los policubos, pero puedes resolver la situación como lo creas más conveniente.

Junto con la situación se les entrega a los estudiantes, de la manera que se estime conveniente, unas preguntas orientadoras y de desarrollo, que acompañan la actividad una vez que se ha encontrado la posible solución:

- ¿Cuál es la mayor cantidad de tortas distintas que se pueden cocinar con los cuatro sabores?
- ¿Por qué son estas, todas las tortas que se pueden construir?
- ¿Existen otras forma para representar y determinar la cantidad de tortas que se pueden preparar?
- Si ahora fueran cinco sabores, ¿Habría más cantidad de tortas posibles?, ¿De qué manera podrías resolver la problemática?

Una vez terminada esta parte de la actividad, el o la docente genera nuevamente un espacio de conversación con el grupo curso para escuchar su apreciación de la situación, es decir, dificultades que puedan haber aparecido al momento de intentar resolver la situación, estrategias, entre otras cosas, para así guiar la sociabilización de las respuestas, poniendo énfasis en la forma con la que los grupos encontraron la cantidad de diferentes tortas que se pueden preparar con cuatro sabores, es probable que haya grupos que no logren encontrar la cantidad esperada, si se escuchan las estrategias empleadas se debe potenciar el dialogo entre grupos para que se validen los aprendizajes generados en la actividad y que todos y todas logren el propósito de esta. Se espera que los y las estudiantes mencionen en sus estrategias no haber utilizado del todo los policubos, si no que después de un número de intentos, se dieron cuenta cómo iban relacionándose los números, y así lograr responder la cantidad de tortas distintas que se pueden lograr con cinco sabores. Con esto se observa el avance del Razonamiento Combinatorio, por lo que es importante que se muestre al grupo curso otras representaciones para la construcción de tortas, se espera que estas nazcan de los propios estudiantes, pero sin

dejar de lado algunas relevantes como lo son las casillas o el diagrama de árbol, que debería ser familiar por la lección de principio multiplicativo. Por ejemplo, con casillas podemos ejemplificar las elecciones que se deben ir realizando. En el primer piso tenemos los cuatro sabores disponibles, si se escoge chocolate luego en el segundo solo tendremos tres, y así sucesivamente. Luego se puede guiar la modelación, pues por el principio multiplicativo tendremos: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$

Menta

Frambuesa
Menta

Crema pastelera
Frambuesa
Menta

Chocolate
Crema pastelera
Frambuesa
Menta

Diseño de la torta mediante el uso de casillas, elaboración propia

Finalmente, se puede institucionalizar el aprendizaje, con la definición, fórmula, o como se estime conveniente. Sin embargo, la actividad puede continuar, preguntando y dirigiendo el aprendizaje con la siguiente situación: “Se ha determinado, a través de una votación, que la torta debe tener tres pisos pero solo dos sabores: frambuesa y chocolate, repitiéndose el de sabor chocolate. Por lo que se solicita, nuevamente, determinar la mayor cantidad de tortas que se pueden cocinar, esta vez, con dos sabores, repitiendo el de chocolate.”, se pregunta ¿Se puede utilizar el mismo razonamiento anterior? ¿Habrá más o menos tortas esta vez? ¿Por qué?, ¿Y si esta vez fueran cuatro pisos y se repitieran dos veces cada sabor (frambuesa y chocolate)? El o la docente debe guiar muy bien este proceso de modelación, pues generalizarlo, puede ser poco intuitivo y llevar a errores, pero una vez logrado se puede formular la permutación con repetición, generalizando así una definición completa de este primer método combinatorio.

En el transcurso de la actividad, con las preguntas orientadoras y la moderación del o la docente, se espera observar el desarrollo, del Razonamiento Combinatorio, es decir, como lo que en un principio era concreto se lleva a lo mental, a través del proceso de enseñanza aprendizaje, mediante el ensayo y error.

Juego

2. Nombre: “Mastermind: Adivina el código”

Tiempo: 35 a 40 minutos.

Materiales: Juego Mastermind físico o virtual. Se puede construir con alfileres de colores y plumavit, en su defecto se puede jugar con lápiz y papel.

Disposición de los estudiantes: Trabajo en parejas.

Objetivo de aprendizaje: OA11. Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Habilidad: Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar

Actitud: OAB. Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.

OAD. Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.

Descripción del juego: El juego Mastermind es de la siguiente forma:



6

En un sector se dispone un espacio para que, de manera secreta, un jugador cree un código, en este caso, con cuatro colores, que se pueden repetir o no según lo que disponga el moderador o moderadora. A continuación, el otro jugador, el descifrador, intentará descifrar el código, esto poniendo intentos en la sección de cuatro agujeros horizontales. Para ir avanzando y logrando determinar el código, el jugador que lo creó le dará pistas a través de fichas color rojo o blanco, que se dispondrán al costado de cada intento, de manera general, de la siguiente forma:

⁶ Imagen tomada de <https://www.aboutespanol.com/aprende-a-jugar-mastermind-paso-a-paso-2077618>

- No se pondrá ninguna ficha, si ninguno de los colores dispuestos por el descifrador coincide con el código creado.
- Se pondrá una ficha color blanco, por cada ficha de color correcto que haya dispuesto el descifrador.
- Se pondrá una ficha color, rojo por cada ficha que haya dispuesto el descifrador con el color, y la posición correcta.

El descifrador no sabrá cuál de sus fichas dispuesta es correcta, tanto en color como en posición. Este contará con una cantidad máxima de intentos, que estará determinada por el tablero. Ganará el descifrador si logra determinar correctamente el código en el número de intentos máximos, en caso contrario gana el otro jugador.

El juego también tiene versiones web, como por ejemplo en <https://www.juegosjuegos.com/jugar-juego/mastermind!.html>, o en aplicaciones para celular que se encuentran bajo el mismo nombre. En su defecto puede realizarse una plantilla en el cuaderno y jugar con lápices de colores.

Descripción de la actividad: El juego se le presenta al curso, y una vez de explicadas las reglas, se le pide que formen parejas para comenzar a jugar. En esta oportunidad la clave de cuatro dígitos, solo se desarrolla con cuatro colores, los que no se pueden repetir, con un total de 8 filas para lograr adivinar.

Una cantidad adecuada, sería mínimo cuatro jugadas, intercalando la persona que deba descifrar el código.

Una vez pasado el tiempo adecuado se les entrega a los estudiantes, de la manera que se estime conveniente, las siguientes preguntas orientadoras y de desarrollo, que acompañan la actividad:

- ¿Qué estrategias utilizaron para intentar ganar el juego?
- Con la cantidad de filas disponibles para los intentos, ¿Se podrá ganar sí o sí el juego?
- ¿Cuántas filas debería haber para asegurar que se va a ganar, sí o sí?, ¿y si el código a descifrar fuera de cinco colores sin repetirse?
- Lo anterior, ¿Se puede generalizar para cualquier número de colores?
- ¿De qué otra manera se puede representar la cantidad de claves que se pueden formar con los cuatro colores?, ¿y con cinco?

Pasado un tiempo acorde a las necesidades del curso, el o la docente genera un espacio de conversación con el grupo curso para escuchar su apreciación de la situación, es decir, dificultades que puedan haber aparecido al momento de intentar resolver la situación, estrategias, entre otras cosas, para así guiar la sociabilización de las respuestas, poniendo énfasis en la construcción comunitaria de una regla, o fórmula, que entregue, para cualquier cantidad de colores que tenga el código, un número de filas con las que se asegura ganar el juego.

Con esto el o la docente podrá observar el Razonamiento Combinatorio que se ha ido desarrollando en la actividad, y así representar la situación con otro método para apoyarlo, por ejemplo diagrama de árbol o casillas, siempre tomando en cuenta las respuesta de los y las estudiantes. Por ejemplo, con casillas se pueden ejemplificar que en la primera opción de la clave podemos poner cualquier de los cuatro colores, si escogemos el rojo, en la segunda casilla tenemos tres opciones, y así sucesivamente, lo que por el principio multiplicativo sería: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$, así se puede guiar hacia la modelación. Luego se podrá pasar a institucionalizar el aprendizaje de permutación simple, a través de una definición, fórmula, o como se estime conveniente.



Diseño de clave mediante el uso de casillas, elaboración propia

Sin embargo, la actividad puede continuar, proponiendo a los y las estudiantes variantes del juego, para así construir permutación con repetición, por ejemplo: volver a jugar, pero esta vez, en el código de cuatro colores, se puede repetir un color.

Con las preguntas orientadoras y la moderación del o la docente se espera observar el desarrollo, a lo largo de la actividad, del Razonamiento Combinatorio, es decir en el mejor de los casos, como lo que en un principio los estudiantes calculaban de manera concreta pudieron llevarlo a procesos mentales que establecieron una generalidad.

Variación

Material concreto

1. **Nombre:** Pasteleros y pasteleras: Variar con policubos.

Tiempo: 35 a 40 minutos.

Materiales: 18 policubos por cada color (4 colores a lo menos) Esto es reemplazable por cualquier elemento que sea apilable y de colores, por ejemplo bloques tipo “lego”, palos de helados. En su defecto puede trabajarse con lápices de colores y dibujar lo solicitado.

Disposición de los estudiantes: Grupos de la cantidad que se estime conveniente

Objetivo de aprendizaje: OA11. Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Habilidad: Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar

Actitud: OAB. Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.

OAD. Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.

Descripción de la actividad: La actividad comienza proponiéndole al curso la siguiente situación: Debemos diseñar una torta para la celebración del aniversario escolar, esta debe tener dos pisos, cada uno con diferentes sabores, y nos solicitan describir las opciones, viendo los sabores y su orden. Para esto tenemos tres sabores disponibles, frambuesa, que está determinado por el color rojo, el de crema pastelera, dado por color amarillo, y el chocolate representado por color café. ¿Entre cuantas opciones tengo para decidir? Aquí el o la docente guía a los y las estudiantes para visualizar algunas de las diferentes tortas que se pueden cocinar, por ejemplo de chocolate en el primer piso y frambuesa en el segundo, y al revés. Es importante realizar este alcance sin explicitar todos los casos, solamente para guiar a la próxima actividad por grupos. Continuando

con esto, y sin haber encontrado aún la respuesta se le propone al curso trabajar en grupos, según se estime conveniente atendiendo a la diversidad, para resolver la situación:

“Debemos determinar los sabores de la torta para la celebración del aniversario del colegio, y el orden en los que se encontrarán. Esta torta tiene dos pisos, cada uno con un sabor distinto, se deben distribuir entre: frambuesa, crema pastelera y chocolate. Se nos solicita describir cuantas diferentes tortas se podrían construir, teniendo en cuenta que, el diferente orden de los sabores determina una torta distinta. El piso de frambuesa está determinado por el color rojo, el de crema pastelera por color amarillo, y el de chocolate por café.” Para esto tienes a disposición los policubos, con los cuales debes representar todas las distintas tortas que se pueden construir.

Junto con la situación se les entrega a los estudiantes, de la manera que se estime conveniente, preguntas orientadoras y de desarrollo que acompañan la actividad una vez que se han construido las seis tortas posibles:

- ¿Cuál es la mayor cantidad de tortas distintas que se pueden construir con tres sabores?
- ¿Por qué son estas, todas las tortas que se pueden construir?
- ¿Existe otra forma para representar las cantidad de tortas que se pueden construir?

Una vez terminada esta parte de la actividad, el o la docente genera un espacio de conversación con el grupo curso para escuchar su apreciación de la situación, es decir, dificultades que puedan haber aparecido al momento de intentar resolver la situación, estrategias, entre otras cosas. Para así guiar la sociabilización de las respuestas, poniendo énfasis en la forma con la que los grupos encontraron la cantidad de diferentes tortas de dos sabores distintos que se pueden preparar con cuatro sabores. Se espera que los y las estudiantes mencionen el hecho de tener que pensar como mover los policubos para no olvidar ningún caso, siguiendo alguna estrategia particular, por ejemplo fijar un color y mover los otros. Además así, asegurar el correcto desarrollo de la actividad y la construcción de las seis tortas. Aquí se podrá realizar una semejanza con permutar 3 objetos, y preguntarse ¿Será siempre así? ¿Qué diferencia existe entre permutar 3

sabores, es decir, ver cuantas distintas tortas con tres sabores y tres pisos se pueden formar, con este caso?

La actividad continúa con, en los mismos grupos, proponer la siguiente situación:

“La directora se ha olvidado del sabor favorito de los profesores, la menta, que se representa con el color verde. Por lo que se solicita, nuevamente, determinar la mayor cantidad de tortas que se pueden cocinar, siguiendo con dos pisos, y sin repetir los sabores.” Para esto tienes a disposición los policubos, pero puedes resolver la situación como lo creas más conveniente.

Junto con la situación se les entrega a los estudiantes, de la manera que se estime conveniente, unas preguntas orientadoras y de desarrollo, que acompañan la actividad una vez que se ha encontrado la posible solución:

- ¿Cuál es la mayor cantidad de distintas tortas de dos pisos que se pueden cocinar con los cuatro sabores, sin repetir ningún sabor?
- ¿Por qué son estas, todas las tortas que se pueden construir?
- ¿Existen otras formas para representar y determinar la cantidad de tortas que se pueden preparar?
- ¿Por qué la cantidad de tortas es menor a cuando ordenamos los mismos cuatro sabores en una torta de cuatro pisos, sin repetirlos?
- Si ahora fueran cinco sabores, ¿Habrá más cantidad de tortas posibles?, ¿De qué manera podrías resolver la problemática?

Una vez terminada esta parte de la actividad, es importante que el o la docente genere un espacio para sociabilizar las respuestas de los grupos, poniendo énfasis en la forma con la cual los grupos encontraron la cantidad de diferentes tortas que se pueden preparar con 4 sabores, es probable que haya grupos que no logren encontrar la cantidad esperada, si se escuchan las estrategias empleadas se debe potenciar el dialogo entre grupos para que se validen los aprendizajes generados en la actividad, y puedan darse cuenta de sus errores y fortalezas. Se espera que los y las estudiantes mencionen en sus estrategias no haber utilizado del todo los policubos, si no que después de un número de intentos, se dieron cuenta cómo iban relacionándose los números, para así lograr responder la cantidad de tortas distintas que se pueden lograr con cinco sabores. Con esto el o la

docente podrá evidenciar el desarrollo del Razonamiento Combinatorio es los y las estudiantes, y contribuir mostrando al grupo curso otras representaciones para la construcción de tortas, se espera que estas nazcan de los propios estudiantes, pero sin dejar de lado algunas relevantes como lo son las casillas o el diagrama de árbol, que debería ser familiar por la lección de principio multiplicativo y permutación. Por ejemplo, con casillas podemos ejemplificar las elecciones que se deben ir realizando. En el primer piso tenemos los cuatro sabores disponibles, si se escoge chocolate luego en el segundo solo tendremos tres, y con esto se habrá escogido los dos sabores, lo que se puede generalizar para cualquiera sea la elección de sabores, y así, por principio multiplicativo, se obtiene la cantidad total de tortas buscadas $4 \cdot 3 = 12$. Para ayudar a la modelación se puede preguntar sobre la similitud y diferencia entre este número y el factorial que se realiza en caso de una permutación, así analizar como el $4!$ está disminuido en sus factores $2 \cdot 1$, si se acompaña el ejemplo con el caso de cinco sabores de tortas, se observará como el $5!$ está disminuido en sus factores $3 \cdot 2 \cdot 1$, y así se puede guiar la modelación.

En el transcurso de la actividad, con las preguntas orientadoras y la moderación del o la docente, se espera observar el desarrollo, del Razonamiento Combinatorio, es decir, como lo que en un principio era concreto se lleva a lo mental, a través del proceso de enseñanza aprendizaje, mediante el ensayo y error.

Crema pastelera
Frambuesa
Menta

Chocolate
Crema pastelera
Frambuesa
Menta

Diseño de la torta mediante el uso de casillas, elaboración propia.

Finalmente, se puede institucionalizar el aprendizaje, con la definición, fórmula, o como se estime conveniente para variación simple. Sin embargo, la actividad puede continuar, preguntando y dirigiendo el aprendizaje con la siguiente situación: “Se ha determinado, a través de una votación, que la torta debe tener dos pisos, y se decidirá entre tres sabores, los que, esta vez se pueden repetir: frambuesa, crema y chocolate. Por lo que se solicita, nuevamente, determinar la mayor cantidad de tortas de dos pisos distintos que se pueden cocinar, con dos sabores, repitiendo de la manera que se quiera cualquiera de los tres, se pregunta: ¿Se puede utilizar el mismo razonamiento anterior? ¿Habrá más o menos tortas esta vez? ¿Por qué?, ¿Y si esta vez fueran, tres pisos y se pudieran repetir igualmente los dos sabores como se quisiera?

El o la docente debe guiar muy bien este proceso de modelación, pues generalizarlo, puede ser poco intuitivo y llevar a errores. Con esto puede formular la variación con repetición, generalizando así una definición del segundo método combinatorio.

En el transcurso de la actividad, con las preguntas orientadoras y la moderación del o la docente, se espera observar el desarrollo, del Razonamiento Combinatorio, es decir, como lo que en un principio era concreto se lleva a lo mental, a través del proceso de enseñanza aprendizaje, mediante el ensayo y error.

Juego

2. **Nombre:** MasterMind: Adivina el código.

Tiempo: 35 a 40 minutos.

Materiales: Juego Mastermind físico o virtual. Se puede construir con alfileres de colores y plumavit, en su defecto se puede jugar con lápiz y papel.

Disposición de los estudiantes: Trabajo en parejas.

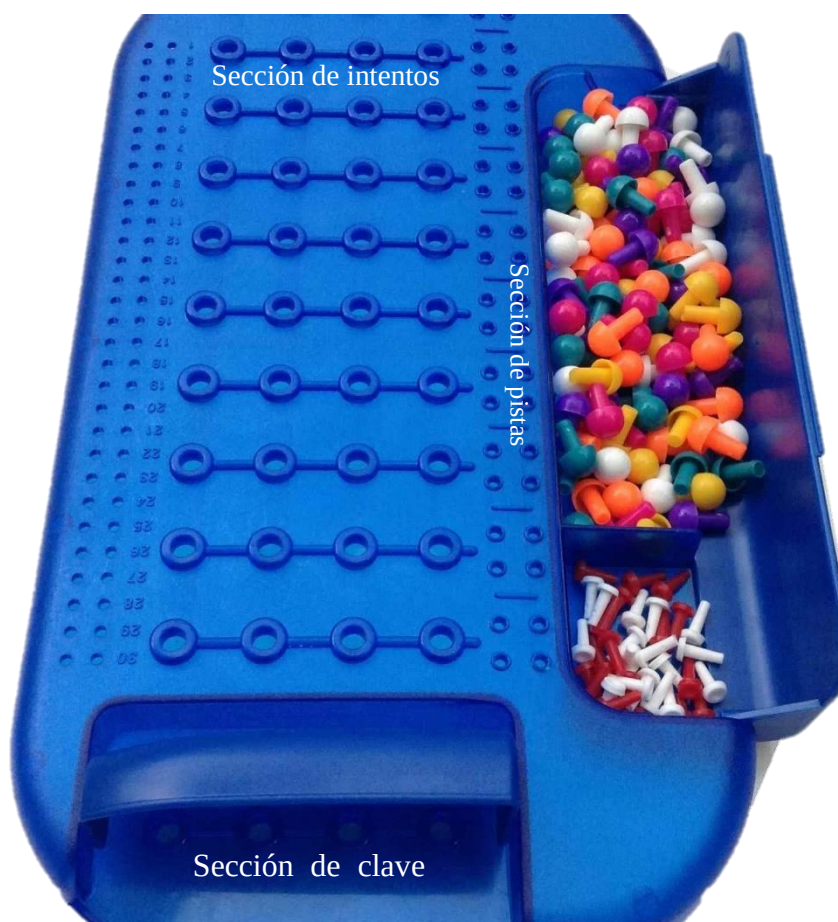
Objetivo de aprendizaje: OA11. Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Habilidad: Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar

Actitud: OAB. Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.

OAD. Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.

Descripción del juego: El juego Mastermind es de la siguiente forma:



7

En un sector se dispone un espacio para que, de manera secreta, un jugador cree un código, en este caso, con cuatro colores, que se pueden repetir o no según lo que disponga el moderador o moderadora. A continuación, el otro jugador, el descifrador, intentará descifrar el código, esto poniendo intentos en la sección de cuatro agujeros

⁷ Imagen tomada desde <https://www.aboutespanol.com/aprende-a-jugar-mastermind-paso-a-paso-2077618>

horizontales. Para ir avanzando y logrando determinar el código, el jugador que lo creó le dará pistas a través de fichas color rojo o blanco, que se dispondrán al costado de cada intento, de manera general, de la siguiente forma:

- No se pondrá ninguna ficha, si ninguno de los colores dispuestos por el descifrador coincide con el código creado.
- Se pondrá una ficha color blanco, por cada ficha de color correcto que haya dispuesto el descifrador.
- Se pondrá una ficha color, rojo por cada ficha que haya dispuesto el descifrador con el color, y la posición correcta.

El descifrador no sabrá cuál de sus fichas dispuesta es correcta, tanto en color como en posición. Este contará con una cantidad máxima de intentos, que estará determinado por el tablero. Ganará el descifrador si logra determinar correctamente el código en el número de intentos máximos, en caso contrario gana el otro jugador.

El juego también tiene versiones web, como por ejemplo en <https://www.juegosjuegos.com/jugar-juego/mastermind!.html>, o en aplicaciones para celular que se encuentran bajo el mismo nombre. En su defecto puede realizarse una plantilla en el cuaderno y jugar con lápices de colores.

Descripción de la actividad: El juego se le presenta al curso, y una vez de explicadas las reglas, se le pide que formen parejas para comenzar a jugar. En esta oportunidad para la creación de la clave tenemos tres colores disponibles, pero esta debe tener solo se desarrolla con dos colores, los que no se pueden repetir, con un total de 4 filas para lograr adivinar.

Una cantidad adecuada, sería mínimo cuatro jugadas, intercalando la persona que deba descifrar el código.

Una vez pasado el tiempo adecuado se les entrega a los estudiantes, de la manera que se estime conveniente, unas preguntas orientadoras y de desarrollo, que acompañan la actividad:

- ¿Qué estrategias utilizaron para intentar ganar el juego?
- Con la cantidad de filas disponibles para los intentos, ¿Se podrá ganar sí o sí el juego?

- ¿Cuántas filas debería haber para asegurar que se va a ganar, sí o sí?, ¿y si hubiera cuatro colores disponibles para realizar el código compuesto por solo dos colores?
- ¿Se puede generalizar para cualquier número de colores disponibles?
- ¿De qué otra manera se puede representar la cantidad de claves que se pueden formar con los cuatro colores?, ¿y con cinco?

Una vez terminada esta parte de la actividad, el o la docente genera un espacio de conversación con el grupo curso para escuchar su apreciación de la situación, es decir, dificultades que puedan haber aparecido al momento de intentar resolver la situación, estrategias, entre otras cosas, para así guiar la sociabilización de las respuestas, poniendo énfasis en la construcción comunitaria de una regla, o fórmula, que entregue, para cualquier cantidad de colores que tenga el código, un número de filas con las que se asegura ganar el juego. A su vez, se deben escuchar las estrategias de los y las estudiantes, siendo recogidas y validadas por sus compañeros y compañeras. Se podrá proponer jugar nuevamente el juego pero esta vez con un código de tres colores, con 5 disponibles para su creación. Con esto el o la docente podrá visualizar el Razonamiento Combinatorio que se ha ido desarrollando, y para acompañarlo se representa la situación con otro método, por ejemplo diagrama de árbol o casillas, siempre tomando en cuenta las respuestas de los y las estudiantes. Por ejemplo, con casillas se pueden ejemplificar que en la primera opción de la clave podemos poner cualquier de los cuatro colores, si escogemos el rojo, en la segunda casilla tenemos tres opciones, lo que por el principio multiplicativo quedará, $4 \cdot 3 = 12$, para ayudar a la modelación se puede preguntar sobre la similitud y diferencia entre este número y el factorial que se realiza en caso de una permutación, así analizar como el $4!$ está disminuido en sus factores $2 \cdot 1$, si se acompaña el ejemplo con el caso de cinco colores disponibles, se observará como el $5!$ está disminuido en sus factores $3 \cdot 2 \cdot 1$, y así guiar la modelación.

	Rojo Verde Azul Amarillo		Verde Azul Amarillo	
--	-----------------------------------	--	---------------------------	--

Diseño de clave mediante el uso de casillas, elaboración propia

Luego, se podrá pasar a institucionalizar el aprendizaje de variación simple, a través de una definición, fórmula, o como se estime conveniente.

Sin embargo, la actividad puede continuar, proponiendo a los y las estudiantes variantes del juego, para así construir variación con repetición, por ejemplo: volver a jugar, pero esta vez, con cuatro colores disponibles se puede crear un código de tres colores, y se puede repetir cualquier color. Con las preguntas orientadoras y la moderación del o la docente se espera observar el desarrollo, a lo largo de la actividad, del Razonamiento Combinatorio, es decir en el mejor de los casos, como lo que en un principio los estudiantes calculaban de manera concreta pudieron llevarlo a procesos mentales que establecieron una generalidad.

Combinación

1. **Nombre:** ¿Cuántas conversaciones tendré?

Tiempo: 35 a 40 minutos.

Materiales: Cartulinas de colores, fotos de 5 personas distintas.

Disposición de los estudiantes: Trabajo personal o grupal.

Objetivo de aprendizaje: OA11. Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Habilidad: Argumentar y Comunicar, Modelar y Representar

Actitud: OAB. Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.

OAD. Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos en las soluciones de los problemas.

Descripción de la actividad:

La actividad inicia proponiéndole a los estudiantes la siguiente situación:

“Se está organizando una reunión para interesados e interesadas en participar del taller de pintura. El objetivo de la primera reunión es que todos y todas se conozcan, para esto se formarán parejas entre los y las participantes, y se les invitará conversar con unas preguntas. Para esto se quiere determinar el tiempo que debería tomar esta parte de la reunión, teniendo en cuenta que cada pareja conversará 5 minutos aproximadamente, y hay cinco asistentes confirmados, ¿Cuánto tiempo se deberá disponer para esta parte de la reunión?”

Para esto se les entregará a los y las estudiantes cinco copias de una imagen con cinco personas distintas, y se les solicitará formar las parejas de la reunión, para así encontrar el tiempo necesario para la parte de conocerse. Por ejemplo:



Es importante que no se den más instrucciones para que sea un trabajo intuitivo, de ensayo y error.

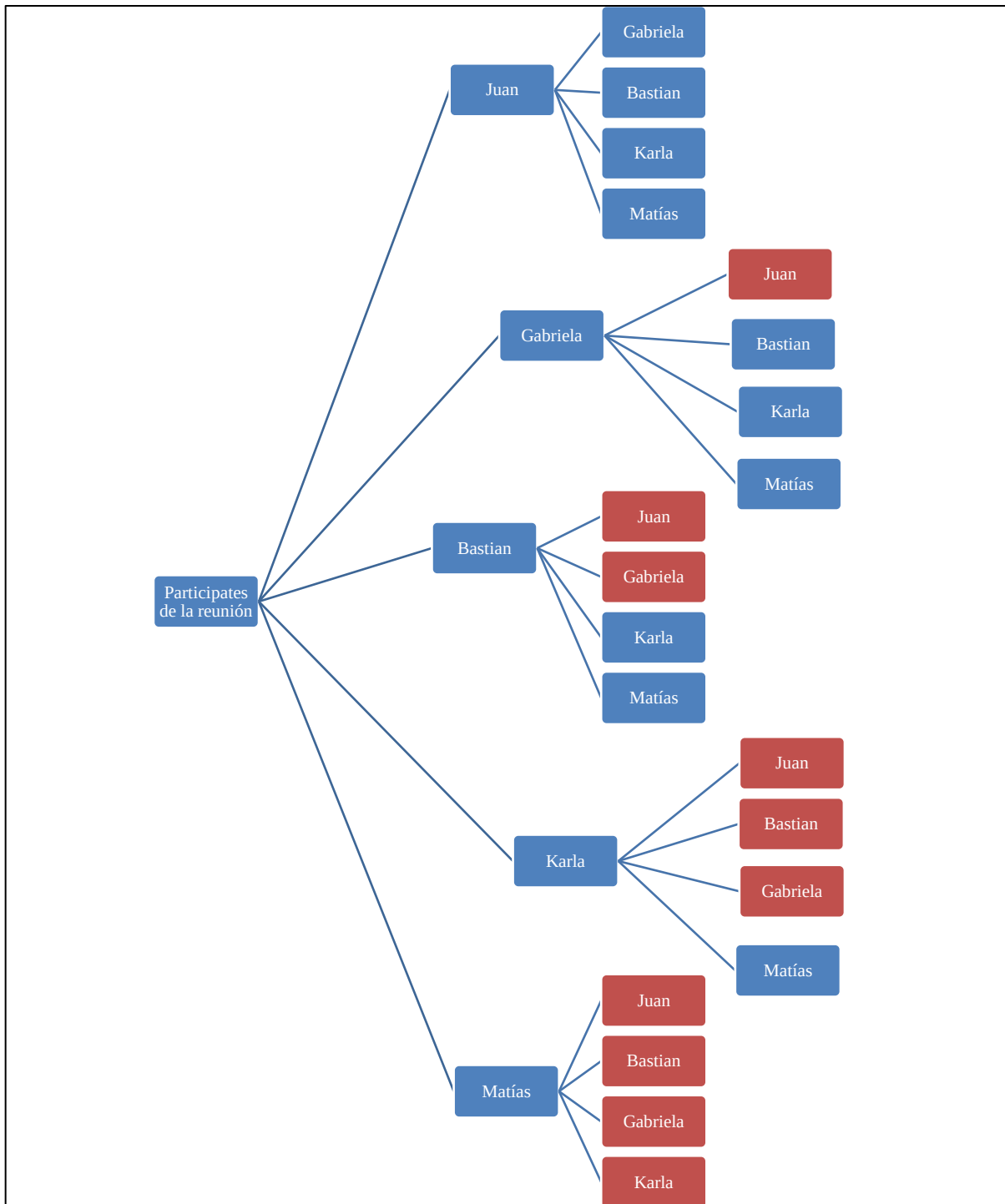
Una vez pasado el tiempo adecuado se les entrega a los estudiantes, de la manera que se estime conveniente, unas preguntas orientadoras y de desarrollo, que acompañan la actividad:

- ¿Cuánto tiempo deberá durar la parte de conocerse de la reunión?, ¿Por qué?
- ¿Cuántas parejas distintas conversarán durante la reunión?
- ¿Qué estrategias usaste para determinar el número de parejas?
- ¿De qué otra manera se puede representar la solución a la situación?
- Si ahora quisiera hacerse un trabajo en tríos, ¿cuántos grupos se formarían?

Una vez terminada esta parte de la actividad, es importante que el o la docente genere un espacio para sociabilizar las respuestas de los estudiantes o grupos, poniendo énfasis en la estrategia que los y las estudiantes utilizaron para encontrar la cantidad de parejas y tríos. Siendo recogidas y validadas por sus compañeros y compañeras, y con la mediación del o la docente. Se espera que los y las estudiantes mencionen el hecho de

darse cuenta de no repetir las parejas, pues la conversación es la misma aunque las personas estén en orden distintos. Con esto verbalizar el Razonamiento Combinatorio utilizado, y así se puede hacer alusión a la variación, generando un espacio para contraste entre ambas, para encontrar diferencias que apoyen la modelación de una fórmula. A su vez se puede a través de diferentes representaciones la solución del problema, por ejemplo diagrama de árbol o casillas y ver como fallan en la construcción habitual, y se deben utilizar con cuidado de acuerdo con el contexto, por ejemplo con el diagrama de árbol:

Ejemplo de diagrama de árbol con nombres, elaboración propia.



Se observa un diagrama de árbol intuitivo, que contendrá todos los casos posibles en base a cada participante de la reunión. Se espera que los y las estudiantes noten que, en

base al contexto, las parejas se encuentran repetidas, es decir, por ejemplo la pareja de Juan y Gabriela está repetida en ambos eslabones de su nombre, por lo que se debe decidir dejar solo una. Lo mismo sucede con todos los eslabones en color naranja que deben eliminarse de la cuenta final pues la conversación que tenga, por ejemplo Juan y Karla, será la misma que Karla y Juan, y por lo tanto no debe contabilizarse dos veces. Así, los casos totales una vez eliminados los eslabones “repetidos” (naranjos) son 10. Se espera que los estudiantes logren visualizar y comunicar la relación entre los casos totales ante de eliminar “los repetidos”, y después; es decir, como los 20 casos iniciales se dividen a la mitad y generan los 10 que contamos como casos totales para el ejercicio. Aquí se pueden hacer dos preguntas claves que ayudarán a la formulación:

- ¿A qué método de recuento hace referencia el diagrama con los casos iniciales?
- En el caso de querer formar tríos, ¿Por cuánto dividiríamos los casos iniciales?

Así se podrá pasar a institucionalizar el aprendizaje de combinación simple, a través de una definición, fórmula, o como se estime conveniente.

Es importante mencionar que, con las preguntas orientadoras y la moderación del o la docente se espera observar el desarrollo, a lo largo de la actividad, del Razonamiento Combinatorio, es decir en el mejor de los casos, como lo que en un principio los estudiantes calculaban de manera concreta pudieron llevarlo a procesos mentales que establecieron una generalidad.

Recurso TIC

A continuación, se describen diferentes maneras de utilizar LABAPC, primer a través de la ejemplificación con un ejercicio del texto escolar ministerial para 2ºmedio, y luego con las herramientas que proporciona el software. Estas son solo un pequeño ejemplo de las posibilidades del software.

Cuando se ingresa a la página web se encuentra lo siguiente:



A continuación se detallan las dos actividades, especificando las secciones que se utilizarán.

Actividad a través de LABAPC

1. **Nombre:** Candidatura Combinada

Materiales: Computador con acceso a internet.

Disposición de los estudiantes: Trabajo personal o en parejas.

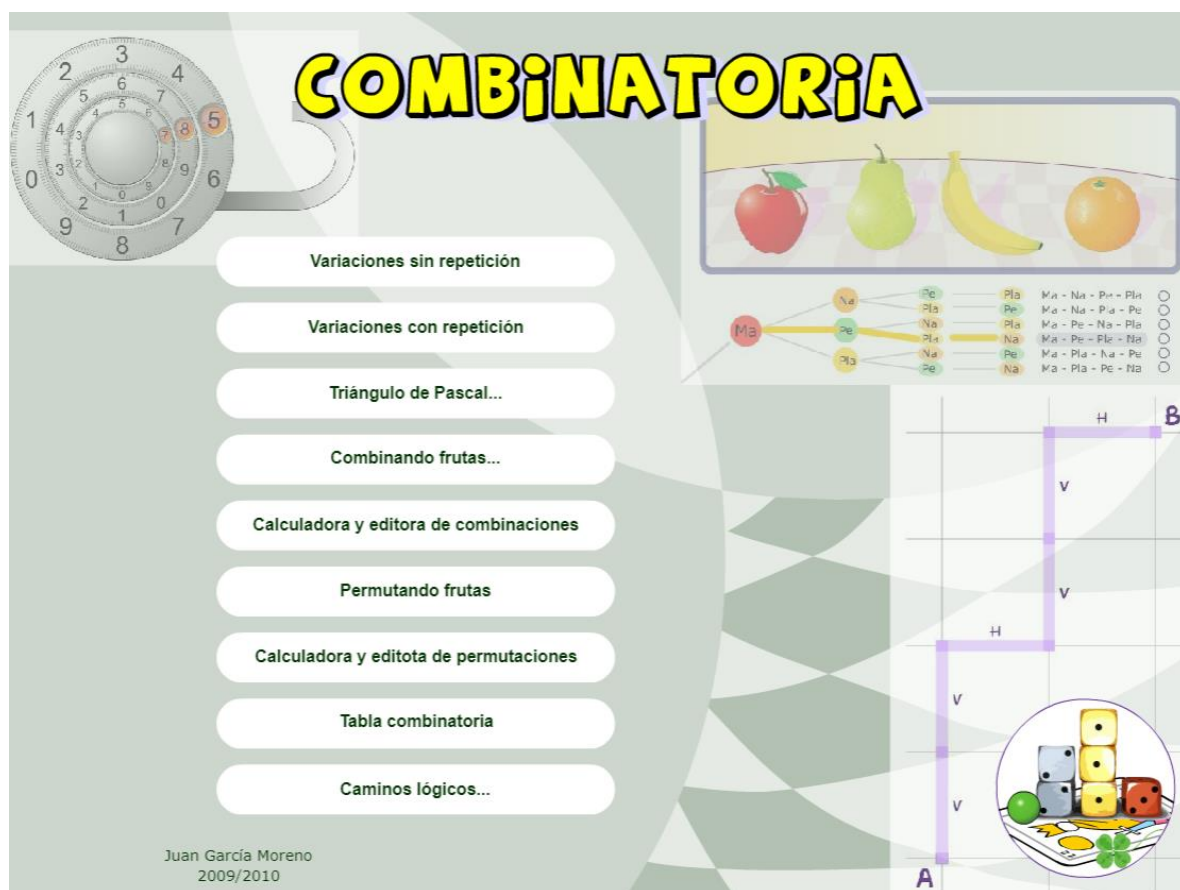
Objetivo de aprendizaje: OA11. Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Habilidad: Resolver problemas, y Argumentar y comunicar.

Actitud: OAF. Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas.

Ejercicio: 1. Cinco estudiantes se presentan de candidatos para la directiva del curso. Si se debe escoger a tres de ellos para ocupar los cargos de presidente, secretario y tesorero, ¿cuántas son las distintas directivas posibles? (Chacón Aguirre, García Castillo, Rupinn Gutiérrez, Setz Mena, & Villena Ramirez, 2018)

Descripción de la actividad: Al ingresar a LBAPC, y hacer clic en la sección combinatoria, se encuentran subsecciones, como se muestra a continuación:



Luego, escogiendo la opción “Calculadora y editora de combinaciones”, se tiene:

COMBINATORIA.

CALCULADORA-EDITORA DE COMBINACIONES

(Con o sin repetición)

a

b

c

d

e

Elige el tipo de combinaciones que deseas realizar.

☒ SIN REPETICIÓN
 ☐ CON REPETICIÓN

Los 5 ELEMENTOS DIFERENTES del conjunto {a - b - c - d - e} tomados de 3 en 3, teniendo en cuenta que:

- EL ORDEN NO IMPORTA

- que se trata de COMBINACIONES SIN REPETICIÓN

... se pueden combinar de 10 formas diferentes:

Escribe los nombres, o códigos, de los elementos DIFERENTES que pueden aparecer en las combinaciones .

Cada combinación va a tener...

3

+

elementos

COMBINACIONES

SIN REPETICIÓN

a,b,c
 a,b,d
 a,b,e
 a,c,d
 a,c,e
 a,d,e
 b,c,d
 b,c,e
 b,d,e
 c,d,e

Texto seleccionable

$C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10$

VOLUMEN

-

70

+

En la sección se encuentra un programa que entrega todas las combinaciones posibles, a través de la fórmula y de la descripción de los casos, con o sin repetición, además se puede editar los objetos a combinar, renombrándolos. Permitiendo así la contextualización del resultado. Con el uso de esta sección se puede trabajar de la siguiente forma:

Se propone la resolución de los ejercicios del texto escolar, por ejemplo: 1. Cinco estudiantes se presentan de candidatos para la directiva del curso. Si se debe escoger a tres de ellos para ocupar los cargos de presidente, secretario y tesorero, ¿cuántas son las distintas directivas posibles?

Se invita a los y las estudiantes a utilizar la sección para comprobar el resultado de su ejercicio, utilizando las herramientas que este trae, quedando por ejemplo:

163

COMBINATORIA.
CALCULADORA-EDITORA DE COMBINACIONES
(Con o sin repetición)

estudiante 1

estudiante 5

estudiante 2

estudiante 3

estudiante 4

Elige el tipo de combinaciones que deseas realizar.

☒ SIN REPETICIÓN
☐ CON REPETICIÓN

Los 5 ELEMENTOS DIFERENTES del conjunto
{ estudiante 1 - estudiante 2 - estudiante 3 - estudiante 4 - estudiante 5 }
tomados de 3 en 3, teniendo en cuenta que:
- EL ORDEN NO IMPORTA
- que se trata de COMBINACIONES SIN REPETICIÓN
... se pueden combinar de 10 formas diferentes:

Escribe los nombres, o códigos, de los elementos DIFERENTES que pueden aparecer en las combinaciones .

Cada combinación va a tener...

3

+

elementos

COMBINACIONES

SIN REPETICIÓN

estudiante 1,estudiante 2,estudiante 3
 estudiante 1,estudiante 2,estudiante 4
 estudiante 1,estudiante 2,estudiante 5
 estudiante 1,estudiante 3,estudiante 4
 estudiante 1,estudiante 3,estudiante 5
 estudiante 1,estudiante 4,estudiante 5
 estudiante 2,estudiante 3,estudiante 4
 estudiante 2,estudiante 3,estudiante 5
 estudiante 2,estudiante 4,estudiante 5
 estudiante 3,estudiante 4,estudiante 5

Texto seleccionable

3

5

3

=

5

!

3!

·

5-3

!

=

10

VOLUMEN

-

70

+

Una vez pasado el tiempo adecuado, es importante que se realicen preguntas orientadoras para acompañar el aprendizaje a través del uso de la plataforma, y no solo sea usada como calculadora, por ejemplo iniciando un espacio de conversación sobre las dificultades que se enfrentaron al momento de resolver el ejercicio, y como estas fueron o no solucionadas con el software. Esperando que los y las estudiantes mencionen como pudieron comprobar su resultado, y además observar todos los casos posibles, siendo más visual la solución.

164

2. **Nombre:** ¿Camino lógico?

Ejercicio: ¿Cuántos caminos existen para llegar del punto A al B en la cuadrícula de 4x2? Tal y como se muestra a continuación, en el que se ejemplifica con el cuadrado rojo por A, y negro por B.

Materiales: Computador con acceso a internet.

Disposición de los estudiantes: Trabajo personal o en parejas.

Objetivo de aprendizaje: OA11. Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.

Habilidad: Resolver problemas, y Argumentar y comunicar.

Actitud: OAF. Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información, dando crédito al trabajo de otros y respetando la propiedad y la privacidad de las personas.

Descripción de la actividad: Al ingresar a LBAPC, y hacer clic en la sección combinatoria, se encuentran subsecciones, como se muestra a continuación:

COMBINATORIA

Variaciones sin repetición

Variaciones con repetición

Triángulo de Pascal...

Combinando frutas...

Calculadora y editora de combinaciones

Permutando frutas

Calculadora y editota de permutaciones

Tabla combinatoria

Caminos lógicos...

Juan García Moreno
2009/2010

The interface includes several visual elements: a combination lock icon in the top left; a fruit basket with an apple, pear, banana, and orange; a tree diagram showing combinations of letters (Ma, Ya, Pe, Pla); a grid path from point A to point B using horizontal (H) and vertical (V) steps; and a circular inset showing a 3D arrangement of blocks and a small table.

Luego, entrando en “Caminos lógicos...” se observa:

COMBINATORIA.
CAMINOS LÓGICOS SOBRE UNA CUADRÍCULA

Coloca adecuadamente 4 tramos verticales (V) y 2 tramos horizontales (H) para construir un camino de 6 tramos que una A con B sobre la cuadrícula. Esto es lo que se llama un CAMINO LÓGICO desde A hasta B.
 ¿Cuántos caminos lógicos diferentes se pueden construir?

Cada camino construido es una permutación de 6 elementos (6 tramos) con repetición (hay 4 tramos verticales indiferenciables y 2 tramos horizontales indiferenciables entre sí). Hay, por tanto:

$$PR_6^{4,2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

...caminos lógicos diferentes. Trata de encontrar los 15 caminos lógicos diferentes. Cuando formes un camino, éste quedará registrado automáticamente siempre y cuando no se trate de un camino repetido.

Estado:
Camino sin construir

Quando lo intentes, no tardarás en caer en la cuenta de la importancia de seguir un orden o una estrategia de formación.
 También puedes utilizar la estrategia más utilizada en Combinatoria: tomar un papel y lápiz y hacer el correspondiente diagrama en árbol.

VOLUMEN
 - 70 +

Aquí se presenta la clásica situación de la construcción de caminos. A través de la plataforma se podrán construir los caminos en la búsqueda de los 15 totales, que ya se han mencionado que es la solución final. Con el uso de esta sección, se puede trabajar con los y las estudiantes proponiéndoles primero la situación, intentando buscar intuitivamente una respuesta, que pueda ponerse en acción a través del software, o simplemente plantear la sección de LABAPC, y una vez de un tiempo adecuado escuchar las dificultades, fortalezas, y estrategias empleadas.