



UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA UNIDAD DE CURVAS PLANAS DE LA
ACTIVIDAD CURRICULAR “TALLER DE GEOMETRÍA DE CURVAS Y
SUPERFICIES” (PLAN DE ESTUDIOS 2019) DE LA CARRERA LICENCIATURA
EN EDUCACIÓN EN MATEMÁTICA Y PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA CON
MENCIÓN EN ESTADÍSTICA EDUCACIONAL O INFORMÁTICA EDUCATIVA**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN
MATEMÁTICA Y PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN
INFORMÁTICA EDUCATIVA**

AUTORES:

FELIPE IGNACIO ALVARADO BOLADOS

NICOLE ALEXANDRA URRUTIA URRUTIA

PROFESORA GUÍA:

ISABEL SILVANA BERNA SEPULVEDA

SANTIAGO DE CHILE, 28 DE SEPTIEMBRE DEL 2021



UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA UNIDAD DE CURVAS PLANAS DE LA
ACTIVIDAD CURRICULAR “TALLER DE GEOMETRÍA DE CURVAS Y
SUPERFICIES” (PLAN DE ESTUDIOS 2019) DE LA CARRERA LICENCIATURA
EN EDUCACIÓN EN MATEMÁTICA Y PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA CON
MENCIÓN EN ESTADÍSTICA EDUCACIONAL O INFORMÁTICA EDUCATIVA**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN
MATEMÁTICA Y PEDAGOGÍA EN MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN
INFORMÁTICA EDUCATIVA**

AUTORES:

FELIPE IGNACIO ALVARADO BOLADOS

NICOLE ALEXANDRA URRUTIA URRUTIA

PROFESORA GUÍA:

ISABEL SILVANA BERNA SEPULVEDA

SANTIAGO DE CHILE, 28 DE SEPTIEMBRE DEL 2021

2021, Felipe Ignacio Alvarado Bolados, Nicole Alexandra Urrutia Urrutia

Se autoriza la reproducción total o parcial de este material, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, siempre que se haga la referencia bibliográfica que acredite el presente trabajo y sus autores.

Dedico esta tesis a:

Lady Johana Bolados Godoy, mi madre y amiga

Miguel Armando Alvarado Meneses, mi padre y amigo

A mi compañera y amiga en la carrera y este proceso Nicole Alexandra Urrutia Urrutia

Isabel Silvana Berna Sepúlveda, profesora y amiga

A todos ellos y ellas, muchas gracias

Felipe Ignacio Alvarado Bolados.

Dedico esta tesis a:

*Mis hermanos, Marcelo, Almendra, Felipe y Vicente, quienes en mi vida siempre han sido los
cuatro pilares más importantes.*

*Mi compañero y amigo en este proceso, Felipe Ignacio Alvarado Bolados, quien llamarlo
compañero es poco.*

Isabel Silvana Berna Sepúlveda, profesora y amiga

Muchas gracias

Nicole Alexandra Urrutia Urrutia

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres por su infinito apoyo en mi proceso universitario, brindándome la posibilidad de estudiar lejos y aguantando día a día a mi lado. Agradezco también a mis amigos dentro y fuera de la universidad especialmente a Javiera por entregarme siempre una palabra de apoyo y darme ánimos para seguir adelante. Y a Karen quien me ha regalado todo su cariño y ánimo para finalizar de la mejor manera este proceso. Finalmente agradecer a mi compañera y amiga Nicole y mi profesora Isabel, gracias a ustedes todo esto es posible y con ustedes aguantamos y sacamos adelante todo esto.

Felipe Ignacio Alvarado Bolados.

Agradezco a mis padres por apoyarme en este proceso. También agradezco a quienes he conocido en este proceso, en especial a Sebastián y José, quienes me ayudaron y animaron muchas veces a lo largo de la carrera. A las profesoras Marcela e Isabel, quienes confiaron en mí y me brindaron herramientas en los momentos que más lo necesitaba, siendo la profesora Isabel uno de los apoyos para sacar adelante este trabajo. Por último, a mi compañero y amiga Felipe, quien ha estado cuando lo he necesitado, brindándome su apoyo y su cariño.

Gracias a todos ustedes y a quienes me faltaron por mencionar es que todo esto es posible.

Nicole Alexandra Urrutia Urrutia

IMPORTANTE

En el presente documento se utilizan de manera inclusiva en algunos los términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor”, “el alumno” y sus respectivos plurales (así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo) para referirse a hombres y mujeres.

Esta opción obedece a que no existe acuerdo universal respecto de cómo aludir conjuntamente a ambos sexos en el idioma español, salvo usando “o/a”, “los/las” y otras similares, y ese tipo de fórmulas supone una saturación gráfica que puede dificultar la comprensión de la lectura.

Índice

Índice	v
Listado de tablas	vi
Listado de figuras	vi
RESUMEN	ix
PALABRAS CLAVE:	x
Introducción	1
Capítulo I: Planteamiento del problema	2
Antecedentes y justificación.	2
Capítulo II: Objetivos de la Investigación y Justificación de la Investigación	5
Capítulo III: Marco Teórico	6
Constructivismo	6
Retroalimentación en evaluación sumativa, formativa y mixta	8
Registro de representaciones semióticas	10
Capítulo IV: Marco Metodológico	13
Contexto	13
Contexto de la universidad	14
Contexto de la carrera	15
Contexto del curso	15
Descripción de la Actividad Curricular	16
Análisis del curso y sus competencias	17
Capítulo V: Representación de Resultados y Discusión	19
Encuesta uso de recursos TIC	19
Encuesta de apreciación, Taller de geometría de curvas y superficies	24
Análisis de los módulos de aprendizaje en clases sincrónicas.	35
Actividades evaluadas y sus aspectos a destacar	39
Capítulo VI: Conclusiones y Proyección	46
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	48
Anexos	50
Tablas	50
Encuestas	62

Encuesta diagn3stica - Encuesta uso de recursos TIC	62
Encuesta de apreciaci3n, Taller de Geometr3a de curvas y superficies	73
Unidad 1 - Curso Taller de Geometr3a de Curvas y Superficies	79

Listado de tablas

Tabla 1 - Pasos de la comparaci3n para las evaluaciones sumativa y formativa Taras (2005:473)	9
Tabla 2 - <i>Programa de estudio de A.C. Taller de Geometr3a Curvas y Superficies.</i>	16
Tabla 3 - Programa de estudio de 7° b3sico a 2° medio. PROGRESI3N DE OBJETIVOS DE APRENDIZAJE.	50
Tabla 4 - Programa de estudio de 7° b3sico a 2° medio. Habilidades.....	55
Tabla 5 - Programa de estudio de 3° medio - Formaci3n general.	56
Tabla 6 - Programa de estudio de 4° medio - Formaci3n general	57
Tabla 7 - <i>Programa de Estudio 3° y 4° - Humanista Cient3fico, Geometr3a 3D.</i>	59

Listado de figuras

Figura 1 - Respuesta pregunta 1	19
Figura 2 - Respuesta pregunta 2	20
Figura 3 - Respuesta pregunta 3	20
Figura 4 - Respuesta pregunta 4	21
Figura 5 - Respuesta pregunta 5	21
Figura 6 - Respuesta pregunta 6	22
Figura 7 - Respuestas preguntas 8 y 9	23
Figura 8 - Respuesta pregunta 2	25
Figura 9 - Respuesta pregunta 3.1	26

Figura 10 - Respuesta pregunta 3.2	26
Figura 11 - Respuesta pregunta 4	27
Figura 12 - Respuesta pregunta 5	28
Figura 13 - Respuesta pregunta 6.1	29
Figura 14 - Respuesta pregunta 6.2	30
Figura 15 - Respuesta pregunta 8	31
Figura 16 - Respuesta pregunta 8.1	32
Figura 17 - Respuesta pregunta 8.2	32
Figura 18 - Respuesta pregunta 9	34
Figura 19 - Funciones explícitas e implícitas (parte teórica).....	36
Figura 20 - Funciones explícitas e implícitas (trabajo práctico individual, con intervenciones de la profesora)	37
Figura 21 - Funciones explícitas e implícitas (Utilización de GeoGebra para visualizar las prácticas guiadas)	37
Figura 22 - Núcleo de Aprendizajes (Material subido a la plataforma)	38
Figura 23 - Control de preparación para prueba n° 1	39
Figura 24 - Pregunta indagatoria sobre curvas exponenciales	40
Figura 25 - Trabajo escueto sin mayor detalle y fuera de lo solicitado en el enunciado.....	41
Figura 26 - Trabajo con un nivel medio de logro	42
Figura 27 - Trabajo con nivel de completo de logro	43
Figura 28 - Respuesta que muestra un trabajo fuera de lo solicitado en el enunciado	44
Figura 29 - Continuación de la respuesta en una hoja anexa, fuera de lo solicitado en el enunciado	45

RESUMEN

Esta tesina está enfocada en la creación de una propuesta didáctica, bajo la utilización de módulos de aprendizaje para la Actividad Curricular “Taller de Geometría de Curvas y Superficies” del año 2021. En este documento se presenta la base teórica que respalda la utilización de módulos de aprendizaje para generar instancias de evaluación sumativa y formativa y la importancia de los diferentes registros de representaciones semióticas que posibilitan una comprensión extensa de los objetos matemáticos.

Se agrega en este documento la experiencia de implementación y resultados obtenidos de dichos módulos de aprendizaje y los posibles caminos a considerar para su ajuste y perfeccionamiento en versiones futuras.

También se presentan los inconvenientes a los cuales se vio enfrentado el trabajo, las discusiones emanadas al considerar los aspectos fundamentales del estudio de la pedagogía como lo son el trabajo individual, compartido y el compromiso por la propia enseñanza.

Se espera que todo lo aquí investigado quede como referente para futuros trabajos con estos módulos de aprendizaje, utilizando a conveniencia el material creado para su implementación o apoyo en la docencia y práctica individual de carácter asincrónico.

ABSTRACT

This dissertation is focused on the creation of a didactic proposal, under the use of learning modules for the Curricular Activity "Taller de geometría de Curvas y Superficies" of the year 2021. This paper presents the theoretical basis that supports the use of learning modules to generate summative and formative evaluation instances and the importance of the different registers of semiotic representations that enable a comprehensive understanding of mathematical objects.

This paper adds the implementation experience and results obtained from these learning modules and the possible ways to consider for their adjustment and improvement in future versions.

It also presents the disadvantages faced by the work, the discussions emanated when considering the fundamental aspects of the study of pedagogy such as individual and shared work, and the commitment to teaching itself.

It is hoped that everything investigated here remains as a reference for future work with these learning modules, using the material created for its implementation or support in teaching and individual practice of asynchronous character.

PALABRAS CLAVE:

PALABRAS CLAVE: Educación, geometría, visualización, acompañamiento, software.

KEY WORDS: Education, geometry, display, accompaniment, software.

Introducción

Desde hace muchos años, algunos de los pilares de la pedagogía remarcan la importancia de comprender los diferentes contextos educativos, de generar aprendizajes bajo nuevas metodologías de enseñanza-aprendizaje y formas didácticas de entregarlos, amoldarlos y evaluarlos. Bajo estas nociones, acompañado de la presente situación sanitaria y enfocando la enseñanza bajo las miradas de la UMCE y de los modelos emanados de MINEDUC, se busca crear módulos de aprendizaje que respondan a los criterios oficiales de la casa de estudios y a la importancia de la geometría en el colegio, su comprensión y su trabajo para retomar la importancia de la visualización de objetos matemáticos.

Paralelo a esto se presenta una base teórica que sustenta la idea de comprensión de objetos matemáticos fuera de la visualización sólo algebraica, brindando peso a la representación natural que podemos encontrar en los enunciados de diversos ejercicios, como a la representación gráfica de los objetos matemáticos. Todo esto permitiendo una comprensión extensa del objeto matemático y un buen tratamiento del mismo.

Se trabaja bajo una metodología cualitativa, comprendiendo que el análisis de la enseñanza-aprendizaje está sujeta a apreciaciones, opiniones, críticas y visiones personales y colectivas, difícilmente cuantificables. Se muestra también que, como metodología, el trabajo siempre está ligado al contexto de la universidad, de la carrera y del curso en cuestión, apuntando siempre al enlace con el contexto y la transformación del conocimiento reaccionando a las demandas y necesidades del mismo.

El diseño de este trabajo responde a la idea de mejorar la forma en que se entregan los conocimientos, permitiendo el trabajo con TICs y la utilización de plataformas, avanzando en tecnología y en acompañamiento del aprendizaje, entendiendo la pedagogía como constructivista y ahondando en las diferentes maneras de evaluar.

Capítulo I: Planteamiento del problema

Antecedentes y justificación

En el 2007, Fernández y Muñoz planteaban que “A pesar de lo inmovilista que suele ser el mundo educativo (en el que en muchos casos seguimos utilizando las herramientas y procedimientos didácticos que se utilizaban hace siglos), es indudable que las T.I.C. también están influyendo en modificar los métodos de la enseñanza”. Hoy en día, fuera de la intención de guiar los procesos educativos con TIC, nos vemos enfrentados a la obligación de hacerlo. Esto debido a la situación sanitaria derivada del virus SARS-CoV2. Según la Asamblea General Consejo Económico y Social de las Naciones Unidas (2021) “Los colegios y los institutos han cerrado sus establecimientos y muchos jóvenes han recibido educación en línea.”

Junto con esto, dentro de la malla nueva de carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Pedagogía en Matemática (con menciones), creada el año 2019 existe el curso llamado “Taller de Geometría de Curvas y Superficies”, curso que por malla corresponde al 4to semestre de la carrera.

Según el programa del curso Taller de Geometría de Curvas y Superficies de la Línea de Geometría (2019), lo describe de la siguiente manera:

Esta actividad curricular del área Desarrollo del Pensamiento y el Conocimiento Matemático, es de tipo teórico-práctico. Profundiza en el estudio de “la forma”, con el fin de que el estudiante reconozca el uso de la Geometría en otras ramas de la Matemática como su presencia en la naturaleza, la ciencia, la tecnología, el arte, etc. (p. 2)

A su vez, el programa menciona las competencias de egreso correspondientes a el curso, las cuales son:

- Competencia Sello Institucional:

CS1 N2 CRI Criticidad: Descompone en sus elementos constitutivos la realidad educativa desde el rol docente como transformador social.

- Competencia Genérica:

CG1 N2 RP: Uso pedagógico de recursos digitales: Utiliza recursos digitales educativos y de productividad aplicables a su especialidad en diversos contextos.

- Competencia Específica:

CE1 N2 M: Deduce proposiciones formales desde matematizaciones de contextos condicionados y problematizados de la realidad.

CE3 N2 LP: Implementa estrategias para derivar proposiciones nuevas o equivalentes a partir de otras dadas

CE4 N2 UTE: Implementa el uso de TICs en los procesos de enseñanza para el aprendizaje de la matemática. (Línea de Geometría, 2019, pp 2-3)

El curso se encuentra ligado al área de Geometría, área de las matemáticas que ha sufrido una serie de transformaciones en cuanto a su enseñanza-aprendizaje a medida que pasan los años. Como lo menciona Davis en Marmolejo y Vega (2012) “La historia de las matemáticas entre los siglos XVII y gran parte del XX puso en evidencia una "desvisualización" o "desespacialización" en la geometría” pero con la aparición de los computadores gráficos y los programas informáticos, volcaron el interés en la importancia que juega la visualización de la geometría. Marmolejo y Vega (2012) mencionan también que “En la actualidad, existe una tendencia cada vez más fuerte a reconocer la gran importancia y el especial interés de la visualización en el aprendizaje y en la enseñanza de las matemáticas”

Hoy en día, el Ministerio de Educación (MINEDUC) menciona que, para el eje de geometría, “se espera que los estudiantes aprendan a reconocer, visualizar y dibujar figuras, y a describir las características y propiedades de figuras 2D y 3D en situaciones estáticas y dinámicas. Se entregan algunos conceptos para entender la estructura del espacio y describir con un lenguaje más preciso lo que ya conocen en su entorno. El estudio del movimiento de los objetos -la reflexión, la traslación y la rotación- busca desarrollar tempranamente el pensamiento espacial de los alumnos.”

También debemos mencionar algunos puntos del programa de estudio de matemática. En concordancia con nuestra carrera, solo se consideraron los contenidos de geometría y/o álgebra de séptimo básico a cuarto medio.

En la sección de anexos, se muestran los Objetivos de Aprendizaje (OA), las habilidades y las actitudes presentes en el currículum escolar, ligadas al trabajo y estudio de geometría, principalmente al modelamiento de curvas y/o superficies, y la importancia del uso de softwares educativos para su comprensión. Al analizar cada uno de los objetivos de aprendizajes, habilidades y aptitudes mencionadas en cada una de las tablas de 7° básico a 4° medio. Se puede evidenciar la preocupación de que los estudiantes sepan representar y modelar las figuras geométricas, cuerpos geométricos, funciones, etc. presentes dependiendo el nivel. Como otro punto a destacar es que, en gran parte de los niveles, en especial a los de enseñanza media, se espera que los estudiantes sepan representarlas de manera visual utilizando algún software educativo. Por lo que si bien, los contenidos evidenciados del programa de estudio del MINEDUC, no se ven directamente relacionados en el Taller de Geometría de Curvas y Superficies, si se refleja en este la importancia de modelar y representar, algo que nos sirve a futuro para nuestra profesión. Además, al utilizar diversos softwares educativos, nos ayuda a conocer, aprender y descubrir nuevos programas que nos pueden ser útiles al momento de realizar nuestras clases.

Lo anterior mencionado nos lleva a idear una modalidad de enseñanza, que pueda brindar un material didáctico acorde a las necesidades de los y las estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática. También, este material debe estar enfocado a la concepción de geometría en la actualidad, la cual gira en torno a la visualización de los contenidos por medio de diversos softwares educativos, con una evaluación más allá de las pruebas estandarizadas a las cuales como estudiantes y profesores estamos tan acostumbrados.

Capítulo II: Objetivos de la Investigación y Justificación de la Investigación

Objetivo general

Diseño de una propuesta didáctica para abordar una unidad del curso taller de curvas y superficies para el desarrollo de las competencias declaradas en el curso.

Objetivos específicos

Analizar el programa del curso taller de curvas y superficies, para así encontrar un tema específico donde desarrollar la propuesta didáctica.

Revisar los métodos de enseñanza en modalidad sincrónica y asincrónica para el diseño propuesta didáctica.

Seleccionar de las distintas aplicaciones de uso de TIC en la educación que sean de carácter gratuito y de fácil acceso, para elaboración de la propuesta didáctica.

Organizar y planificar en un espacio virtual el material diseñado de la propuesta didáctica.

Capítulo III: Marco Teórico

El marco teórico que respalda esta tesina contempla varias concepciones del aprendizaje estudiantil, basándose principalmente en el Constructivismo y en las nociones de Evaluación sumativa, formativa y mixta.

Constructivismo

Primero debemos remontarnos a las concepciones iniciales del Constructivismo, llevadas a cabo por Piaget. Según Olmedo y Farrerons (2017) “Piaget da mayor importancia al proceso interno de razonamiento que a la manipulación externa. Por ende, se reconoce la influencia ejercida tanto por los sentidos como por la razón.” (p.9). Considera el constructivismo como un proceso de aprendizaje de construcción interna, activa e individual que supone una adquisición sucesiva de estructuras mentales más organizadas y complejas.

Comentan también que el constructivismo plantea que el sujeto va avanzando en el proceso intelectual, resultado de una construcción en la que participa de forma activa la persona.

En pensamiento de Piaget sobre el aprendizaje de un sujeto se resume en los siguientes puntos

1. Es un proceso de construcción activa por parte del sujeto, el cual mediante su actividad física y mental determina sus reacciones ante la estimulación ambiental.
2. No depende solo de la estimulación externa, también está determinado por el nivel de desarrollo del sujeto.
3. Es un proceso de reorganización cognitiva.
4. Las relaciones sociales favorecen el aprendizaje siempre que produzcan contradicciones que obliguen al sujeto a reestructurar sus conocimientos.
5. La experiencia física es una condición necesaria para que se produzca el aprendizaje, pero no es suficiente; se necesita además la actividad mental. (Piaget en Olmedo y Farreons, 2017, p.10)

Pero el constructivismo no se quedó estancado en las ideas de Piaget, y son los nuevos autores quienes nos brindan nuevas concepciones que dan un sustento aún más cercano a las bases de nuestro trabajo.

Olmedo y Farrerons (2017) nos comentan de la Teoría Construccionalista del Aprendizaje. Esta teoría nos lleva a “utilizar un modelo de trabajo en el que se establezca un proceso de interiorización de elementos externos y exteriorización de elementos internos por parte de alumnos y profesores, imprimiendo el sello personal en la creación.” (p.11)

Esta teoría nos lleva al trabajo con herramientas tecnológicas, que facilitan la adquisición de habilidades y permiten un ambiente en donde podemos construir, inventar y diseñar proyectos, los que permitirán una exteriorización de las ideas propias, mencionadas anteriormente por la teoría.

Otro gran exponente de las ideas constructivistas es Vigotsky, quien lleva las concepciones constructivistas hacia la idea de que un alumno es capaz de aprender una serie de aspectos bajo cierto nivel de desarrollo, pero que existen también ciertos aspectos que deben ser facilitados por un adulto o una persona de su mismo nivel más aventajada. (Olmedo y Ferrerons, 2017) Esta concepción permite comprender que el constructivismo no es solo construir su conocimiento y exteriorizar, sino también es compartirlo desde personas con un manejo más avanzado de diferentes áreas de estudio y de la interacción con los demás del mismo rango etario o nivel de conocimiento.

Todas estas ideas convergen y toman fuerza con una nueva concepción acuñada por Ausubel, quien plantea el aprendizaje significativo, identificando los roles que juegan los conocimientos previos en la construcción y adquisición de conocimientos de los estudiantes. Según Olmedo y Farrerons (2017):

Este autor estima que aprender significa comprender y para ello es condición indispensable tener en cuenta lo que el alumno ya sabe sobre aquello que se le quiere enseñar y propone la necesidad de diseñar para la acción docente lo que llama «organizadores previos», una especie de puentes cognitivos o anclajes, a partir de los cuales los alumnos puedan establecer relaciones significativas con los nuevos contenidos. Defiende un modelo didáctico de transmisión-recepción significativo que supere las deficiencias del modelo tradicional al tener en cuenta el punto de partida de los estudiantes y la estructura y jerarquía de los conceptos. (p.13)

Retroalimentación en evaluación sumativa, formativa y mixta

Al hablar de evaluación, primero debemos considerar que existen dos tipos de evaluaciones, ambas utilizadas frecuentemente al momento de evaluar, pero que en textos se consideran cómo dos modalidades de evaluación completamente diferentes, una de ellas es la evaluación formativa y la otra es la evaluación sumativa. Para efectos de las evaluaciones realizadas para esta tesis, utilizaremos evaluaciones de carácter mixto la cual tendrá una retroalimentación. Pero, antes de explicar cómo se realizará este tipo de evaluación, abordaremos el concepto de evaluación formativa y sumativa.

Primero definiremos la evaluación formativa, según Black et al, 2009 (cómo se cita en MINEDUC), la función de este tipo de evaluación es:

La evaluación cumple principalmente un propósito formativo en la medida en que se utiliza para monitorear y acompañar el aprendizaje de las y los estudiantes, es decir, cuando la evidencia de sus desempeños se obtiene, interpreta y usa por docentes y estudiantes para tomar decisiones acerca de los siguientes pasos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. (p. 9)

En otras palabras, la evaluación formativa se puede utilizar para un tipo de educación más constructivista, en donde el estudiante si bien es evaluado, se realiza para poder ver su avance a lo largo del proceso.

Por otro lado, Sadler 1989 (cómo se cita en Garcia-Jiménez et. al, 2015) menciona que:

La evaluación formativa tiene que ver con las valoraciones acerca de la calidad de las respuestas del estudiante (actuaciones, ejercicios o trabajos) que pueden ser utilizadas para desarrollar y mejorar la competencia del estudiante cortocircuitando la aleatoriedad e ineficiencia del aprendizaje por ensayo y error. (p. 4)

Ambos autores hablan de la utilización de una evaluación, para observar y analizar el avance de los estudiantes, por otro lado, la evaluación sumativa según Masters, 2015; Newton 2007 (cómo se citó en MINEDUC), menciona que “la evaluación cumple principalmente un propósito sumativo cuando se utiliza para certificar los aprendizajes logrados, lo que generalmente se comunica mediante una calificación. No obstante, ambos propósitos no son excluyentes” (p. 9)

Las definiciones de la evaluación formativa y sumativa mencionan conceptos y propósitos diferentes, pero ambas pueden ser utilizadas en conjunto cómo una evaluación mixta utilizando una retroalimentación. Según la Tabla 6, ambas evaluaciones miden conocimiento, una mediante observaciones y otra mediante calificaciones, pero lo que las une es el uso de retroalimentación el cual es utilizado para recopilar, comparar y evaluar una prueba. También se menciona que la retroalimentación sólo se puede utilizar después de una evaluación sumativa, pero al comparar estos resultados obtenidos con el resultado esperado, se termina convirtiendo en una evaluación formativa de carácter sumativo, es decir, una evaluación mixta.

Tabla 1 - Pasos de la comparación para las evaluaciones sumativa y formativa Taras (2005:473)

Scriven 1967	Sadler 1989
1. un conjunto ponderado de escalas orientadas a una meta	1. concepto de estándares, metas o niveles de referencia
2. que recogen y combinan datos de rendimiento	2. comparan el nivel actual con el estándar
3. para generar ya sean clasificaciones numéricas o comparativas	
4. fundamentada en a) los instrumentos de recogida de datos b) las ponderaciones c) la selección de las metas	
$1 + 2 + 3 + 4 = ES$	$1 + 2 = ES$ La retroalimentación es posible únicamente después de la ES
	3. Actuación apropiada para cerrar la brecha entre el nivel actual y el estándar $1 + 2 + 3 = EF$
FUENTE: Obtenido de García Jiménez, E. (2015). La evaluación del aprendizaje: de la retroalimentación a la autorregulación. El papel de las tecnologías. NOTA: ● ES = Evaluación Sumativa ● EF = Evaluación Formativa	

Paralelo a las concepciones constructivistas y al proceso evaluativo de los y las estudiantes, es necesario estudiar cómo comprenden las diferentes concepciones matemáticas, basado en los distintos modos de representación, presentes en todo estudio de un objeto matemático y sobre todo en el estudio de curvas y superficies.

Registro de representaciones semióticas

Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen, Gorrochategui (2012) señalan la definición de Duval referente al aprendizaje de la matemática donde se menciona que “es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión” (p.13) pero para el cumplimiento de las diferentes actividades cognitivas, se requiere de un conjunto de representaciones semióticas, de la capacidad de transitar a través de ellos y de poder elaborar actividades que propicien su utilización, permitiendo una comprensión del objeto matemático y una interpretación satisfactoria de los diferentes problemas a los cuales se vea enfrentado un estudiante.

Estas representaciones las encontramos en toda la matemática, para mencionar algunos casos, encontramos sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para objetos, lenguaje natural para enunciados, relaciones entre números o incluso definiciones de los mismos, también figuras geométricas para los gráficos, diagramas, etc. Cada uno de los lenguajes o recursos utilizados para representar objetos matemáticos constituye una forma de representación semiótica y el entendimiento, la coordinación y trabajo con diferentes representaciones de un objeto desde diferentes representaciones, nos permite comprender el objeto matemático en su totalidad.

Esta tesina está enfocada en poder comprender cómo se comportan las curvas y superficies, y enlazado a lo anterior, es necesario conocer en profundidad que alberga la representación natural, la representación algebraica y la representación gráfica.

Lo primero, se relaciona directamente con el cómo presentamos los ejercicios o como interpretamos lo que se nos pide, por ejemplo, interpretamos que queremos conseguir las soluciones de una ecuación cuadrática si el enunciado nos menciona que busquemos las raíces, los ceros o las soluciones de la ecuación. Esta representación natural o común, es el primer acercamiento al objeto matemático que queremos trabajar, permitiendo las primeras apreciaciones mentales sobre el mismo, detonando concepciones de cómo debe verse en una gráfica, como debe

ser escrito algebraicamente, que restricciones presenta y cómo podemos concluir para mostrar dominio y entendimiento del objeto de estudio.

La segunda representación que consideramos relevante se relaciona con el estudio de la forma algebraica de los objetos matemáticos. Aquí encontramos los tratamientos en cuanto a fórmulas, al análisis de la notación matemática, a las restricciones si fuese el caso y a la forma más común de concebir una ecuación, utilizada en infinidad de ejercicios, utilizada para explicar incluso conceptos como la pertenencia de un valor a un conjunto numérico. En este tipo de representaciones se construye la mayor cantidad de bibliografía matemática, se construye también la forma más común de presentar los objetos matemáticos y de evaluar los mismos.

Para finalizar nuestra atención se centra en las representaciones geométricas. Esto según Hitt (2003) encadena 2 procesos mentales denominados percepción y visualización que según su definición podemos considerar como:

La percepción la tomaremos como la función por la que la mente de un individuo organiza sus sensaciones y se forma una representación interna de los objetos externos, en cambio, la visualización tiene que ver con un conocimiento directo e intuitivo. Por ejemplo, podemos percibir una mosca que vuela y no prestamos atención a ese hecho, sin embargo, al querer atravesar una calle y vemos un coche que viene hacia nosotros, realizamos un acto de conocimiento directo en términos de evaluar su velocidad y decidir si es conveniente atravesar o no la calle. Esto último, visualizar, generalmente lo hacemos inconscientemente. ¿Es posible desarrollar en nuestros estudiantes habilidades sobre la visualización matemática? (p.216-217)

Nuestra intención es mostrar que, si es posible desarrollar la capacidad de visualización, entregando material que involucre el trabajo de diversas curvas sobre distintos registros de representaciones semióticas, esta idea es presentada también por Hitt (2003) quien nos dice que:

“Si queremos que el estudiante visualice una gráfica, esta tarea demanda una actividad mental más profunda en el sentido de reconocimiento de ciertos subconceptos allí representados. De hecho, desde el punto de vista teórico de Duval, debemos centrar nuestra atención en entender los problemas que surgen al desarrollar una tarea de conversión entre representaciones” (p. 217)

Todo este trabajo permitirá al estudiante intuir lo que debiese ocurrir con las gráficas de una curva entregada de manera algebraica y lo que debiera representar una función cualquiera cuando nos muestran un plano en el cual está graficada, permitiendo identificar componentes y comportamiento al modificar parámetros.

Apoyando esta noción y brindando importancia a la geometría, Ramírez et. al (2013), señala que:

La Geometría ayuda a estimular y ejercitar habilidades de pensamiento y estrategias de resolución de problemas. Da oportunidades para observar, comparar, medir, conjeturar, imaginar, crear, generalizar y deducir. Tales oportunidades pueden ayudar a los estudiantes a aprender cómo descubrir relaciones por ellos mismos y convertirse en mejores resolutores de problemas. Es por ello que es de suma importancia que los docentes de Matemática tomen en consideración la enseñanza de los contenidos geométricos. (p. 217-218)

Capítulo IV: Marco Metodológico

Este trabajo fue diseñado bajo una metodología cualitativa, considerando relevante el proceso de elaboración de esta tesina orientada al contacto con la realidad del objeto de estudio. Tal como lo menciona Quintana (2006) existen distintas técnicas de contacto como “el diálogo propio de la entrevista, la reflexión y la construcción colectiva característica de los talleres, o la vivencia lograda a través del trabajo de campo y la observación participante” (p.3)

Cómo segundo punto a considerar, se plantea una propuesta didáctica, mediante la creación de material de estudio, ejercitación y evaluación para la Actividad Curricular (A.C.) Taller de Geometría Curvas y Superficies. Ambos enfoques son diseñados para cualquier ambiente de enseñanza-aprendizaje, es decir, aula presencial, aula virtual o trabajo autodidacta. Debemos dejar en claro que todo el trabajo llevado a cabo está enfocado en la primera unidad de la A.C. en cuestión.

A continuación, se presentarán los elementos de nuestro proceso metodológico para la formulación de la propuesta. Para ello, es necesario conocer el contexto en donde se implementará el material, las estrategias para la recopilación y elaboración del material y los métodos utilizados para definir conclusiones, discusiones y proyecciones.

Contexto

Es necesario hacer un breve resumen del contexto de la institución educativa donde se realiza la propuesta y el contexto del grupo curso en donde se implementará el material elaborado. Cabe mencionar que esta tesina está relacionada con el uso de softwares educativos, es decir, que además de tener un enfoque pedagógico, también tendrá un enfoque tecnológico, bajo los niveles socioeconómicos de todos y todas los y las estudiantes.

Contexto de la universidad

La Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE), es una institución de educación superior ubicada en la comuna de Ñuñoa, en la ciudad de Santiago, Chile.

Fue fundada en el año 1889, en sus inicios se llamaba Instituto Pedagógico creado por la Universidad de Chile, instituto creado para la formación de docentes, exclusivamente para la enseñanza media (o educación secundaria).

En el año 1981 por intervención política de la dictadura, el Instituto Pedagógico dejó de pertenecer a la Universidad de Chile, y no fue hasta 1986, que es reconocida como universidad bajo el nombre de UMCE.

Desde sus orígenes, es forjada como universidad estatal y es reconocida por el Consorcio de Universidades del Estado de Chile (CUECH) y por el Consejo de Rectores de las Universidades Chilenas (CRUCH), permitiendo vincular su trabajo y líneas de desarrollo con distintas universidades. Por su calidad de universidad estatal y pertenencia al CRUCH, posee beneficios estudiantiles facilitados por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC).

Misión y Visión de la UMCE (2019):

- Misión: La Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación es una institución estatal y pública, cuya misión consiste en servir a los propósitos de la educación, en todas sus manifestaciones, atendiendo, especialmente, la formación profesional docente - inicial y continua - para todos los niveles, sectores y modalidades del sistema educacional chileno. Incluye, además, la relación entre educación y salud; sin perjuicio de otras opciones que le demande la sociedad. Asimismo, la UMCE declara su compromiso de permanente búsqueda de la calidad para el cumplimiento de su tarea universitaria, la que se materializa en el ejercicio de una docencia pertinente, inclusiva, innovadora y actualizada, que se nutre con la investigación científica que le es propia, desde la constante y dinámica interacción con el medio social, cultural y natural.
- Visión: La UMCE aspira a distinguirse como referente significativo de la formación de profesionales de la educación y de áreas afines a su misión en el país, de tal modo que su contribución académica se extienda a una participación influyente en la formulación de

políticas públicas en educación. Para ello, la UMCE interpretará permanentemente las necesidades educativas del país, a través de una investigación de tal calidad que impacte favorablemente en su quehacer académico, y, a la vez, en las condiciones de funcionamiento integral del sistema educativo nacional. (parr. 1-2)

Contexto de la carrera

Licenciatura en Educación Matemática y Pedagogía en Matemática con Menciones, es una carrera perteneciente a la facultad de Ciencias Básicas de la UMCE, específicamente al Departamento de Matemática de la institución educativa antes mencionada. A partir del año 2019, se implementa un nuevo plan de estudios para la carrera, plan bajo el cual será generada esta tesina, respetando las nuevas estrategias didácticas y metodología de enseñanza que este estipula.

Contexto del curso

La tesina, será implementada la Actividad Curricular (A.C.) del nuevo plan de estudio 2019, llamada “Taller de Geometría Curvas y Superficies”, de la Carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Pedagogía en Matemática con Menciones. Dicha A.C. pertenece a la malla nueva de la carrera que se comenzó a impartir el año 2019 y corresponde al cuarto semestre de la carrera, por lo que al segundo semestre del año 2021 será su segunda implementación.

La A.C. tiene dos créditos (SCT) a la semana, de modalidad teórica-práctica, cuyo desarrollo será llevado a cabo con clases en laboratorios de computación y en aula. En esta ocasión por la situación de salud mundial, el curso está siendo llevado a cabo en modalidad online con clases sincrónicas.

Según los nuevos programas del plan de estudio (2019) de la Carrera de Licenciatura en Educación Matemática y Pedagogía en Matemática, se describe el Taller de Geometría Curvas y Superficies. cómo:

Esta actividad curricular del área de especialidad matemática es una asignatura orientada a lo teórico-práctico. Profundizar en el estudio de la forma que capacite al alumno para reconocer la presencia de la Matemática en distintos ámbitos (Naturaleza, Ciencia, Tecnología, Arte...). Esta asignatura facilita al estudiante el interpretar las ecuaciones y en general las fórmulas como objetos visibles, y recíprocamente, estudiar los problemas geométricos de los objetos que vemos por medio de métodos analíticos. Esta asignatura

proporciona pues al estudiante un “diccionario” entre dos “idiomas”: el de las cosas que vemos y el más abstracto de los números y las fórmulas. (p. 22)

Al implementarse de manera online, surgen nuevos focos de interés, tales como la posibilidad de conexión e ingreso a las clases online por parte de los y las estudiantes, la conectividad a lo largo de las diferentes actividades realizadas, los problemas tecnológicos para ingresar a las clases, etc. Para conocer cómo se ha visto afectado el curso con estos nuevos focos de interés o nuevas problemáticas emergentes, se realiza una encuesta al curso taller de curvas y superficies en el año 2020. Esta encuesta tiene un carácter diagnóstico, permitiendo por medio de las preguntas que contiene, entregar información referente a las apreciaciones sobre la A.C., permitiendo crear un módulo de aprendizaje que considere las dificultades que ellos y ellas tuvieron con la utilización de los softwares educativos y con el acompañamiento del curso a medida que avanzó el semestre.

Descripción de la Actividad Curricular

Para la propuesta didáctica, se diseñarán módulos de aprendizaje enfocados en la primera unidad de la A.C. mencionada. Dicha unidad consta de varios temas que son presentados a continuación.

Tabla 2 - Programa de estudio de A.C. Taller de Geometría Curvas y Superficies.

Desglose del núcleo de aprendizaje	● Descripción de curvas en su forma: explícita e implícita. ● Algunas curvas importantes: Circunferencia, Elipse, Parábola y otras curvas bidimensionales. ● Representación gráfica de curvas bidimensionales. ● Representación gráfica de funciones de una variable real. ● Curvas planas definidas mediante ecuaciones paramétricas. ● Curvas planas en coordenadas polares.
Estrategias de enseñanza y aprendizaje	● Aprendizaje basado en problemas tanto de la disciplina como de su enseñanza a través de talleres. ● Aprendizaje cooperativo, reflexivo y contextual (cotidiano, escolar y matemático, entre otros), mediante experimentación, para institucionalizar el saber matemático. ● Clases expositivas, mediante pregunta-respuesta.
FUENTE: Modificado de Línea de Geometría. (2019). PROGRAMA DE ACTIVIDAD CURRICULAR. [Archivo PDF]	

Luego de seleccionar la unidad a trabajar, es necesario investigar la manera de entregar un material que utilice TIC, que permita la visualización de la geometría para enlazar de mejor manera los

conocimientos dentro de sí misma y con las demás áreas matemáticas y cotidianas, es por medio de un módulo de aprendizaje. Esta modalidad de enseñanza, según Mancilla Bustingorry (2005), abarca las siguientes características:

- Tienen en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes.
- Proporcionan oportunidad de construir conocimiento conceptual, procedimental y actitudinal.
- Permiten establecer relación con el entorno natural y sociocultural y, en forma muy especial, con la familia.
- Ofrecen una variada gama de actividades individuales, grupales y colectivas.
- Favorecen las modalidades de evaluación diagnóstica, formativa y sumativa. (p.99)

Esta estructura puede ajustarse a diversas situaciones educativas, presenciales y a distancia, teniendo presente, además, el estudio autodidacta.

Análisis del curso y sus competencias

Al pensar de qué manera se llevará a cabo el módulo de aprendizaje, debemos centrarnos en el análisis del curso y las competencias que este persigue, con el fin de relacionar todo el trabajo realizado. Las competencias, como fueron explicitadas en los antecedentes, contemplan un gran trabajo con las Tecnología de Información y Comunicación (TICs). Por ello los contenidos entregados serán dirigidos al uso de software educativo y las evaluaciones estarán centradas en el manejo de TICs.

El módulo de aprendizaje creado inicia con una descripción de funciones de forma explícita e implícita. Este apartado está enfocado en reconocer las diferentes fórmulas que trabajaremos en las guías de contenidos y de práctica de los y las estudiantes. Este módulo cobra gran relevancia en la comprensión de las curvas en el plano cartesiano, basándose principalmente en la comprensión de los objetos matemáticos bajo diversos sistemas de representaciones semióticas.

Se prosigue con un análisis de curvas importantes considerando necesario el poder guiar el trabajo mediante instrucciones paso a paso, dando el primer acercamiento a la comprensión del trabajo dentro del software educativo GeoGebra con curvas simples o ya vistas dentro de la carrera de matemática. Este tema dentro del módulo logra hilar los conceptos teóricos de representaciones semióticas con un trabajo práctico, brindando sentido a lo estudiado y trabajado.

Seguido a esto, se contemplan tanto las representaciones de curvas bidimensionales como las representaciones de funciones de variable real. Para este trabajo se intenta recordar la forma que tienen las diferentes funciones de variable real y como pueden ser expresadas de manera explícita e implícita, junto con el modo de representarlas en el software educativo. Se hace hincapié en conceptos claves de las funciones de variable real, como lo son la posibilidad de presentar asíntotas, el trabajo de cálculo y de interpretación de asíntotas, tanto para funciones racionales como para exponenciales y logarítmicas, el trabajo con funciones trigonométricas, las cuales nos llevarán por el camino de los cambios de coordenadas y posteriormente nos dan indicios del trabajo de parametrización de curvas.

El curso contempla como parte final la comprensión del trabajo estudiado en el módulo anterior, el cual albergaba las funciones explícitas e implícitas, algunas curvas importantes cómo son las cónicas y las funciones de variable real. En este tema en concreto, el trabajo del módulo anterior será profundizado bajo la parametrización de las curvas, entendiendo el manejo de este contenido para transformar a comodidad las curvas bidimensionales y de variable real, dando espacio a otro contenido fundamental dentro de la carrera que es la comprensión de curvas polares y en un futuro curvas en coordenadas esféricas.

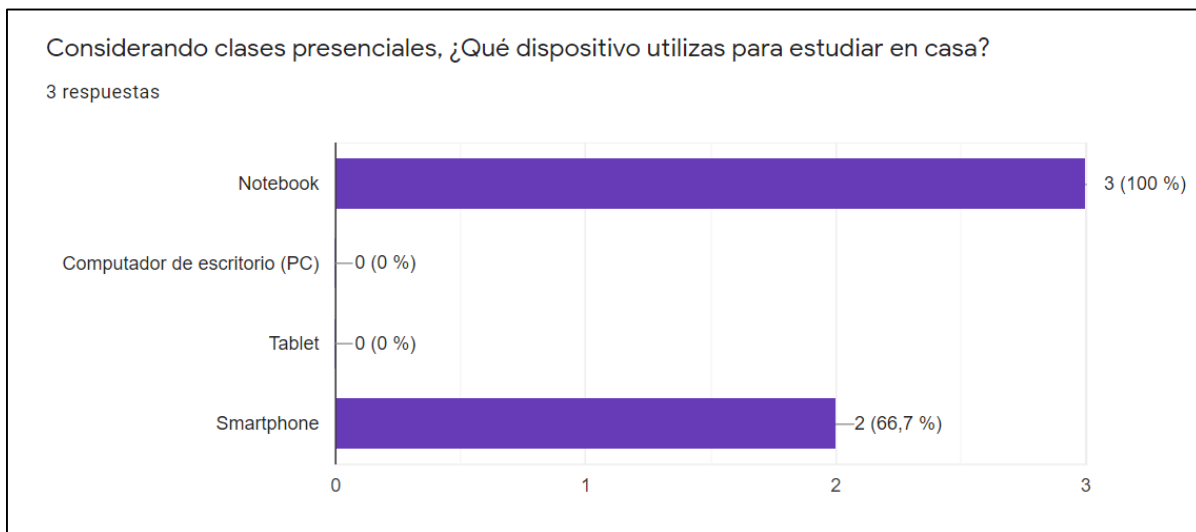
Capítulo V: Representación de Resultados y Discusión

Encuesta uso de recursos TIC

La encuesta fue respondida por 25% estudiantes de la actividad curricular. Si bien es un número bajo, se puede contemplar las dificultades de contexto con la respuesta de la misma. Por un lado, la situación de clases en línea genera mayor carga de trabajo y el cierre de semestre no ayuda a dejar espacios de participación del proceso. Por otro lado, la encuesta no contempla preguntas referentes a contenido, solo a la búsqueda de dificultades con el software y apreciaciones generales del curso.

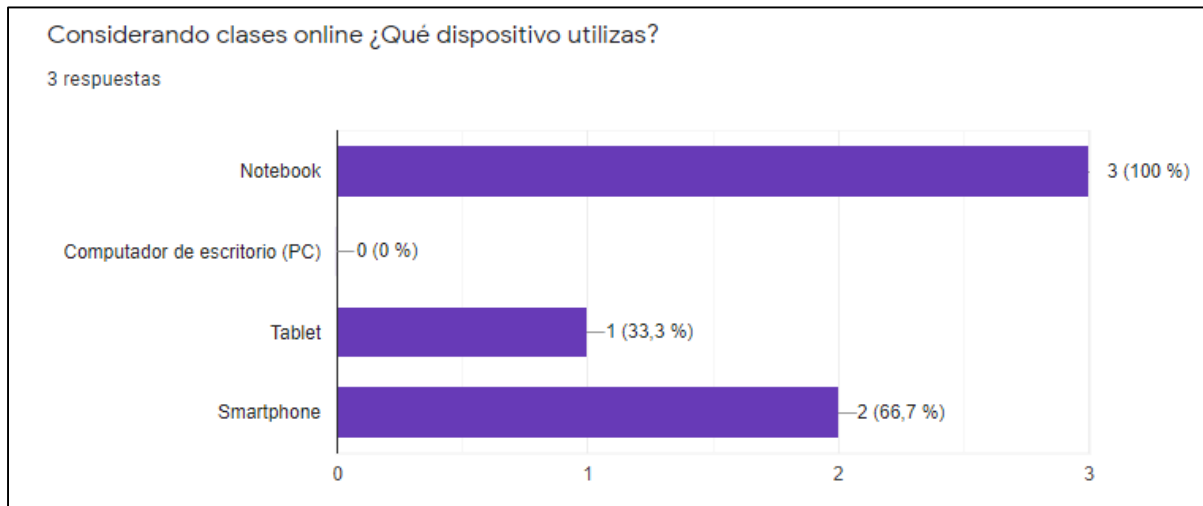
A continuación, se mostrará un detalle de las preguntas, sus gráficas asociadas y reflexiones de cada cual que nos llevan a la toma de decisiones con respecto a la creación del módulo de aprendizaje.

Figura 1 - Respuesta pregunta 1



FUENTE: Creación propia.

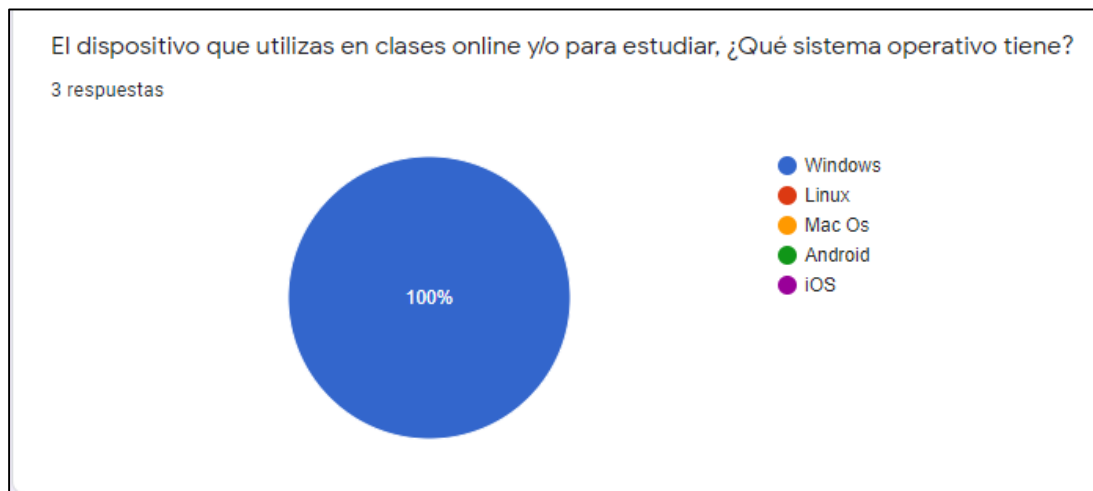
Figura 2 - Respuesta pregunta 2



FUENTE: Creación propia.

Estas preguntas van dirigidas al dispositivo utilizado para estudiar y trabajar tanto en aulas en línea como en modalidad presencial. Nos interesa conocer ambas realidades ya que nos permite generar actividades que contemplen el uso de dispositivos. Podemos notar que lidera la utilización de Notebook personales, por lo cual priorizaremos la utilización de un Software para dicho dispositivo.

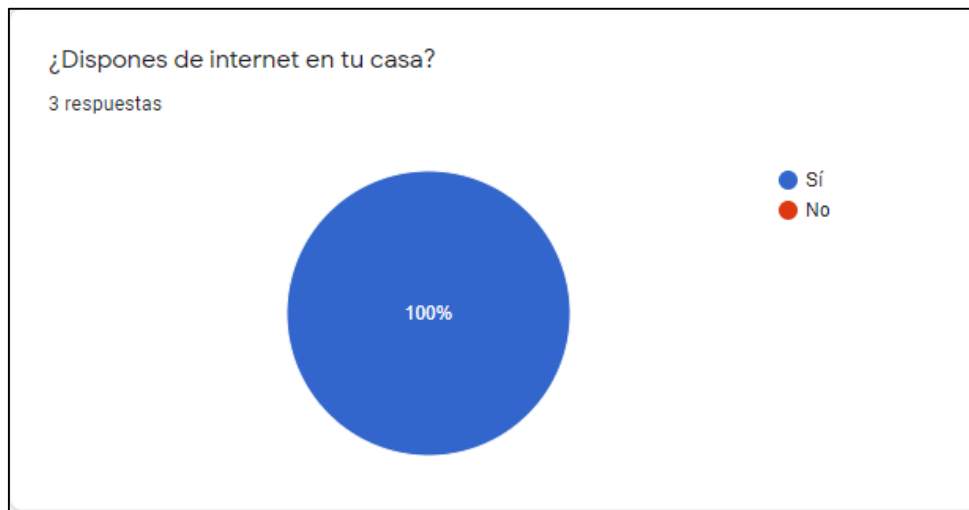
Figura 3 - Respuesta pregunta 3



FUENTE: Creación propia.

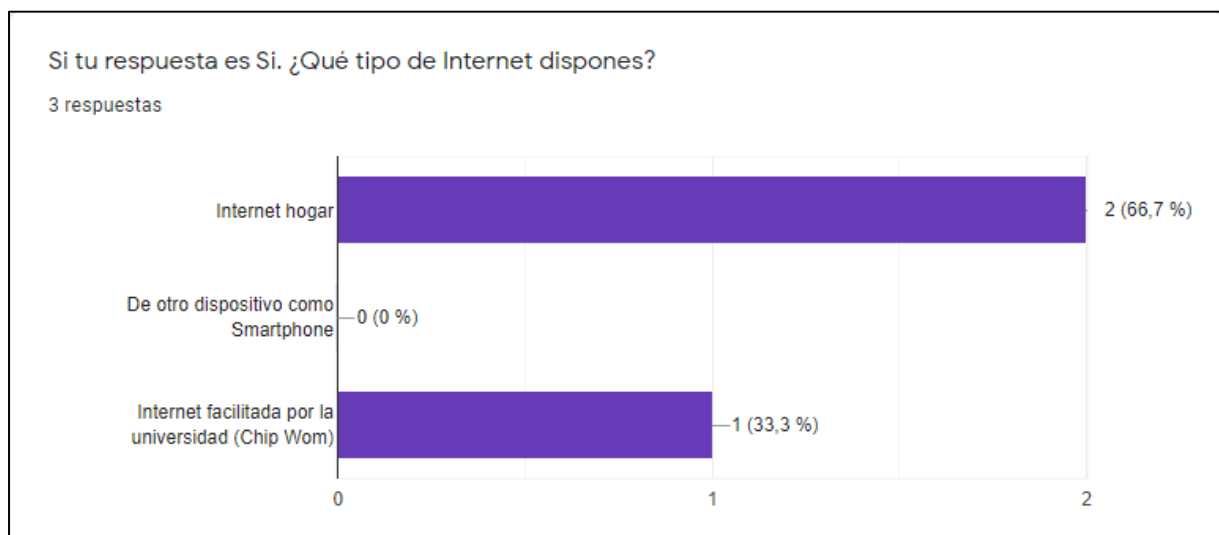
Por medio de la imagen anterior, podemos notar que el dispositivo (Notebook) de cada estudiante contiene un sistema operativo Windows. Esto facilita la instalación del Software GeoGebra sin mayores complicaciones. Debemos considerar que la encuesta fue respondida por un número bajo de personas, por lo cual se generará una guía de instalación para otros sistemas operativos como MacOS y Linux, como también para dispositivos móviles con sistemas operativos como Android y iOS.

Figura 4 - Respuesta pregunta 4



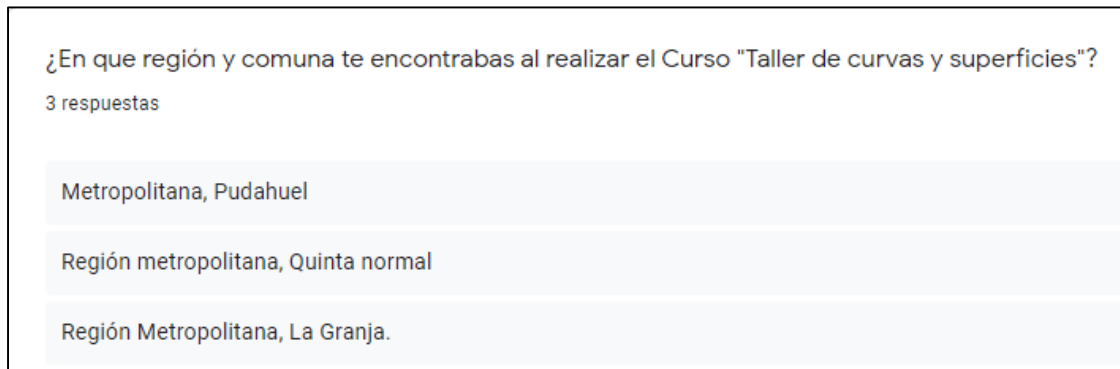
FUENTE: Creación propia.

Figura 5 - Respuesta pregunta 5



FUENTE: Creación propia.

Figura 6 - Respuesta pregunta 6



¿En que región y comuna te encontrabas al realizar el Curso "Taller de curvas y superficies"?

3 respuestas

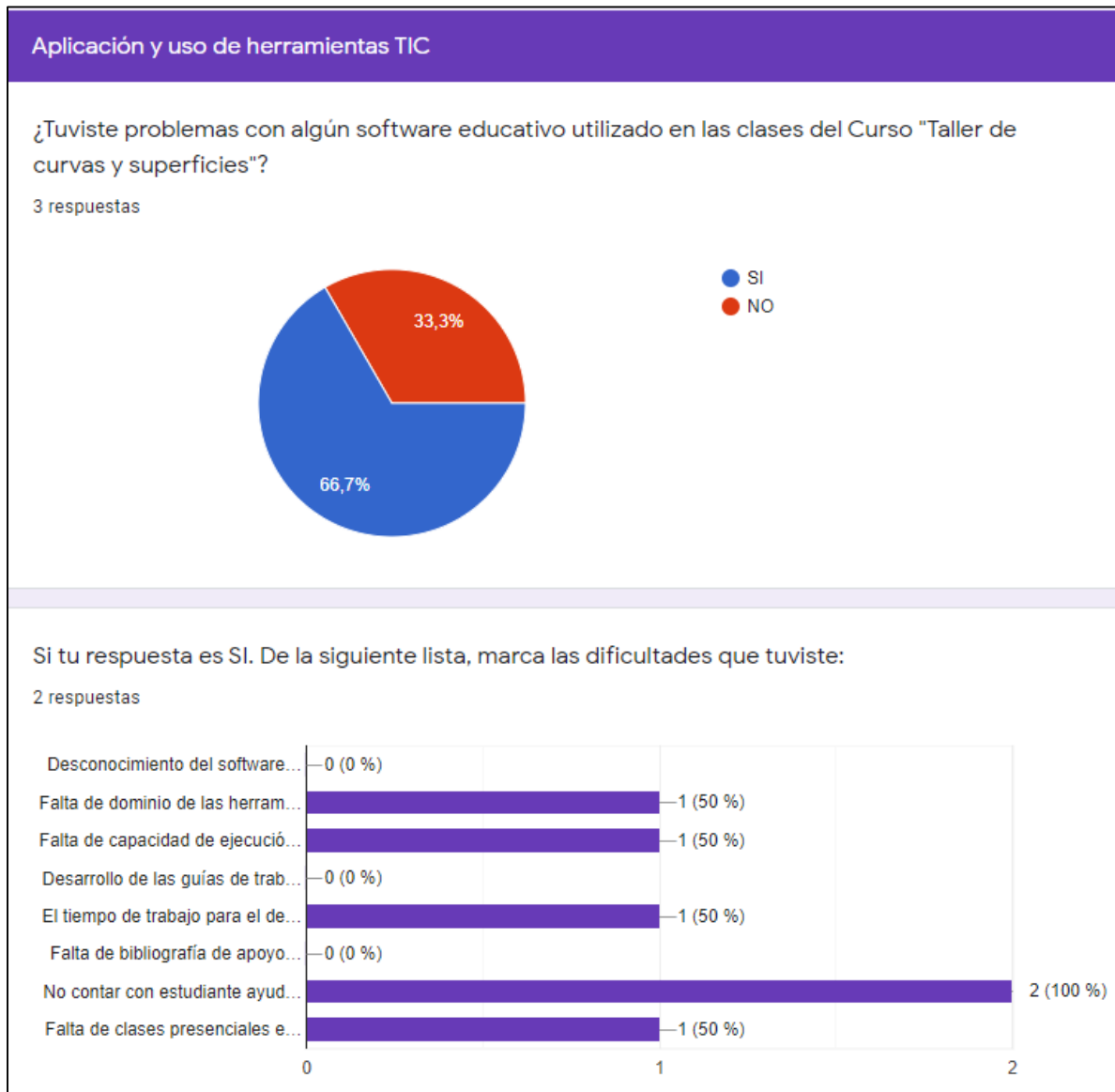
- Metropolitana, Pudahuel
- Región metropolitana, Quinta normal
- Región Metropolitana, La Granja.

FUENTE: Creación propia.

Las 3 imágenes presentadas están enfocadas a conocer la conexión a internet y las características del mismo que posee cada estudiante. Poseer internet es un aspecto relevante en la creación de nuestro módulo de aprendizaje, ya que este será presentado en línea y para tener acceso al contenido que alberga, como también para entregar las tareas o generar discusiones y responder dudas, necesitamos de internet. Podemos notar que todos y todas poseen algún tipo de internet, esto es esperable ya que las distintas casas de estudio han entregado dispositivos para la conexión a internet de las personas que lo requieran debido a la necesidad de brindar contenidos, evaluaciones y clases a distancia.

Cuando pasamos a la segunda parte de la encuesta, referida a la aplicación y uso de herramientas TICs, nos encontramos con lo siguiente:

Figura 7 - Respuestas preguntas 8 y 9



FUENTE: Creación propia.

Podemos notar que 2 de los 3 estudiantes tuvieron problemas con el software utilizado (GeoGebra). Mencionaron que se debe principalmente a la falta de dominio de la herramienta tecnológica, falta de capacidad de ejecución del software educativo y por otra parte tiempo para realizar las actividades y falta de estudiantes que cumpliesen un rol de ayudantes dentro del ramo en cuestión.

Pero cuando se les preguntó por la sugerencia de otro software matemático para la realización de actividades, no respondieron, dando a entender que el único acercamiento que tenemos con la

graficación mediante software es el uso de GeoGebra o cualquier programa similar, pero otorgado por el docente que realiza la clase. Esto está fuertemente relacionado con la baja necesidad de visualizar lo que estamos trabajando, puede ser atribuido a un mal manejo de contenidos, dejando explicaciones más bien algebraicas y de manejo de fórmulas o puede ser la poca innovación en cuanto a ocupar alguna herramienta computacional, presente desde la educación media y universitaria en general.

Finalizando la encuesta, notamos que, al preguntarles por la importancia de los videos orientadores para comprender el contenido y la importancia de tener un documento digital como apoyo a la comprensión, responden como muy necesario. Esto da relevancia al trabajo que quiere ser llevado a cabo, convirtiendo el curso en un módulo de aprendizaje que contemple estas inquietudes y pueda ser un espacio de apoyo a la comprensión, estudio y repaso de diferentes contenidos llevados a cabo en el curso.

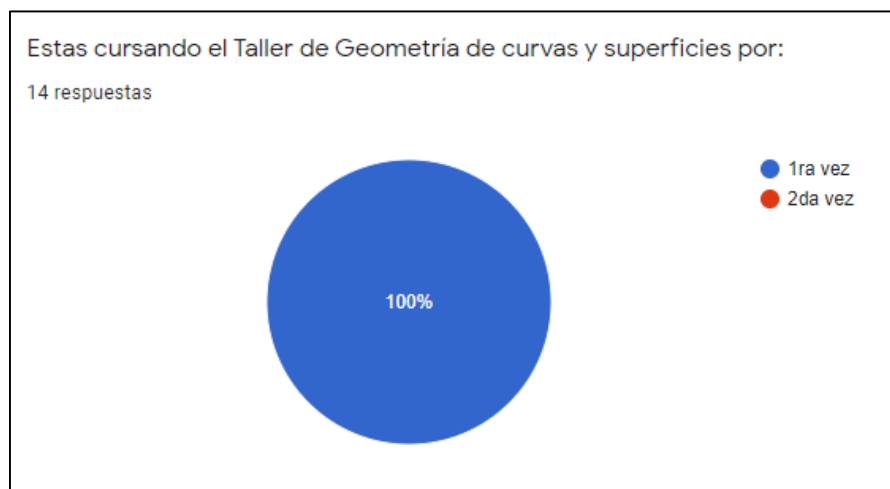
Encuesta de apreciación, Taller de geometría de curvas y superficies

Esta encuesta está enfocada en la recopilación de información del módulo de aprendizaje entregado, con el fin de monitorear el avance de los y las estudiantes en el mismo y permitir conocer sus apreciaciones, sus opiniones y sus críticas, tanto con la manera de llevar a cabo los contenidos como las impresiones generadas por la profesora y por los estudiantes a cargo de esta tesina.

La encuesta fue respondida por el 26,42% de los y las estudiantes pertenecientes a ambas secciones de la A.C. Taller de Geometría de curvas y superficies del primer semestre del año 2021.

Se consideró en primera instancia, preguntar el estado académico de los y las estudiantes que inscribieron esta A.C. es decir, si es su primera vez en la A.C. o no.

Figura 8 - Respuesta pregunta 2



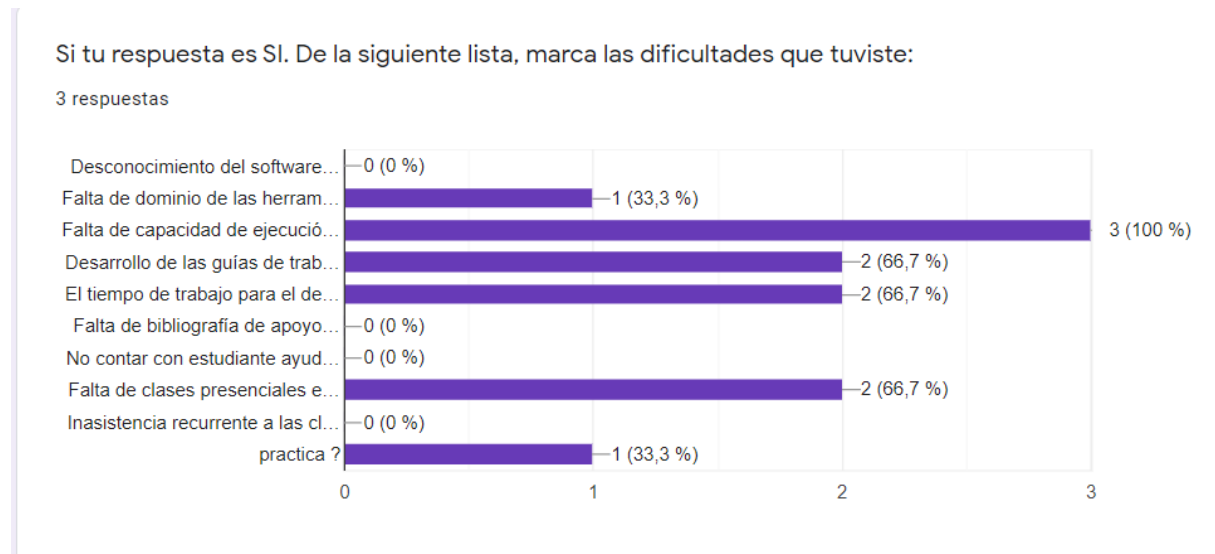
FUENTE: Creación propia.

Como podemos apreciar en la Figura anterior, la totalidad de estudiantes están cursando la A.C. por primera vez. Esto permite definir las posibles reacciones al enfrentarse a contenidos o modalidades de trabajo y permite probar de manera fidedigna si los módulos de aprendizaje diseñados posibilitan la comprensión de contenidos desde cero, mostrando un avance progresivo o, por el contrario, no generan un avance progresivo y se tiene una comprensión desigual entre estudiantes o un avance lento en cuanto al entendimiento de lo dispuesto en los módulos.

Luego, se les realizó a los y las estudiantes, diversas preguntas relacionadas a la aplicación y uso de TIC durante la actividad curricular, el fin de esto es conocer las fortalezas y debilidades que posee el software educativo para la comprensión de nuestro módulo de aprendizaje.

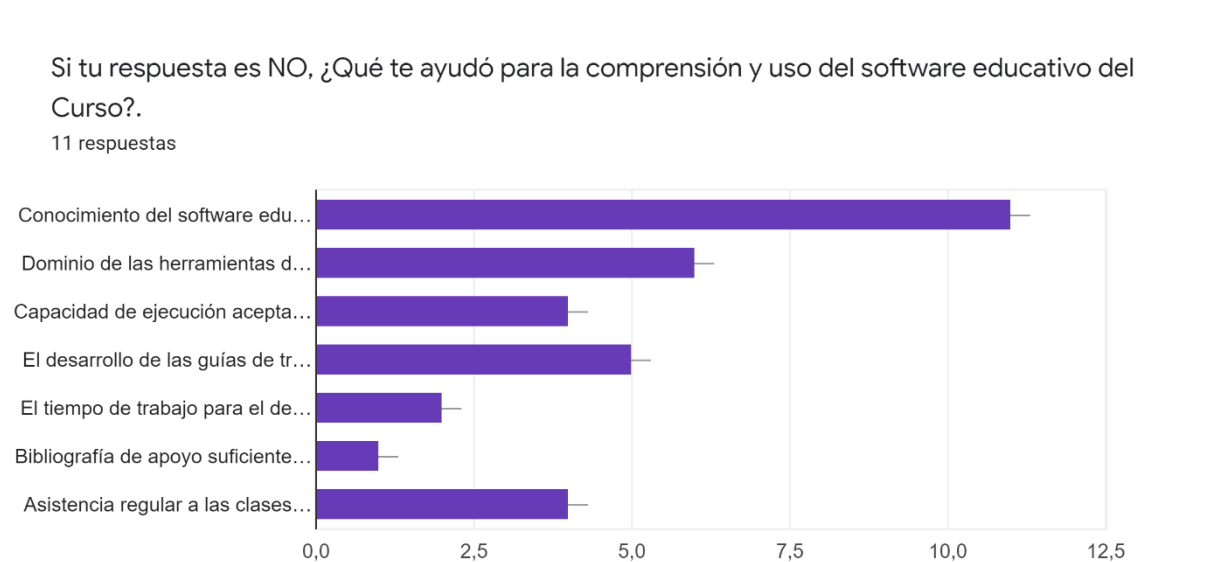
Primero, se les preguntó a los y las estudiantes si tuvieron problemas con el uso de GeoGebra en la actividad curricular, en lo que el 21,4% que contestaron la encuesta respondieron que sí, versus un 78,6% respondió que no. Dependiendo de su respuesta, se realizaron otras 2 preguntas adicionales para conocer los motivos por los cuales sienten que fueron las causas, arrojando los siguientes resultados.

Figura 9 - Respuesta pregunta 3.1



FUENTE: Creación propia.

Figura 10 - Respuesta pregunta 3.2



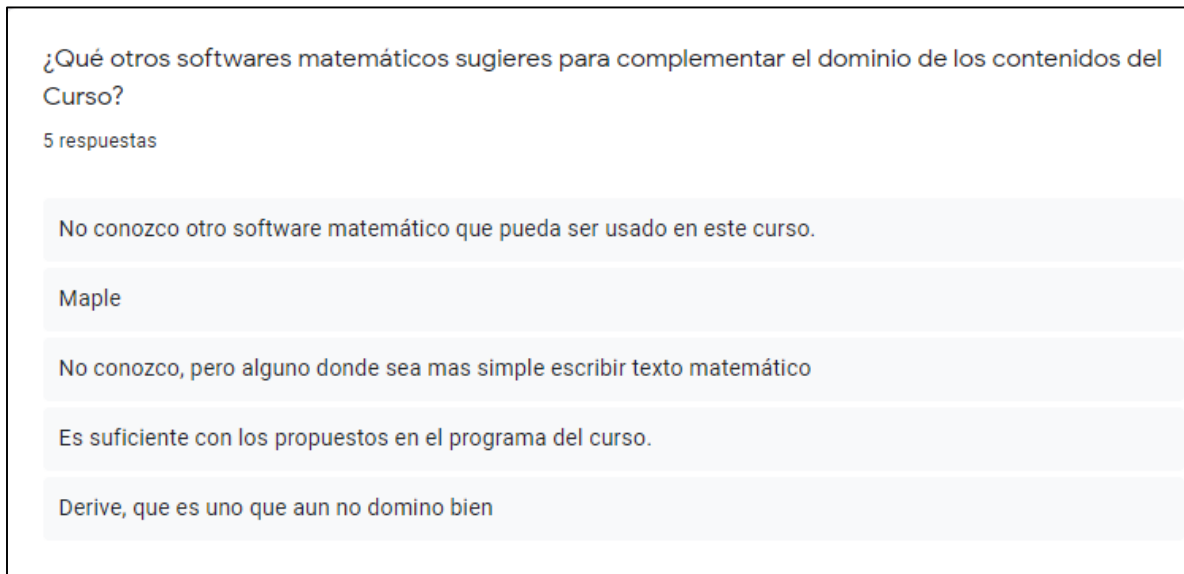
FUENTE: Creación propia.

Analizando cada una de las respuestas entregadas en ambas preguntas, podemos concluir que gran parte de los problemas para la comprensión y uso del software GeoGebra tiene que ver con el dominio de ejecución del software y el tiempo para realizar las guías, este último punto se

contradice por parte de los y las estudiantes que no tuvieron problemas, y a su vez, al ser una actividad curricular que solo posee dos créditos a la semana, gran parte de las actividades y ejercicios presentados en la guía son de carácter autónomo, por lo que ellos poseen mínimo una semana en la cual pueden distribuir su tiempo para la realización de las actividades presentadas y si existen complicaciones, presentación de dudas en el siguiente espacio sincrónico. En el caso de la falta de comprensión de uso de GeoGebra, durante la clase se realizan diversas actividades en donde se utilizan las herramientas de GeoGebra, intentando explicar el paso a paso de cada una de ellas, además se realizan preguntas abiertas para saber si poseen dudas, pero son pocos estudiantes quienes realizan preguntas o participan constantemente en las clases, por lo que no se puede tener conocimiento de sus dudas ni se pueden resolver las mismas.

Siguiendo la misma línea, se deja un espacio para sugerir otros softwares educativos, permitiendo un espacio de participación y preocupación de los y las estudiantes por proponer soluciones o aportes a lo que ellos y ellas mismas están estudiando.

Figura 11 - Respuesta pregunta 4



¿Qué otros softwares matemáticos sugieres para complementar el dominio de los contenidos del Curso?

5 respuestas

No conozco otro software matemático que pueda ser usado en este curso.

Maple

No conozco, pero alguno donde sea mas simple escribir texto matemático

Es suficiente con los propuestos en el programa del curso.

Derive, que es uno que aun no domino bien

FUENTE: Creación propia.

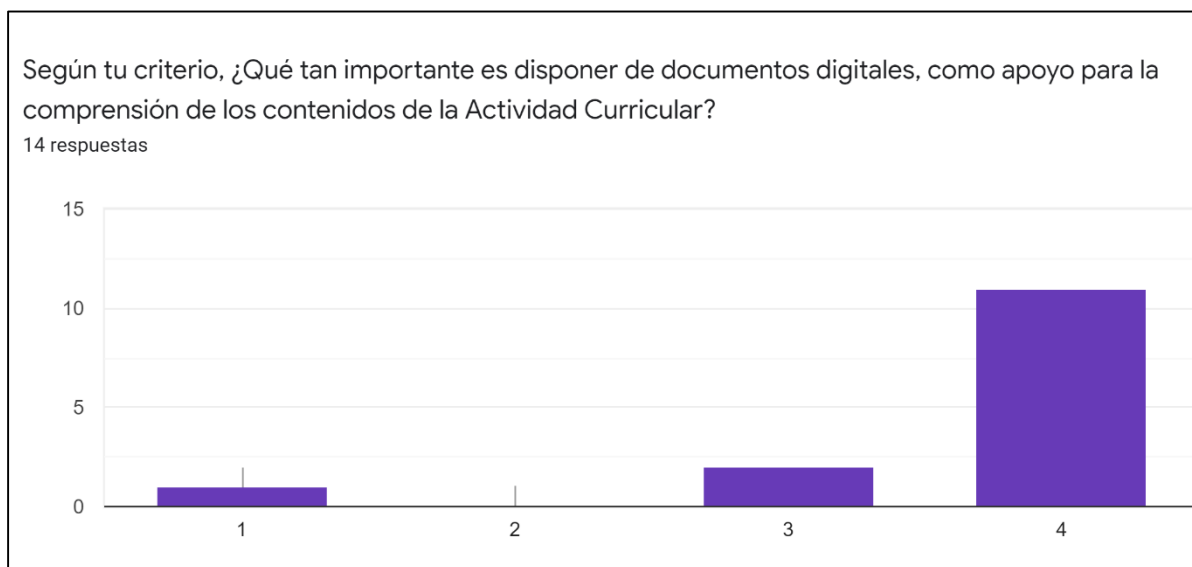
De las pocas personas que respondieron este apartado, podemos ver existe un sesgo de conformismo con el programa utilizado, viendo respuestas cercanas al desconocimiento de otros

softwares. También existieron dos programas propuestos para complementar el curso, Derive y Maple.

Ambos programas presentados se enfocan principalmente en la rama matemática centrada en el cálculo, tanto en derivadas como integrales. Si bien el potencial de Derive es muy alto, debido a que es un programa para el cálculo simbólico, tiene cierta complejidad si se pretende ingresar algunos tipos de funciones o incluso si se cometen errores en la escritura algebraica no tan especializada. Por otro lado, se escoge principalmente GeoGebra ya que su potencial recae principalmente en la graficación, permitiendo la visualización de diferentes funciones, sus componentes y valores y el enfoque teórico propuesto para esta tesina, es decir, la comprensión de un objeto matemático en distintas representaciones.

Otro aspecto importante a comprender del grupo curso, es su opinión sobre la utilización y disposición de documentos digitales.

Figura 12 - Respuesta pregunta 5



FUENTE: Creación propia.

Como se puede apreciar, la amplia mayoría de estudiantes considera importante disponer de estos documentos digitales para la comprensión de los contenidos tratados en las diferentes instancias de la A.C. Esto nos brinda una ventana de reconocimiento al trabajo propuesto en esta tesis, validando

la modalidad de trabajo impresa en los módulos de aprendizaje y permitiendo dejar estos materiales a disposición para el acompañamiento de cursos futuros.

Como último punto de la encuesta, se realizaron preguntas relacionadas a los contenidos a tratar en la actividad curricular. La primera pregunta de este tema está relacionada a la satisfacción que ellos poseen con la metodología de trabajo para abordar los contenidos por parte de la profesora y los ayudantes. El 35,7% de los y las estudiantes se sintió muy satisfecho, el 50% de ellos satisfechos, en cambio un 14,3% está insatisfecho sobre cómo se abordan los contenidos a tratar.

Adicional a esta pregunta, se realizaron 2 preguntas abiertas, una para saber qué cambios propondría para los y las estudiantes de la actividad curricular; y otra para saber qué aspectos positivos consideran importantes. Para ambas preguntas respondieron lo siguiente:

Figura 13 - Respuesta pregunta 6.1

Si sientes que los contenidos NO han sido entregados de la mejor manera, ¿Qué cambios o modificaciones propondrías?

4 respuestas

En los aspectos a mejorar serían los últimos apuntes que contienen bastante información por lo que en momentos cuesta "seguir el hilo" de la clase (lo que se comprende dado que la clase tiene solo un bloque a la semana)

Metodología más Didáctica, además, creí que en este ramo tendríamos alguna evaluación con alguna construcción manual y en realidad son solo pruebas y talleres, ni siquiera exposiciones o cápsulas:(

Que podamos ver a la profesora.

no se hace una clase dinámica

FUENTE: Creación propia.

Figura 14 - Respuesta pregunta 6.2

Si sientes que los contenidos han sido abordados de buena manera, ¿Qué considerarías como aspecto central de esa apreciación?

7 respuestas

- En los aspectos a resaltar me gusta y ayuda bastante el que se vaya usando Geogebra constantemente para explicar el contenido.
- el material entregado explica muy bien el contenido, y ayuda que hayan prácticas guiadas
- Las prácticas guiadas
- El orden en que vamos avanzando en los contenidos
- El desarrollo de problemas en clases.
- Las practicas guiadas y gran variedad de ejemplos
- La visualización de objetos matemáticos en algo más sensible que teórico

FUENTE: Creación propia.

Cómo aspectos negativos para la comprensión de la actividad curricular que mayoritariamente mencionan es el tiempo, ya que si bien la segunda respuesta para esta pregunta habla de la metodología de evaluación del curso, hay tipos de evaluaciones cómo las de realizar exposiciones, talleres, etc. implican organizar el tiempo requerido para la realización de la clase para la realización, explicación y organización de las evaluaciones, tiempo que es limitado considerando que solo son 2 horas de clases a la semana. Otro aspecto negativo a mencionar es que consideran que las clases no son dinámicas, pero cómo se mencionó anteriormente para otra pregunta, también es responsabilidad de los y las estudiantes del curso, para que pueda existir una clase más dinámica debe existir más participación de los estudiantes, pero al no poseer participación de ellos, la clase se vuelve monótona y pasa a ser una especie de monólogo de los profesores a cargo.

Por otro lado, las respuestas positivas sobre cómo se abordaron los temas son relacionados a las prácticas guiadas y la utilización de un software educativo. Una de las respuestas que más llamó la atención, es la mencionada por un(a) de los estudiantes quien considera relevante la visualización del objeto matemático, por medio de su estudio de forma más tangible que teórica. Esto genera

cercanía a la comprensión del objeto matemático, similar a lo propuesto por Duval en los registros de representaciones semióticas, detallado en el marco teórico de esta tesina.

Otro aspecto importante que fue investigado en esta encuesta hace alusión al apoyo brindado por los ayudantes del ramo, encargados también de la creación de los módulos de aprendizaje, tema central de esta tesina. Los y las estudiantes brindaron las siguientes apreciaciones del trabajo llevado a cabo por los ayudantes.

Figura 15 - Respuesta pregunta 8



FUENTE: Creación propia.

Figura 16 - Respuesta pregunta 8.1

Si tu apreciación es más cercana a una mala experiencia, ¿Qué recomendarías a los ayudantes?

3 respuestas

- Mas participación
- Quizás no tiene que ver con ellxs, pero hubiera sido bueno tener instancias para resolver ejercicios.
- No es una mala experiencia, pero si siento que casi ni hay experiencia ya que no nos dan un horario además del horario fijo del ramo, entendiendo que este ramo solo tiene 1 vez por semana, sé que no es su obligación pero si sería beneficioso

FUENTE: Creación propia.

Figura 17 - Respuesta pregunta 8.2

Si tu apreciación es más cercana a una buena experiencia, ¿Qué sientes que posibilita un buen ambiente de trabajo en clases?

7 respuestas

- El que siempre respondan las dudas y expliquen en profundidad los ejercicios
- explican bien, me gusta que aporten hartos en la clase
- Que tomen el protagonismo por momentos y por su experiencia como alumnos
- El apoyo constante de los ayudantes.
- La buena comunicación con los ayudantes y su disposición a ayudar
- la clase fluida
- dinámicos, gratos, captan tu atención, buenos en general

FUENTE: Creación propia.

Como podemos notar existe una tendencia a considerar que el apoyo brindado ha sido muy satisfactorio o satisfactorio, pero también se presentaron respuestas en la casilla de no satisfactorio.

Para comprender qué es lo que genera esta dualidad de respuestas, revisamos las preguntas que siguen a continuación del gráfico mismo. Cuando se les pregunta por recomendaciones, dado que su apreciación es cercana a una mala experiencia, los y las estudiantes proponen instancias en donde se puedan resolver ejercicios, mayor participación de los ayudantes y un horario para dudas, cercano a la labor empleada por ayudantes en otras asignaturas. Pero todas estas recomendaciones carecen de sustentabilidad por una única razón, y es la participación del curso en la Actividad Curricular en general. En instancias de clases sincrónicas existe una baja o nula participación de parte del grupo curso, dejando casi sin importancia instancias en donde se podrían resolver más ejercicios o se podría brindar un apoyo más focalizado. Se brinda apoyo y se entrega confianza, pero la participación no sube y solo se queda en respuestas como, si se entendió o si profe.

El horario externo también es una propuesta que se desmorona por las mismas razones. Se les propuso a los y las estudiantes que presentarán sus dudas por medio de foro en la plataforma institucional, pero en todo el tiempo de extensión de la A.C., no se ha mostrado ningún interés en usar este medio. Lo primero que se pensó es que no existían dudas referentes a contenidos y por ello no se utilizaba este medio, pero con el tiempo y las reacciones en clases, cada vez se hace más notoria una falta de estudio autónomo, importante para la comprensión de esta A.C. y compromiso con la misma, ya que, existiendo solo una clase sincrónica a la semana, se busca el estudio personal, exploración y resolución de dudas.

Englobando un todo, la falta de compromiso con la A.C., tanto para trabajar de manera autónoma, como para explorar y generar dudas, imposibilita un trabajo fructífero y que pueda amoldarse al contexto del curso.

Bajo esta mirada siempre surge la duda de cómo incitar la participación y realzar el compromiso de los y las estudiantes. Pero si se abren canales de comunicación, se busca la participación en instancias sincrónicas y también se pregunta constantemente por dudas, teniendo siempre respuestas positivas en cuanto a la comprensión de contenidos, es complejo generar lazos y buscar alguna alternativa para modificar y hacer más lúdica la comprensión de contenidos.

Con respecto a la segunda pregunta, que recopila las apreciaciones relacionadas a una buena experiencia, los y las estudiantes enfocaron sus respuestas a que lo que posibilitó un buen ambiente de trabajo en clases se debía a un buen acompañamiento y disposición de los ayudantes. Se avaló

la buena comunicación presente, el apoyo constante, el dinamismo presentado en clases y la fluidez de clase. Estas opiniones, sensaciones o apreciaciones permiten ver que el acompañamiento es fructífero y que el diseño del curso por medio de módulos y acompañamiento continuo en las instancias generadas rinde frutos y es agradecido.

Para finalizar esta encuesta, se dejó una respuesta amplia, comprendiendo que el marco utilizado es de carácter cualitativo, por lo que se insta a responder desde la emocionalidad, desde la apreciación o desde la opinión personal e individual. Esta pregunta y sus respuestas son presentadas a continuación.

Figura 18 - Respuesta pregunta 9

En esta pregunta puedes agregar comentarios generales sobre la actividad curricular, sobre los ayudantes o incluso como sentiste el ambiente, etc.

2 respuestas

En lo posible, a futuro, podría considerarse un aumento de clases. Creo que con dos clases se aprovecharía mejor el curso.

Como me expresé anteriormente, venía con una expectativa alta en cuanto a variedad de evaluaciones ya que en el ramo anterior de Geometría fue así, sin embargo, solo tenemos dos "variedades" pruebas y talleres, lo cual, pero personalmente siento que como docentes de matemática y como nos enseñan en la UMCE, las evaluaciones deben ser variadas, no todos los estudiantes tienen las mismas habilidades, entonces es contradictorio que solo se hagan pruebas y talleres cuando en otros ramos nos invitan a cambiar esto

FUENTE: Creación propia.

Como podemos notar, al abrir un canal amplio de comentarios, englobando todo lo que ha sido explorado, es decir, sensaciones, emociones, opiniones para con el curso, la profesora y ayudantes o el ambiente de clases, las respuestas son escasas y solo se centran en dos ideas ya comentadas. Primero en el tiempo reducido de clases de la A.C. que deja con una sensación de aprovechamiento escaso del curso. Esto genera varias preguntas sobre el cómo comprenden los y las estudiantes los contenidos tratados, ya que podemos suponer que la comprensión de contenidos está inculcada en las personas como una acción guiada y acompañada, dejando las instancias autónomas en segundo plano, lo que nos lleva a cuestionar la propia realidad docente y la educación actual. En las universidades pedagógicas, el pilar fundamental es el trabajo autónomo y complementario entre docentes, por lo cual ese debería ser el centro de la enseñanza y la aspiración de los y las estudiantes

en toda actividad curricular. Debería ser enfocado en la reflexión crítica a través de la investigación propia, competencia propuesta por el sello mismo de la universidad. Esto nos deja una gran tarea considerando que esa mentalidad inculcada de cómo se enseña y cómo se aprende debe mejorar con el trabajo docente y estudiantil a la par.

Por otro lado, el segundo comentario retoma nuevamente la discusión sobre la variedad de evaluaciones de la A.C. y se propone que esta sea ampliada, considerando que como departamento de matemática se busca siempre diversificar los procesos evaluativos, sea por habilidades de los y las estudiantes como por las diversas formas de aprender. El problema radica principalmente en la falta comprensión de lo que se busca con los módulos de aprendizaje. Porque se es tan tajante en este punto, pues porque los módulos buscan un trabajo que alberga diferentes aristas, por un lado, la comprensión de objetos matemáticos en distintos registros de representaciones semióticas, como lo son representaciones del lenguaje natural, representaciones algebraicas y representaciones geométricas. Al ingresar en los distintos registros podemos notar que, en cuanto al trabajo algebraico, se entregan herramientas para la demostración y también para la generalización por medio de fórmulas conocidas. Junto con ello el registro de representaciones gráficas, está enfocado en la comprensión de los objetos desde la construcción, finalizando en la generalización de estos por medio de fórmulas y curvas conocidas. En los procesos evaluativos se busca exactamente lo mismo, de hecho, el primer taller evaluado correspondió a preguntas que fueron extraídas de las diferentes guías de los módulos presentados en clase con el fin de conocer el compromiso estudiantil de estudio y resolución de estas. Los resultados de este estudio son diversos, mostrando un cúmulo de estudiantes que no logran seguir instrucciones y no comprenden los procedimientos, construcciones matemáticas y demostraciones de diferentes fórmulas involucradas.

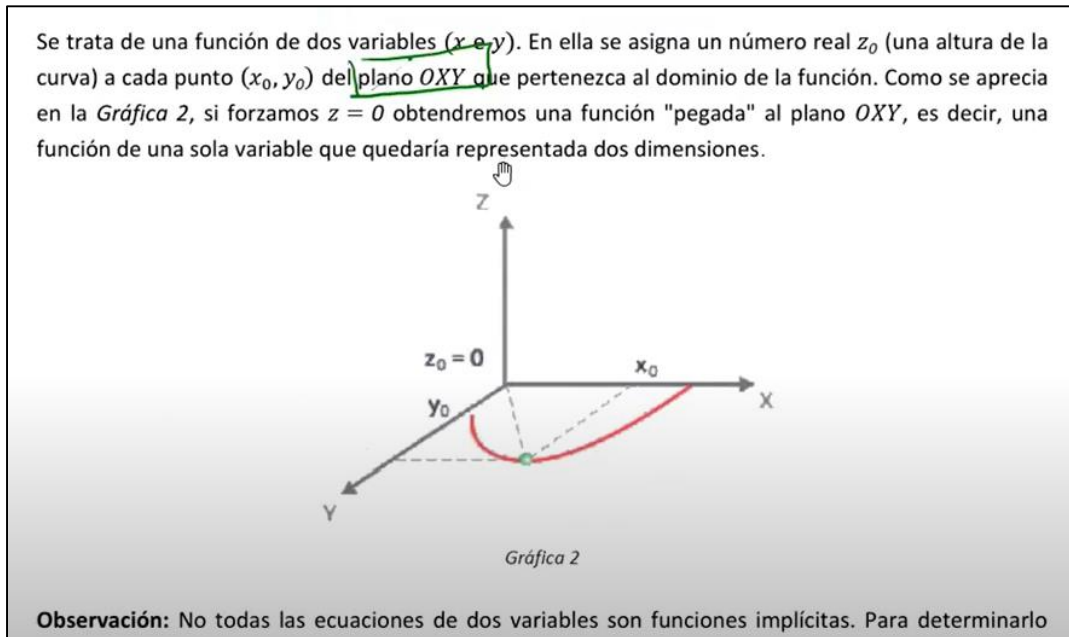
Análisis de los módulos de aprendizaje en clases sincrónicas.

Los módulos de aprendizaje creados fueron puestos a prueba en las clases sincrónicas de las A.C. del Taller de Geometría de curvas y superficies. El recibimiento del material creado brindó varias reflexiones a considerar.

Primero que todo, los módulos proponen una modalidad de trabajo que nace desde la descripción y explicación de conceptos teóricos, avanzando en demostraciones si son requeridas, involucrando prácticas guiadas entre descripciones y demostraciones, para finalizar con trabajo individual. Todo

el material es anexado a e-virtual para facilitar el estudio personal y autodidacta de todos y todas las estudiantes. A continuación, dejamos algunas imágenes de lo descrito al momento de ejecutar la clase.

Figura 19 - Funciones explícitas e implícitas (parte teórica)



FUENTE: S2_Clasa Taller Geo Curvas y Superficies.mp4

Figura 20 - Funciones explícitas e implícitas (trabajo práctico individual, con intervenciones de la profesora)

De cualquier manera, que se trate de despejar x o y , no se logra expresar la función en términos de una sola variable, es decir tener y de un lado de la igualdad y x del otro lado. Por lo tanto, se tiene una **función implícita**. ✓

4. $5x^2 - y^2 - 7xy + 9x + 22y - 6 = 0$

Se agrupan las variables para factorizar.

$$5x^2 - 7xy + 9x = y^2 - 22y + 6$$

Como se aprecia en la ecuación, no se logra establecer la separación de variables. Por lo tanto, es una **función implícita**. ✓

Trabajo práctico individual:
Dadas las siguientes funciones, determina si son explícitas o implícitas.

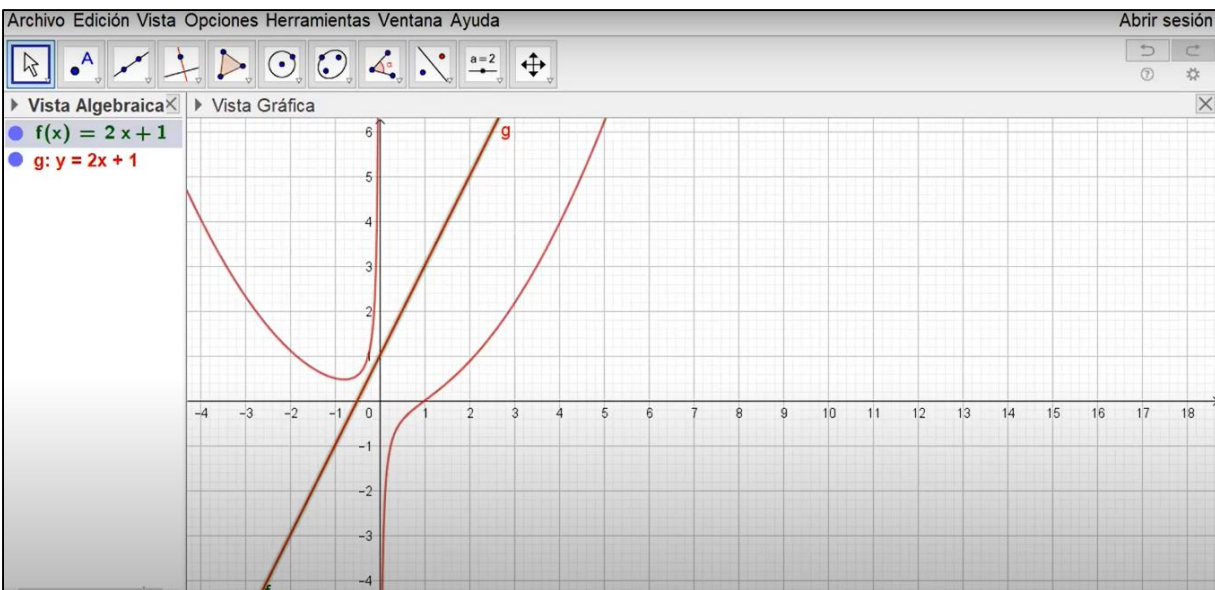
- $x^3 + x^2y - 19y^4 = 0$
- $4x^2y - 3y = x^3 - 1$
- $xy - \sqrt{3xy^2} = 0$
- $x^2 + y^2 - 9 = 0$

Handwritten notes and solutions:

- $\rightarrow f(x^2 - 19y^4) = -x^3$ F.I.
- $\rightarrow f(4x^2 - 3) = x^3 - 1 \Rightarrow y = \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}$ ✓ F.E.

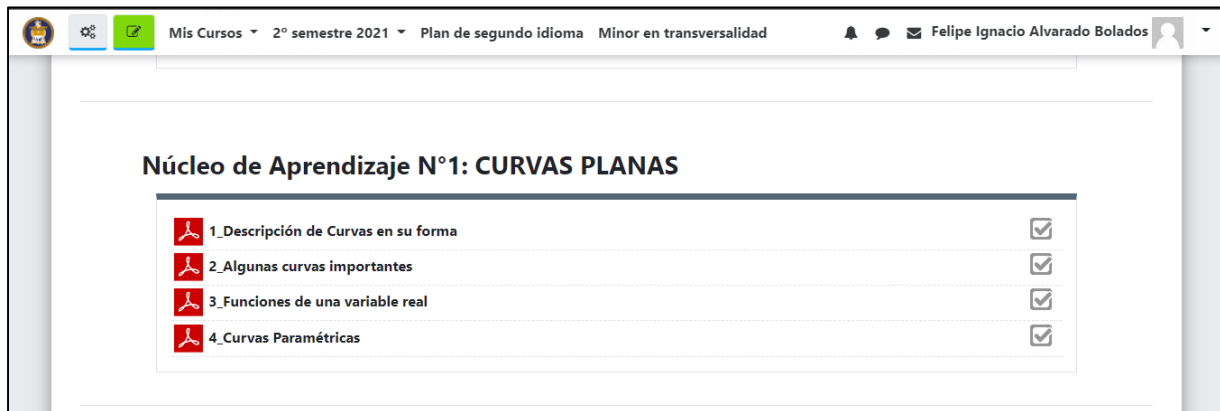
FUENTE: S2_Clase Taller Geo Curvas y Superficies.mp4

Figura 21 - Funciones explícitas e implícitas (Utilización de GeoGebra para visualizar las prácticas guiadas)



FUENTE: S2_Clase Taller Geo Curvas y Superficies.mp4

Figura 22 - Núcleo de Aprendizajes (Material subido a la plataforma)



FUENTE: Plataforma E-virtual UMCE

Los comentarios emanados por el curso se decantaron en dos grupos. Por un lado, quienes aprovecharon la forma de entregar la información y preguntaron si era debido, siguieron instrucciones y desarrollaron las prácticas guiadas y trabajos individuales, y por otro quienes sólo siguieron las explicaciones y no participaron mucho en las clases. Este segundo grupo nos da paso a preguntarnos nuevamente por las estrategias utilizadas para captar la atención de los y las estudiantes, pero también nos hace cuestionar el compromiso de parte de ellos y ellas para con el curso.

Como estrategias se proponen varias instancias de participación, preguntas focalizadas a medida que se explican los contenidos, prácticas en donde ellos y ellas pueden modificar parámetros y cuestionar lo trabajado y trabajos individuales acompañados por la profesora y los ayudantes, en donde los y las estudiantes pueden desenvolverse, probando y reforzando los conocimientos adquiridos.

Aun con esto existe una baja participación, las preguntas no son respondidas y con base en preguntas de contenido y de ejercicios propuestos, se intuye la falta resolución de los ejercicios ni seguimiento o aprovechamiento de las guías. Esto recae principalmente en la atención de los y las estudiantes, en el compromiso con el curso y el ánimo de trabajar y resolver el material generado. Si bien en la actualidad existe un modo de ver la educación en donde él/la docente debe generar diversas instancias para captar la atención de los y las estudiantes, este trabajo solo será validado si por su parte el grupo estudiantil se compromete a trabajar y generar críticas constructivas que

permitan modificar las clases, las modalidades de trabajo y en resumen, la forma en que se brindan los contenidos. Pero en un ambiente en donde la participación es baja, no se generan instancias de discusión, no se develan caminos por donde guiar los contenidos y sólo se encuentran afirmaciones comunes como: “si se entendió” o “queda todo claro”. Como estudiantes de la carrera, debemos considerar como aspecto fundamental el cuestionamiento de nuestra propia práctica y concebir la idea de que la generación de conocimiento es un trabajo compartido y no una tarea solo de los y las docentes, como lo estipula una pedagogía tradicional o académica antigua.

Actividades evaluadas y sus aspectos a destacar

Como fue mencionado con anterioridad, se puede intuir una falta de trabajo personal de los y las estudiantes con respecto a los ejercicios propuestos, generados en los módulos de aprendizaje. Es por esto que se tomó la decisión de generar un control de dos preguntas aleatorias, como preparación para una evaluación posterior y testeo de los conocimientos del curso.

Este control fue compuesto de preguntas de las guías de módulos de aprendizaje, por lo cual, los y las estudiantes que siguieron las clases y se preocuparon de trabajar las guías en sus tiempos de estudio, prácticamente tendrían resuelta la totalidad de preguntas que pudiesen salir en ese control o por lo bajo, resueltas las dudas con los problemas más complejos.

El control se desarrolló mediante la plataforma E-virtual perteneciente a la universidad, cómo muestra la siguiente imagen, se evidenciaron una serie de pasos a seguir para el desarrollo del control y la comprensión de este.

Figura 23 - Control de preparación para prueba n° 1

Control de preparación para prueba N°1

Estimadas y estimados estudiantes:

Este CONTROL estará habilitado desde el 22 de septiembre a las 11:30 horas el 24 de septiembre hasta las 23:30 horas. Tendrá un límite de tiempo de 90 minutos. Cuando Usted empieza su intento, el contador comenzará a contar y no puede ser pausado.

Antes de comenzar, debe considerar las siguientes indicaciones:

- Asegúrese de tener una **buena conexión**, antes de iniciar el CONTROL.
- Para evitar pérdida de tiempo tenga a su disposición los elementos que utilice para el desarrollo de la evaluación (Apuntes, activado GeoGebra, hojas, lápiz, calculadora, etc)
- Este CONTROL será desarrollado utilizando la plataforma del curso (e-virtual UMCE).
- El CONTROL es de desarrollo personal y **contiene 2 preguntas abiertas** donde debe adjuntar el desarrollo en formato PDF.
- **Recuerde: El CONTROL estará habilitada desde el 22 de septiembre a las 11:30 horas al 24 de septiembre hasta las 23:30 horas.**
- **Usted debe terminar su intento antes de que expire. Y entender esta preguntar ¿Está Usted seguro de querer comenzar ahora?**

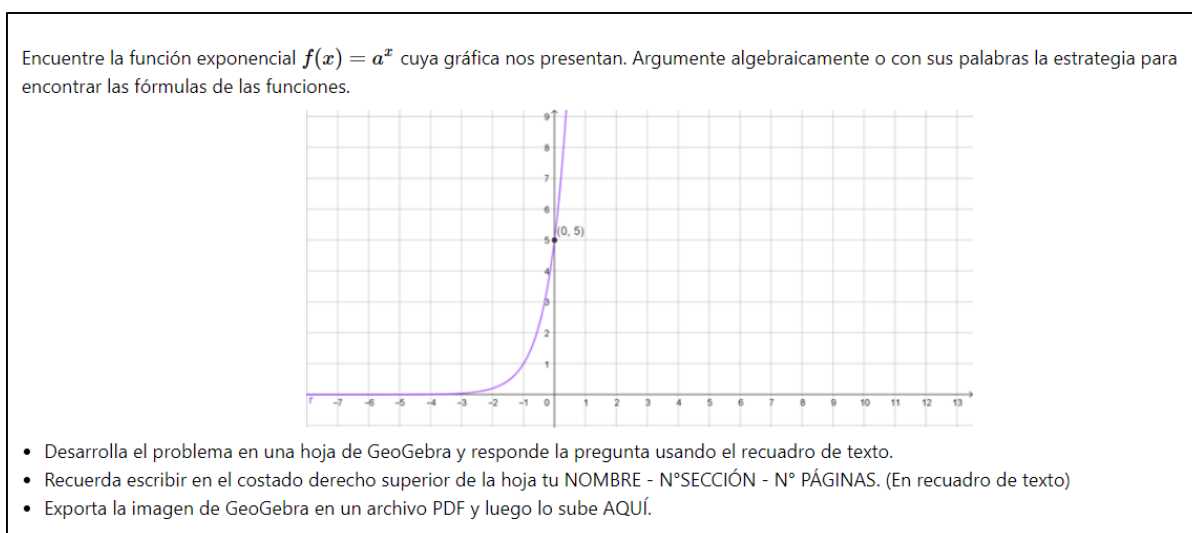
Suerte

Fuente: Plataforma E-virtual UMCE

En ámbitos generales, este control tuvo respuestas variadas, por lo cual consideraremos tres resoluciones, una que presenta escasez de conocimiento, poca atención al enunciado y lo que este pide; otra que muestra un manejo de conocimiento medio y en el cual falta afinar detalles; por último, un trabajo completo, respetando y utilizando todo el contenido, y comentarios emanados por la profesora y ayudantes en clases. Existe una cuarta categoría que es de quienes poseen el conocimiento para la resolución del control, pero que no leen instrucciones o quizás tienen poco conocimiento de los softwares educativos por lo que, a pesar de contestar bien, lo realizan en lugares o de formas que no corresponden a lo pedido.

Como ejemplo de los 3 casos, se muestra a continuación 4 respuestas, comparando el nivel de logro en cada respuesta con ejemplos concretos.

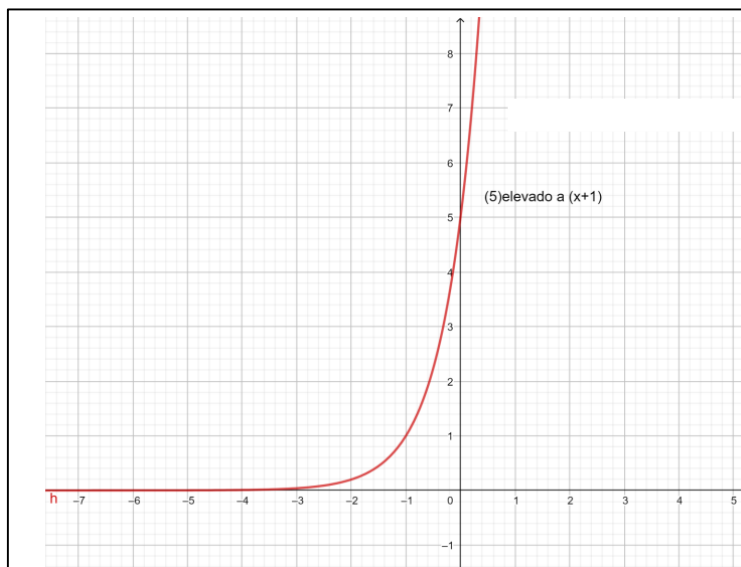
Figura 24 - Pregunta indagatoria sobre curvas exponenciales



Fuente: Banco de preguntas de la A.C. Taller de Geometría de Curvas y Superficies, E-virtual UMCE

Debemos recalcar que dentro del banco de preguntas existen preguntas similares con modificación en la fórmula que presentan, pero queremos rescatar lo solicitado por el enunciado.

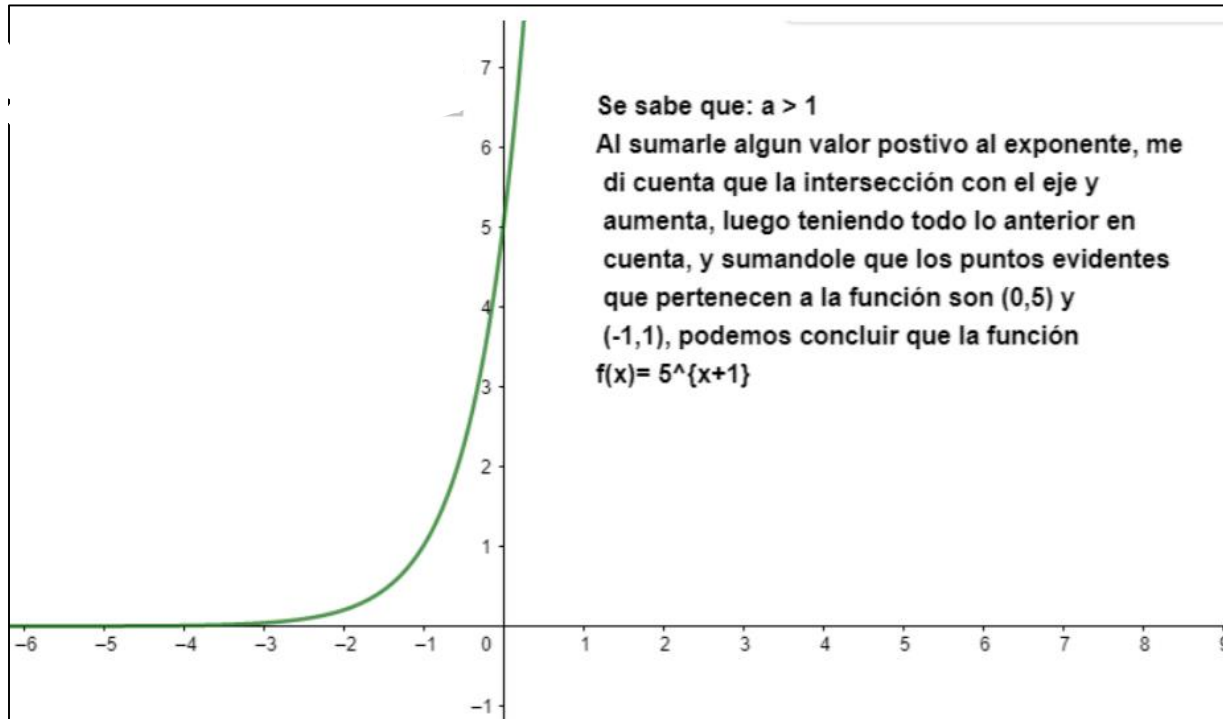
Figura 25 - Trabajo escueto sin mayor detalle y fuera de lo solicitado en el enunciado



Fuente: Respuesta de un estudiante E-virtual UMCE

En esta respuesta podemos visualizar una falta de entendimiento del enunciado, perjudicando el trabajo en cuanto a una obtención vaga de información. Con este tipo de respuestas no se puede levantar mucha información, no se sabe si el estudiante logra comprender el trabajo algebraico de las funciones y utiliza la gráfica no como comprobación o apoyo, sino como respuesta pura olvidando lo que se le pide.

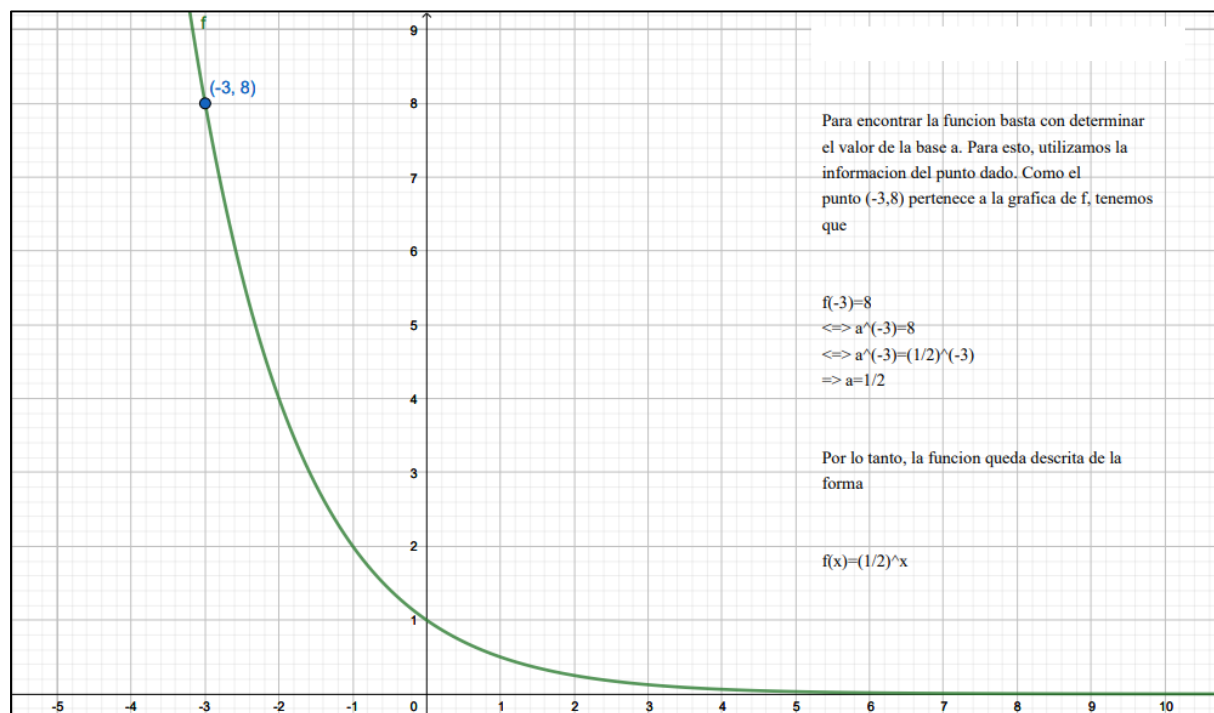
Figura 26 - Trabajo con un nivel medio de logro



Fuente: Respuesta de un estudiante E-virtual UMCE

Esta respuesta presenta un desarrollo en formato solicitado en el enunciado, pero no expresa de la mejor manera el resultado, si bien comenta su estrategia, no anexa un paso a paso que permita visualizar de mejor manera lo que nos describe. Este tipo de respuestas pueden ser mejoradas trabajando la argumentación y comunicación matemática, aspecto relevante tanto en la resolución de ejercicios para evaluaciones como para la creación de material para colegios.

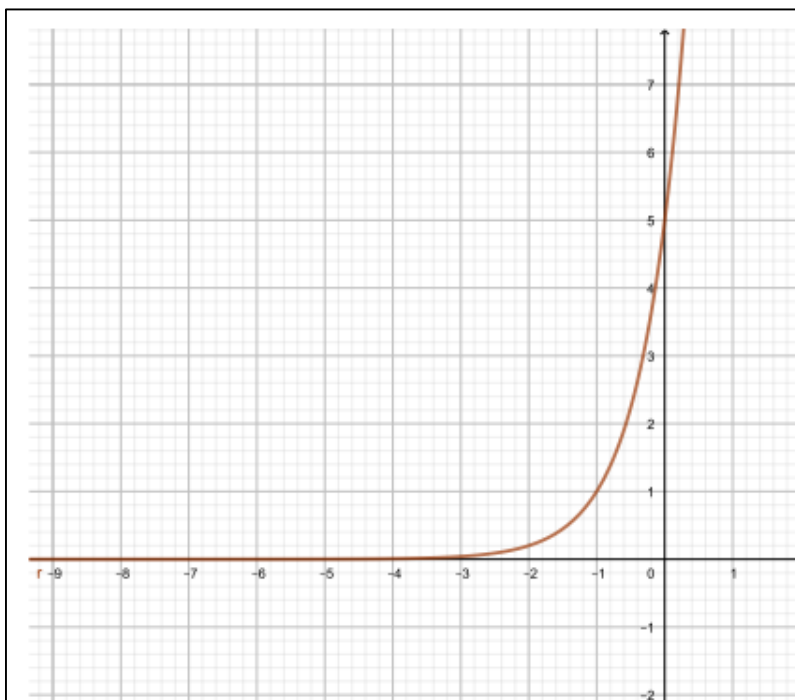
Figura 27 - Trabajo con nivel de completo de logro



Fuente: Respuesta de un estudiante E-virtual UMCE

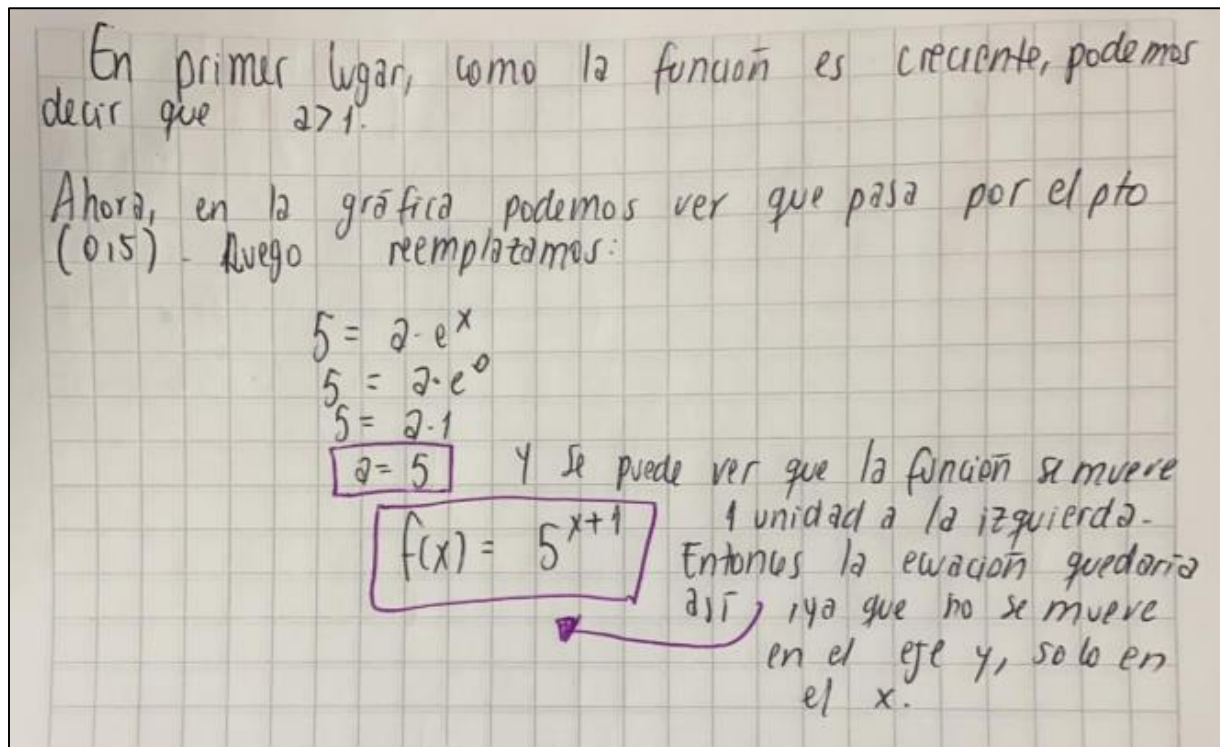
Esta respuesta corresponde a lo que es considerado como completo, muestra una buena comprensión del enunciado intentando entregar toda la información requerida y explicando lo mejor posible la estrategia de resolución utilizada.

Figura 28 - Respuesta que muestra un trabajo fuera de lo solicitado en el enunciado



Fuente: Respuesta de un estudiante E-virtual UMCE

Figura 29 - Continuación de la respuesta en una hoja anexa, fuera de lo solicitado en el enunciado



Fuente: Respuesta de un estudiante E-virtual UMCE

Este tipo de respuestas no pueden ser consideradas como incompletas, pero no sigue una regla impuesta en el enunciado que es anexar en cuadro de texto su resolución. Esto puede deberse a muchas razones, pero consideramos que las principales son un dominio medio de GeoGebra, considerando que no comprenden cómo escribir en cuadros de texto o no lo hacen por desconocer la escritura en cuadro de texto de funciones y símbolos matemáticos solicitados. Estas razones son reparables con práctica. GeoGebra como software educativo merecen atención y experiencia, explorando todas sus posibilidades y emanando dudas de aspectos que no se entiendan.

A modo general y de resumen, se puede considerar que las respuestas variadas permiten identificar el camino para encontrar el modo de enseñar acorde al contexto donde se trabaja, identificando las falencias y potenciando virtudes. El trabajo, según lo visto, debe enfocarse en la atención al enunciado, el cómo se pide la información y el qué pide la misma. También al momento de trabajar con estrategias de resolución, se debe plasmar de mejor manera, pero este es un aspecto que se gana con la experiencia y la práctica, convirtiéndose en uno de los pilares de la matemática.

Capítulo VI: Conclusiones y Proyección

Para concluir este trabajo, se considera relevante centrarse en el análisis de los objetivos específicos de esta tesina, varios aspectos mencionados a lo largo de este documento, junto con apreciaciones sobre la creación de los módulos de aprendizaje como la puesta en práctica de los mismos y el nivel de logro en las distintas instancias de participación generadas.

Recordando los inicios de esta tesina, los objetivos específicos han sido ejes centrales para la ideación y fabricación de los módulos de aprendizaje y la manera en que estos son entregados y evaluados. En estos objetivos se propuso:

- Analizar el programa del curso taller de curvas y superficies, para así encontrar un tema específico donde desarrollar la propuesta didáctica.
- Revisar los métodos de enseñanza en modalidad sincrónica y asincrónica para el diseño propuesta didáctica.
- Seleccionar de las distintas aplicaciones de uso de TIC en la educación que sean de carácter gratuito y de fácil acceso, para elaboración de la propuesta didáctica.
- Organizar y planificar en un espacio virtual el material diseñado de la propuesta didáctica.

Dentro del análisis del programa de la A.C. del Taller de Geometría de curvas y superficies, se consideró la Unidad 1 de Curvas, debido al tiempo establecido por el proceso de tesina y a la posibilidad de poner en práctica el material creado de forma paralela a la construcción de este documento. También esta unidad nos permitió desarrollar en su totalidad lo estipulado por Duval, centrándonos en los registros de representaciones semióticas y la importancia de la visualización de los objetos matemáticos para la comprensión de estos en su totalidad.

Siguiendo con los demás objetivos podemos ver que se cumple con un diseño de propuesta didáctica que integra trabajos sincrónicos y asincrónicos, permitiendo incentivar la participación y la responsabilidad compartida en el aprendizaje de los contenidos y el apoyo mutuo para la comprensión de los mismos.

También gracias a una Encuesta Diagnóstica, pudimos notar que la utilización del Software GeoGebra, por los y las estudiantes de la A.C. en el año 2020, fue fructífera y sin mayores complicaciones, por lo cual se utilizó este mismo para brindar la visualización de las curvas y el

tratamiento de ellas, volviendo a la idea de que la visualización es un aspecto fundamental para la comprensión de, en este caso, las curvas y superficies.

Finalizando con lo referente a objetivos, se logra organizar y planificar los contenidos por medio de la plataforma e-virtual, entregando un espacio en donde encuentren los documentos trabajados, tengan la posibilidad de hacer preguntas en un foro y se pueda generar espacios evaluativos del proceso cursado.

Fuera del cumplimiento de los objetivos, se debe mencionar que el trabajo con módulos depende del trabajo compartido entre estudiantes y docentes. Si no existe comunicación o la comunicación es escasa, como sucedió en algunas oportunidades mencionadas en este documento, los módulos pasan a ser simples guías que pocos revisan y poco se mencionan. La tarea de reparar la brecha de comunicación estudiante-docente, también es una labor compartida, porque como pudimos ver en el apartado resultados y conclusiones, por parte de la profesora y ayudantes se buscaron medios que facilitaran la comunicación y se buscó generar actividades participativas, pero todo eso queda en segundo plano si los y las estudiantes no se involucran ni toman importancia de su propio trabajo dentro de la A.C. y se desligan de su responsabilidad como futuros docentes de cuestionar el estudio de sus prácticas de forma individual y colectiva.

Se espera que en un futuro este módulo de aprendizaje sea utilizado por docentes y estudiantes para el acompañamiento de las actividades educativas diseñadas, pudiendo ser una guía en cuanto a la enseñanza de los contenidos que alberga o acompañamiento, en caso de ser necesarios ejercicios u otra apreciación sobre algunos temas. También, fuera de la utilización por parte de docentes, puede ser un muy buen material de apoyo para el estudio autodidacta de los y las estudiantes o un apoyo en paralelo al estudio que puedan estar desarrollando con su profesor o profesora. En resumen, la proyección a futuro contempla que este documento sea utilizado con el fin de apoyar los conocimientos de los y las estudiantes, acompañarlos en su proceso de aprendizaje-enseñanza y realzar el compromiso de trabajo individual, necesario para generar un trabajo compartido estudiante-estudiante o estudiante-docente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Departamento de Matemática (2019). *Plan de Estudio: Licenciatura en Educación Matemática y Pedagogía en Matemática con Menciones*. [Archivo PDF]

García Jiménez, E. (2015). La evaluación del aprendizaje: de la retroalimentación a la autorregulación. El papel de las tecnologías.

James, S., Watson, S., & Redlin, L. (2017). Precálculo: matemáticas para el cálculo. Cengage Learning.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Edición Especial: Educación Matemática*, 213. [Archivo PDF] [fernandoHitt.tex \(sztaki.hu\)](mailto:fernandoHitt.tex@sztaki.hu)

Línea de Geometría. (2019). PROGRAMA DE ACTIVIDAD CURRICULAR. [Archivo PDF]

Mancilla, F. M. I., & Bustingorry, S. O. (2005). Módulo de aprendizaje. Un instrumento para el desarrollo de la autonomía profesional docente. *Investigaciones en Educación*, 5(2), 95-116. [Archivo PDF] [T4 Funciones.pdf \(ull.es\)](#)

MINEDUC. *EVALUACIÓN FORMATIVA EN EL AULA*. [Archivo PDF]. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-89342_archivo_01.pdf

MINEDUC. *PROGRESIÓN DE OBJETIVOS DE APRENDIZAJE* [Archivo PDF]. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-71257_archivo_01.pdf

MINEDUC (2021). *Programa de Estudio Matemática 3° Medio* [Archivo PDF]. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140137_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf

MINEDUC (2021). *Programa de Estudio Matemática 4° Medio* [Archivo PDF]. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140142_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf

MINEDUC (2021). *Programa de Estudio Geometría 3D de 3° y 4° medio Formación Diferenciada*. [Archivo PDF]. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140147_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf

Olmedo Torre, N., & Farrerons Vidal, O. (2017). Modelos constructivistas de aprendizaje en programas de formación. *OmniaScience Monographs*. [Archivo PDF] [Modelos constructivistas de aprendizaje en programas de formación \(upc.edu\)](#)

Oviedo, L., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria*, 13, 29-36. [Archivo PDF]

Quintana Peña, A. (2006). *Metodología de investigación científica cualitativa* [Archivo PDF] [\(Microsoft Word - Metodolog\355a de Investigacion Cualitativa A.Quintana.doc\) \(ubiobio.cl\)](#)

Ramírez, S., Torres, Z., Váldez, K., Iglesias, M., & Geométrico, P. (2013). La Circunferencia y el Círculo. Una Propuesta Didáctica. *Memorias de la VII Jornada de Investigación del Departamento de Matemática y VI Jornada de Investigación en Educación Matemática*, 217-229.

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE). Historia. Recuperado de <https://www.umce.cl/index.php/universidad/institucionalidad/historia>

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE). Visión y Misión. Recuperado de <https://www.umce.cl/index.php/universidad/institucionalidad/universidad-vision-mision>

Anexos

Tablas

Tabla 3 - Programa de estudio de 7° básico a 2° medio. PROGRESIÓN DE OBJETIVOS DE APRENDIZAJE.

	7° básico	8° básico	1° medio	2° medio
Á L G E B R A Y F U N C I O N E S	OA 6 Utilizar el lenguaje algebraico para generalizar relaciones entre números, para establecer y formular reglas y propiedades y construir ecuaciones.	OA 6 Mostrar que comprenden la operatoria de expresiones algebraicas: • representándolas de manera pictórica y simbólica • relacionándolas con el área de cuadrados, rectángulos y volúmenes de paralelepípedos • determinando formas factorizadas	OA 3 Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica: • transformando productos en sumas y viceversa • aplicándolos a situaciones concretas • completando el cuadrado del binomio • utilizándolos en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas	OA 3 Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$: ($a \neq 0$) • reconociendo la función cuadrática $f(x) = ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas • representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con software educativo • determinando puntos especiales de su gráfica • seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda
	OA 7 Reducir expresiones algebraicas, reuniendo términos semejantes para obtener expresiones de la	OA 7 Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: • utilizando tablas	OA4 Resolver sistemas de ecuaciones lineales (2x2) relacionados con problemas de la vida diaria y	OA 4 Resolver, de manera concreta, pictórica y simbólica o usando herramientas tecnológicas, ecuaciones

	forma $ax + by + cz$, $a, b, c, \in \mathbb{Z}$	• usando metáforas de máquinas • estableciendo reglas entre x e y • representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo	de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas, de manera manual y/o con software educativo.	cuadráticas de la forma: • $ax^2 = b$ • $(ax + b)^2 = c$ • $ax^2 + bx = 0$ • $ax^2 + bx = c$, $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$
	OA 8 Mostrar que comprenden las proporciones directas e inversas: • realizando tablas de valores para relaciones proporcionales • graficando los valores de la tabla • explicando las características de la gráfica • resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.	OA 8 Modelar situaciones de la vida diaria y de otras asignaturas, usando ecuaciones lineales de la forma: • $ax = b$ • $\frac{x}{a} = b, a \neq 0$ • $ax + b = c$ • $\frac{x}{a} + b = c$ • $ax = b + cx$ • $a(x + b) = c$ • $ax + b = cx + d$ $(a, b, c, d, e \in \mathbb{Q})$	OA 5 Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x, y) = ax + by$; por ejemplo: un haz de rectas paralelas en el plano cartesiano, líneas de nivel en planos inclinados (techo), propagación de olas en el mar y la formación de algunas capas de rocas: • creando tablas de valores con a, b fijo y x, y variable • representando una ecuación lineal dada por medio de un gráfico, de manera manual y/o con software educativo • escribiendo la relación entre las variables de un gráfico dado; por ejemplo, variando c en la ecuación $ax + by = c$; $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (decimales hasta la décima)	OA 5 Mostrar que comprenden la inversa de una función: • utilizando la metáfora de una máquina • representándola por medio de tablas y gráficos, de manera manual y/o con software educativo • utilizando la reflexión de la función representada en el gráfico en un plano cartesiano • calculando las inversas en casos de funciones lineales y cuadráticas.

	OA 9 Modelar y resolver problemas diversos de la vida diaria y de otras asignaturas, que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales de la forma: • $ax + b = c$ $\frac{x}{a} = b, \text{ con } a, b \text{ y } c \in N;$ $a \neq 0$ • $ax + b < c$ $ax + b > c$ $\frac{x}{a} < b$ $\frac{x}{a} > b, \text{ con } a, b \text{ y } c \in N;$ $a \neq 0$	OA 9 Resolver inecuaciones lineales con coeficientes racionales en el contexto de la resolución de problemas, por medio de representaciones gráficas, simbólicas, de manera manual y/o con software educativo.		OA 6 Explicar el cambio porcentual constante en intervalos de tiempo: • por medio de situaciones de la vida real y de otras asignaturas • identificándolo con el interés compuesto • representándolo de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo • expresándolo en forma recursiva $f(t + 1) - f(t) = a \cdot f(t)$ • resolviendo problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.
--	---	--	--	---

		OA 10 Mostrar que comprenden la función afín: • generalizándola como la suma de una constante con una función lineal • trasladando funciones lineales en el plano cartesiano • determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo • relacionándola con el interés simple • utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.		
G E O M E T R Í A	OA 10 Descubrir relaciones que involucran ángulos exteriores o interiores de diferentes polígonos.	OA 11 Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de superficies y el volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros: • estimando de manera intuitiva área de superficie y volumen • desplegando la red de prismas rectos para encontrar la fórmula del área de	OA 6 Desarrollar la fórmula de los valores del área y del perímetro de sectores y segmentos circulares respectivamente, a partir de ángulos centrales de 60° , 90° , 120° y 180° , por medio de representaciones concretas.	OA 7 Desarrollar las fórmulas del área de la superficie y del volumen de la esfera: • conjeturando la fórmula • representando de manera concreta y simbólica, de manera manual y/o con software educativo • resolviendo problemas de la vida diaria y de geometría.

		superficie • transfiriendo la fórmula del volumen de un cubo (base por altura) en prismas diversos y cilindros • aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria.		
	OA 11 Mostrar que comprenden el círculo: • describiendo las relaciones entre el radio, el diámetro y el perímetro del círculo • estimando de manera intuitiva el perímetro y el área de un círculo • aplicando las aproximaciones del perímetro y del área en la resolución de problemas geométricos de otras asignaturas y de la vida diaria. • identificándolo como lugar geométrico.	OA 12 Explicar, de manera concreta, pictórica y simbólica, la validez del teorema de Pitágoras y aplicar a la resolución de problemas geométricos y de la vida cotidiana, de manera manual y/o con software educativo.	OA 7 Desarrollar las fórmulas para encontrar el área de la superficie y el volumen del cono: • desplegando la red del cono para la fórmula del área de superficie • experimentando de manera concreta para encontrar la relación entre el volumen del cilindro y el cono • aplicando las fórmulas a la resolución de problemas geométricos y de la vida diaria.	OA 8 Mostrar que comprenden las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente en triángulos rectángulos: • relacionándolas con las propiedades de la semejanza y los ángulos • explicándolas de manera pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo • aplicándolas para determinar ángulos o medidas de lados • resolviendo problemas geométricos y de otras asignaturas
FUENTE: Adaptado de MINEDUC. <i>PROGRESIÓN DE OBJETIVOS DE APRENDIZAJE</i> [Archivo PDF]. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-71257_archivo_01.pdf				

Tabla 4 - Programa de estudio de 7° básico a 2° medio. Habilidades.

	7° básico	8° básico	1° medio	2° medio
R E P R E S E N T A R	k. Elegir y utilizar representaciones concretas, pictóricas y simbólicas para enunciados y situaciones en contextos diversos (tablas, gráficos, recta numérica, entre otros)	k. Elegir y utilizar representaciones concretas, pictóricas y simbólicas para enunciados y situaciones en contextos diversos (tablas, gráficos, recta numérica, entre otros).	l. Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de éstas.	l. Elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, identificando sus limitaciones y validez de éstas.
	l. Relacionar y contrastar información entre distintos niveles de representación.	l. Relacionar y contrastar información entre distintos niveles de representación.	m. Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones.	m. Transitar entre los distintos niveles de representación de funciones.
	m. Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.	m. Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas	n. Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos.	n. Organizar, analizar y hacer inferencias acerca de información representada en tablas y gráficos.
			o. Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.	o. Representar y ejemplificar utilizando analogías, metáforas y situaciones familiares para resolver problemas.
FUENTE: Adaptado de MINEDUC. <i>PROGRESIÓN DE OBJETIVOS DE APRENDIZAJE</i> [Archivo PDF]. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-71257_archivo_01.pdf				

Tabla 5 - Programa de estudio de 3° medio - Formación general.

Unidad 3: Relaciones métricas en geometría
Objetivos de Aprendizaje
OA 4: Resolver problemas de geometría euclidiana que involucran relaciones métricas entre ángulos, arcos, cuerdas y secantes en la circunferencia, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas. OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.
Actitudes
Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas. Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.
FUENTE: Adaptado de MINEDUC (2021). <i>Programa de Estudio Matemática 3° Medio</i> [Archivo PDF]. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140137_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf

Tabla 6 - Programa de estudio de 4° medio - Formación general

UNIDAD 3	UNIDAD 4
Modelamiento matemático para describir y predecir	Geometría con coordenadas
Objetivos de Aprendizaje	
OA 3. Construir modelos de situaciones o fenómenos de crecimiento, decrecimiento y periódicos que involucren funciones potencia de exponente entero y trigonométricas $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$, de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.	OA 4: Resolver problemas acerca de rectas y circunferencias en el plano, mediante su representación analítica, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.
OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas. OA f. Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos. Programa de estudio de 3ro y 4to medio, Geometría 3d	OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados. OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes	
Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.	Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
Actuar responsablemente al gestionar el tiempo para llevar a cabo eficazmente los proyectos personales, académicos y laborales.	Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.
FUENTE: Adaptado de MINEDUC (2021). <i>Programa de Estudio Matemática 4° Medio</i> [Archivo PDF]. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140142_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf	

Tabla 7 - Programa de Estudio 3° y 4° - Humanista Científico, Geometría 3D

Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3	Unidad 4
Representación vectorial de situaciones y fenómenos	Rectas y planos en el espacio	Generación de cuerpos utilizando patrones geométricos	Los objetos con sus caras y perspectivas
Objetivos de Aprendizaje			
OA 1. Argumentar acerca de la validez de soluciones a situaciones que involucren isometrías y homotecias en el plano, haciendo uso de vectores y de representaciones digitales.	OA 2. Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.	OA 4. Formular y verificar conjeturas acerca de la forma, área y volumen de figuras 3D generadas por rotación o traslación de figuras planas en el espacio, incluyendo el uso de herramientas tecnológicas digitales.	OA 3. Resolver problemas que involucren relaciones entre figuras 3D y 2D en las que intervengan vistas, cortes, proyecciones en el plano o la inscripción de figuras 3D en otras figuras tridimensionales. OA 5. Diseñar propuestas y resolver problemas relacionados con perspectiva, proyección paralela y central, puntos de fuga y elevaciones, tanto en arte como en arquitectura, diseño o construcción, aplicando conceptos y procedimientos de la geometría 3D.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.	OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos. OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados. OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.	OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.	OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.
---	--	---	---

Actitudes			
Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.	Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.	Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.	Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.
Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.	Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.	Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.	Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de tareas colaborativas y en función el logro de metas comunes.
FUENTE: Obtenido de MINEDUC (2021). <i>Programa de Estudio Geometría 3D de 3° y 4° medio Formación Diferenciada</i> . https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140147_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf			

Encuestas

Encuesta diagnóstica - Encuesta uso de recursos TIC

26/7/2021

Encuesta uso de recursos TIC

Encuesta uso de recursos TIC

Esta pequeña encuesta esta enfocada en recopilar información sobre los dispositivos, programas y software que fueron utilizados en el curso taller de curvas y superficies. Este pequeño formulario nos permitirá conocer de mejor manera los dispositivos utilizados y las complicaciones que pueden haberse presentado en el proceso de estudio de dicho curso, permitiendo generar un mejor trabajo en la tesis que estamos llevando a cabo.

Se ha registrado el correo del encuestado (**null**) al enviar este formulario.

***Obligatorio**

1. Correo *

2. Considerando clases presenciales, ¿Qué dispositivo utilizas para estudiar en casa? *

Selecciona todos los que correspondan.

☐ Notebook

☐ Computador de escritorio (PC)

☐ Tablet

☐ Smartphone

Otro: ☐

3. Considerando clases online ¿Qué dispositivo utilizas? *

Selecciona todos los que correspondan.

☐ Notebook

☐ Computador de escritorio (PC)

☐ Tablet

☐ Smartphone

Otro: ☐

4. El dispositivo que utilizas en clases online y/o para estudiar, ¿Qué sistema operativo tiene? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Windows
- ☐ Linux
- ☐ Mac Os
- ☐ Android
- ☐ iOS
- ☐ Otro: _____

5. ¿Dispones de internet en tu casa? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Sí
- ☐ No

6. Si tu respuesta es Si. ¿Qué tipo de Internet dispones?

Selecciona todos los que correspondan.

- ☐ Internet hogar
- ☐ De otro dispositivo como Smartphone
- ☐ Internet facilitada por la universidad (Chip Wom)

Otro: ☐ _____

7. ¿En que región y comuna te encontrabas al realizar el Curso "Taller de curvas y superficies"? *

8. Debido al sector donde te encontrabas, ¿tuviste problemas de Internet? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ Sí
☐ No

Aplicación y uso de herramientas TIC

9. ¿Tuviste problemas con algún software educativo utilizado en las clases del Curso "Taller de curvas y superficies"? *

Marca solo un óvalo.

- ☐ SI
☐ NO

10. Si tu respuesta es SI. De la siguiente lista, marca las dificultades que tuviste:

Selecciona todos los que correspondan.

- ☐ Desconocimiento del software educativo.
☐ Falta de dominio de las herramientas del software educativo.
☐ Falta de capacidad de ejecución del software educativo en el dispositivo utilizado.
☐ Desarrollo de las guías de trabajo del curso poco claras.
☐ El tiempo de trabajo para el desarrollo de las guías no fue suficiente.
☐ Falta de bibliografía de apoyo para el Curso.
☐ No contar con estudiante ayudante de apoyo al Curso.
☐ Falta de clases presenciales en el laboratorio de computación.

Otro: ☐ _____

11. Si tu respuesta es NO, ¿Qué te ayudó para la comprensión y uso del software educativo del Curso?.

Selecciona todos los que correspondan.

- ☐ Conocimiento del software educativo.
- ☐ Dominio de las herramientas del software educativo.
- ☐ Capacidad de ejecución aceptable del software educativo en el dispositivo utilizado.
- ☐ El desarrollo de las guías de trabajo del curso permitió comprender los contenidos.
- ☐ El tiempo de trabajo para el desarrollo de las guías fue suficiente.
- ☐ Bibliografía de apoyo suficiente para el Curso.

Otro: ☐ _____

12. ¿Qué otros softwares matemáticos sugieres para complementar el dominio de los contenidos del Curso?

13. Según tu criterio, ¿Qué tan importante es el uso de videos orientadores para la comprensión de contenidos del Curso? *

Marca solo un óvalo.

	1	2	3	4	
No importante	☐	☐	☐	☐	Muy importante

14. Según tu criterio, ¿Qué tan importante es disponer de un documento digital (cuadernillo de prácticas) como apoyo para la comprensión de los contenidos del Curso? *

Marca solo un óvalo.

	1	2	3	4	
No importante	☐	☐	☐	☐	Muy importante

Este contenido no ha sido creado ni aprobado por Google.

Google Formularios

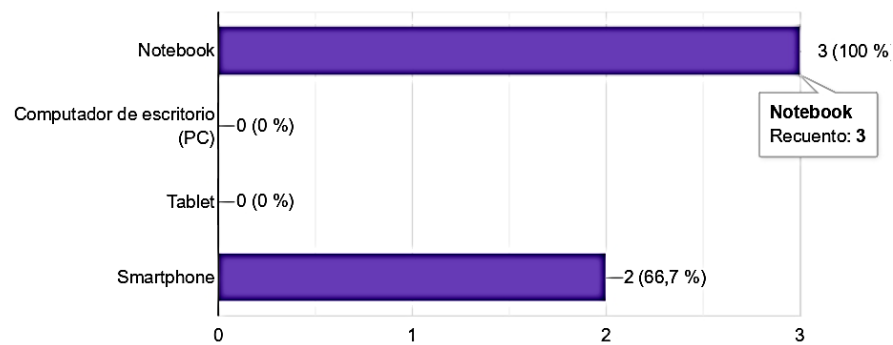
Encuesta uso de recursos TIC

3 respuestas

[Publicar datos de análisis](#)

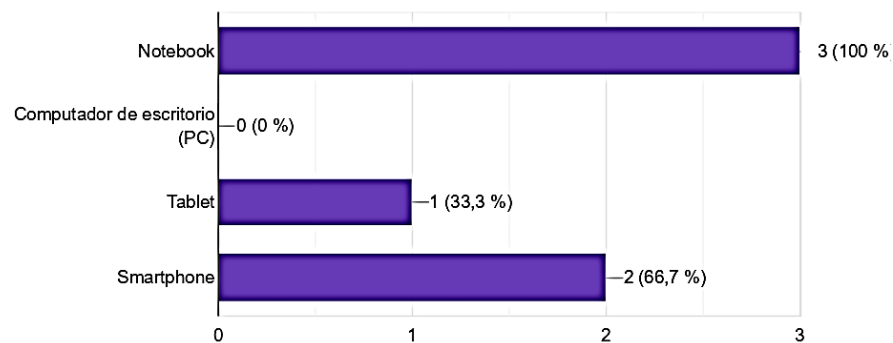
Considerando clases presenciales, ¿Qué dispositivo utilizas para estudiar en casa?

3 respuestas



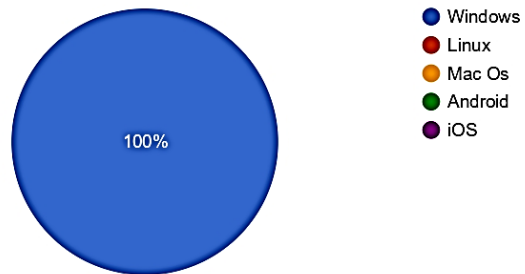
Considerando clases online ¿Qué dispositivo utilizas?

3 respuestas



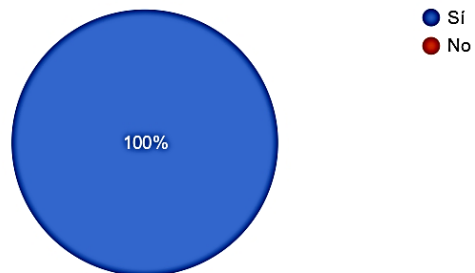
El dispositivo que utilizas en clases online y/o para estudiar, ¿Qué sistema operativo tiene?

3 respuestas



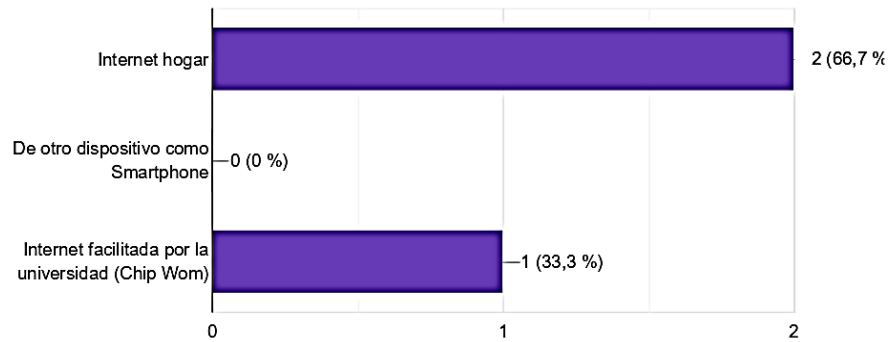
¿Dispones de internet en tu casa?

3 respuestas



Si tu respuesta es Si. ¿Qué tipo de Internet dispones?

3 respuestas



¿En que región y comuna te encontrabas al realizar el Curso "Taller de curvas y superficies"?

3 respuestas

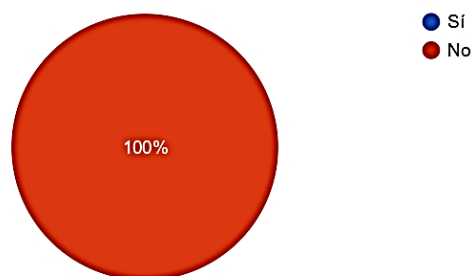
Metropolitana, Pudahuel

Región metropolitana, Quinta normal

Región Metropolitana, La Granja.

Debido al sector donde te encontrabas, ¿tuviste problemas de Internet?

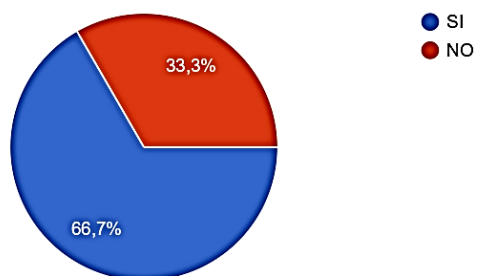
3 respuestas



Aplicación y uso de herramientas TIC

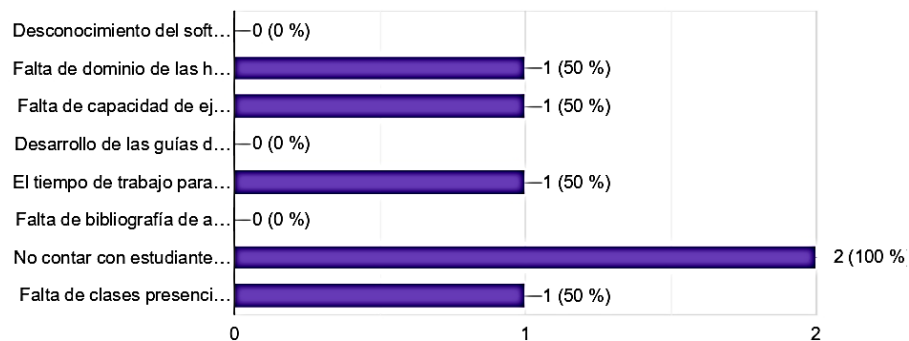
¿Tuviste problemas con algún software educativo utilizado en las clases del Curso "Taller de curvas y superficies"?

3 respuestas



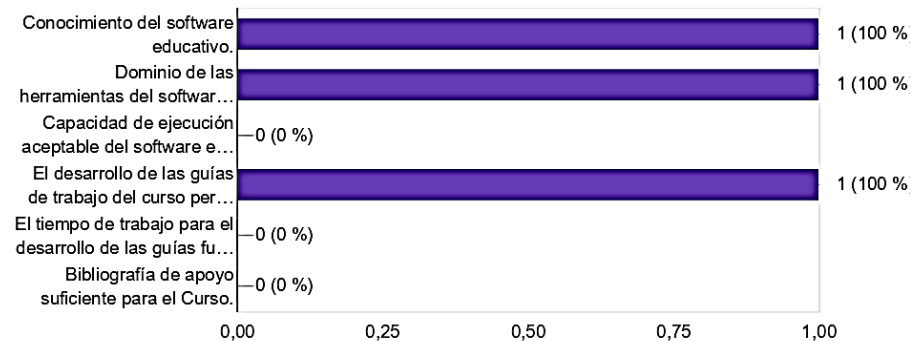
Si tu respuesta es SI. De la siguiente lista, marca las dificultades que tuviste:

2 respuestas



Si tu respuesta es NO, ¿Qué te ayudó para la comprensión y uso del software educativo del Curso?.

1 respuesta



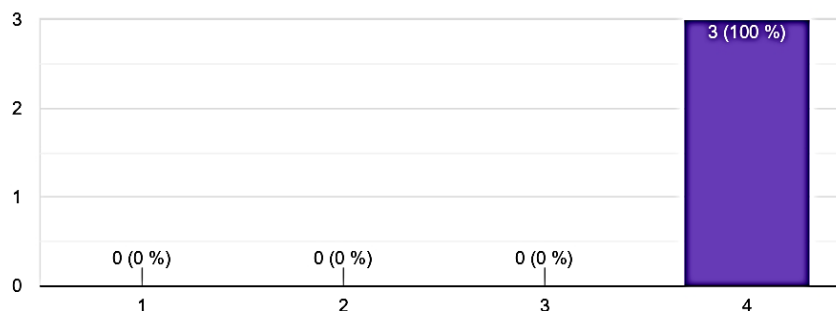
¿Qué otros softwares matemáticos sugieres para complementar el dominio de los contenidos del Curso?

0 respuestas

Aún no hay respuestas para esta pregunta.

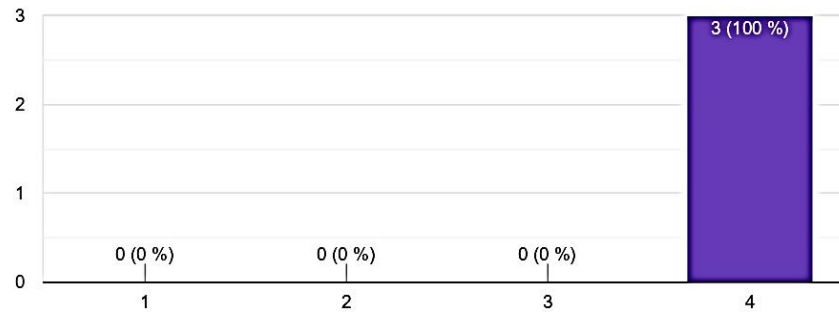
Según tu criterio, ¿Qué tan importante es el uso de videos orientadores para la comprensión de contenidos del Curso?

3 respuestas



Según tu criterio, ¿Qué tan importante es disponer de un documento digital (cuadernillo de prácticas) como apoyo para la comprensión de los contenidos del Curso?

3 respuestas



Este contenido no ha sido creado ni aprobado por Google. [Notificar uso inadecuado](#) - [Términos del Servicio](#) - [Política de Privacidad](#)

Google Formularios



Encuesta de apreciación, Taller de Geometría de curvas y superficies

28/9/21 14:58

Encuesta de apreciación, Taller de Geometría de curvas y superficies

Encuesta de apreciación, Taller de Geometría de curvas y superficies

Esta pequeña encuesta esta enfocada en recopilar información sobre los dispositivos y software que fueron utilizados en el curso Taller de Geometría de curvas y superficies, también permite recopilar apreciaciones y comentarios de las clases y material creado. Este pequeño formulario nos permitirá conocer de mejor manera los dispositivos utilizados y las apreciaciones personales derivadas del ambiente de clase y el trabajo dentro de la misma.

Se ha registrado el correo del encuestado (**null**) al enviar este formulario.

***Obligatorio**

1. Correo *

2. ¿A que sección perteneces? *

Marca solo un óvalo.

☐ Sección 1

☐ Sección 2

3. Estas cursando el Taller de Geometría de curvas y superficies por: *

Marca solo un óvalo.

☐ 1ra vez

☐ 2da vez

Aplicación y uso de herramientas TIC

<https://docs.google.com/forms/d/1YmV9NwIOMDS93LBiJ-HV0QE8oiX14Wt5VJRQixtNtdw/edit>

1/6

4. ¿Tuviste problemas con el software GeoGebra en las clases del "Taller de Geometría de curvas y superficies" durante el desarrollo de las prácticas individuales? *

Marca solo un óvalo.

☐ SI

☐ NO

5. Si tu respuesta es SI. De la siguiente lista, marca las dificultades que tuviste:

Selecciona todos los que correspondan.

- ☐ Desconocimiento del software educativo.
- ☐ Falta de dominio de las herramientas del software educativo.
- ☐ Falta de capacidad de ejecución del software educativo en el dispositivo utilizado.
- ☐ Desarrollo de las guías de trabajo del curso poco claras.
- ☐ El tiempo de trabajo para el desarrollo de las guías no fue suficiente.
- ☐ Falta de bibliografía de apoyo para el Curso.
- ☐ No contar con estudiante ayudante de apoyo al Curso durante el desarrollo de las prácticas.
- ☐ Falta de clases presenciales en el laboratorio de computación.
- ☐ Inasistencia recurrente a las clases online.

Otro: ☐ _____

6. Si tu respuesta es NO, ¿Qué te ayudó para la comprensión y uso del software educativo del Curso?.

Selecciona todos los que correspondan.

- ☐ Conocimiento del software educativo.
- ☐ Dominio de las herramientas del software educativo.
- ☐ Capacidad de ejecución aceptable del software educativo en el dispositivo utilizado.
- ☐ El desarrollo de las guías de trabajo del curso permitió comprender los contenidos.
- ☐ El tiempo de trabajo para el desarrollo de las guías fue suficiente.
- ☐ Bibliografía de apoyo suficiente para el Curso.
- ☐ Asistencia regular a las clases online.

Otro: ☐ _____

7. ¿Qué otros softwares matemáticos sugieres para complementar el dominio de los contenidos del Curso?

8. Según tu criterio, ¿Qué tan importante es disponer de documentos digitales, como apoyo para la comprensión de los contenidos de la Actividad Curricular? *

Marca solo un óvalo.

1 2 3 4

No importante ☐ ☐ ☐ ☐ Muy importante

Comprensión de los contenidos tratados en clase

9. ¿Qué tan satisfecho/a te sientes con la metodología de trabajo para abordar los contenidos por parte de la profesora y ayudantes? *

Marca solo un óvalo.

	1	2	3	4	
Muy insatisfecho/a	☐	☐	☐	☐	Muy satisfecho/a

10. Si sientes que los contenidos NO han sido entregados de la mejor manera, ¿Qué cambios o modificaciones propondrías?

11. Si sientes que los contenidos han sido abordados de buena manera, ¿Qué considerarías como aspecto central de esa apreciación?

12. ¿Tuviste problemas externos al momento de ingresar a las clases o para estudiar?
Considera, por ejemplo, fallas de internet o de tu dispositivo de conexión,
problemas personales, etc.

13. Según tu apreciación, el apoyo brindado por los ayudantes de la Actividad
Curricular ha sido: *

Marca solo un óvalo.

	1	2	3	4	
Muy mala	☐	☐	☐	☐	Muy buena

14. Si tu apreciación es más cercana a una mala experiencia, ¿Qué recomendarías a los
ayudantes?

15. Si tu apreciación es más cercana a una buena experiencia, ¿Qué sientes que posibilita un buen ambiente de trabajo en clases?

16. En esta pregunta puedes agregar comentarios generales sobre la actividad curricular, sobre los ayudantes o incluso como sentiste el ambiente, etc.

Este contenido no ha sido creado ni aprobado por Google.

Google Formularios

Unidad 1 - Curso Taller de Geometría de Curvas y Superficies

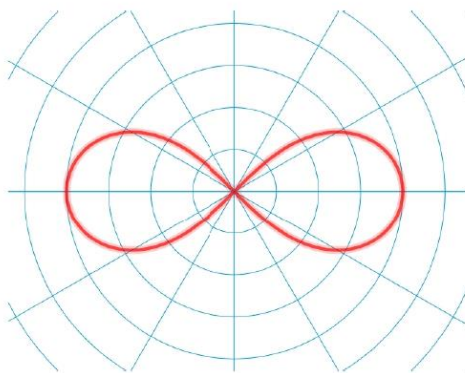


Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemática

A.C: Taller de Geometría de Curvas y Superficies

UNIDAD N°1

CURVAS PLANAS



Autores: Felipe Alvarado - Nicole Urrutia - Isabel Berna

Octubre, 2021

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

Índice

MÓDULO N°1: DESCRIPCIÓN DE CURVAS EN SU FORMA	3
1 Descripción de curvas en su forma	3
1.1 Descripción en forma explícita:	3
1.2 Descripción en forma implícita:	3
2 Algunas curvas importantes: Cónicas	8
2.1 Circunferencia	8
2.2 Parábola	10
2.3 Elipse	15
2.4 Hipérbola	20
2.5 Excentricidad en las cónicas	24
3 Representación gráfica de funciones de una variable real	27
3.1 Funciones polinómicas	27
3.2 Funciones Racionales	28
3.3 Funciones Exponenciales	32
3.4 Función logarítmica	33
3.5 Funciones trigonométricas	34
MÓDULO DE APRENDIZAJE N°2: CURVAS PLANAS	43
4 Curvas planas y Ecuaciones paramétricas	43
4.1 Ecuaciones paramétricas	43
4.2 Trazar una ecuación paramétrica en GeoGebra	43
4.3 Eliminación de parámetro	51
4.4 Modelado del movimiento circular	51
4.5 Cónicas de forma paramétrica	52
5 Coordenadas Polares	62
5.1 Definición de Coordenadas Polares	62
5.2 Determinación de todas las coordenadas polares de un punto	63
5.3 Relación entre coordenadas polares y rectangulares	64
5.4 Gráfica de ecuaciones polares	66
5.5 Cónicas en coordenadas polares	72
Práctica indagatoria individual	78
1 Cicloide	78



UMCE

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemática

1.1	Rotación de curvas	82
2	Rosa de 4 pétalos	83
3	Lemniscata de Bernoulli	87
4	Curva de Agnesi	88

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

MÓDULO N°1: DESCRIPCIÓN DE CURVAS EN SU FORMA**1 Descripción de curvas en su forma****1.1 Descripción en forma explícita:**

Las curvas en forma explícita son las que se pueden expresar como $y = f(x)$, variando x en un intervalo de la recta numérica real. Los puntos de la curva son de la forma $(x, f(x))$. Ejemplos bien conocidos son:

- La función lineal $f(x) = ax + b$, la cual en su forma explícita se escribe $y = ax + b$ que corresponde a una recta.
- La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, la cual en su forma explícita se escribe $y = ax^2 + bx + c$ que corresponde a una parábola.
- Las funciones trigonométricas; por ejemplo $f(x) = \text{sen}(x)$, presentan su forma explícita como $y = \text{sen}(x)$, donde $x \in [0, 2\pi]$ u otro intervalo.

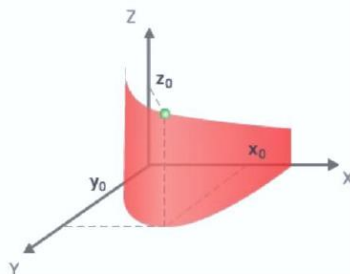
La forma explícita es la más conveniente, si se puede disponer de ella, ya que permite calcular los puntos de la curva con facilidad. Estos puntos son necesarios a efectos de la representación gráfica. No obstante, para gran cantidad de curvas de interés no disponemos de la forma explícita.

1.2 Descripción en forma implícita:

Se denomina función implícita a aquella función dada mediante una expresión en la que la variable dependiente y , no aparece despejada. Dicho de otra manera, aquella *función* que se expresa mediante una *igualdad* en la forma:

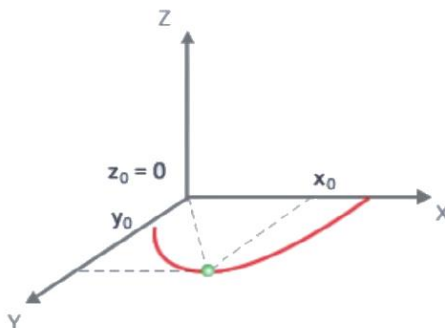
$$F(x, y) = 0$$

Gráficamente, se puede considerar una función implícita como un caso particular de una función de dos variables $f(x, y) = z$ en el que z siempre vale 0. Ver *Gráfica 1*.



Gráfica 1

Se trata de una función de dos variables (x e y). En ella se asigna un número real z_0 (una altura de la curva) a cada punto (x_0, y_0) del plano OXY que pertenezca al dominio de la función. Como se aprecia en la *Gráfica 2*, si forzamos $z = 0$ obtendremos una función "pegada" al plano OXY , es decir, una función de una sola variable que quedaría representada dos dimensiones.



Gráfica 2

Observación: No todas las ecuaciones de dos variables son funciones implícitas. Para determinarlo podemos usar el teorema de la función implícita. Por ahora te basta saber que si el teorema se verifica en una ecuación determinada $f(x, y) = 0$, entonces a partir de ella podrás despejar una de las variables en función de la otra, en la forma $y = f(x)$.

Práctica guiada n° 1:

De las siguientes funciones indique si son funciones explícitas o implícitas.

1. $8x^2 = yx - 11y$

Primero se despeja alguna de las variables, se escoge y , debido a que es lineal el exponente.

$$8x^2 = y(x - 11)$$

Se despeja y .

$$\frac{8x^2}{(x - 11)} = y$$

En esta función se pudo separar la variable y , dejándola a un lado de la igualdad, y x en otro lado de la igualdad, por lo tanto, es una **función explícita**.

2. $y + 4xy = 5y^2$

Se agrupan las variables y se iguala a 0 para encontrar soluciones.

$$5y^2 - y - 4xy = 0$$

$$5y^2 - y(1 + 4x) = 0$$

Calculamos las soluciones de la ecuación cuadrática presentada.

$$\frac{(1 + 4x) \pm \sqrt{(1 + 4x)^2}}{10}$$

$$\frac{(1 + 4x) \pm (1 + 4x)}{10}$$

$$y_1 = \frac{(1 + 4x) + (1 + 4x)}{10} \quad \vee \quad y_2 = \frac{(1 + 4x) - (1 + 4x)}{10}$$

$$y_1 = \frac{2(1 + 4x)}{10} \quad \vee \quad y_2 = 0$$

$$y_1 = \frac{1 + 4x}{5} \quad \vee \quad y_2 = 0$$

$$y_1 = \frac{1}{5} + \frac{4x}{5} \quad \vee \quad y_2 = 0$$

Por lo tanto, es una **función implícita** ya que para un valor de x existe más de una solución en y .

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

3. $x^2 + y^2 - 9 = 0$

Despejamos en y .

$$\begin{aligned} y^2 &= 9 - x^2 \\ |y| &= \sqrt{9 - x^2} \\ y_1 &= \sqrt{9 - x^2} \quad \vee \quad y_2 = -\sqrt{9 - x^2} \end{aligned}$$

Como y tiene mas de una solución, podemos determinar que la función es **implícita**.

4. $5x^2 - y^2 - 7xy + 9x + 22y - 6 = 0$

Se agrupan las variables para factorizar.

$$5x^2 + 9x - y^2 - y(7x - 22) - 6 = 0$$

Para determinar si la curva es una función explícita o implícita debemos obtener el discriminante. Si el discriminante de y es mayor a 0, la función tiene 2 soluciones reales para y .

$$\Delta = (7x - 22)^2 - 4(-1)(-6)$$

$$\Delta = 49x^2 - 308x + 484 - 24$$

$$\Delta = 49x^2 - 308x + 460$$

Al analizar $49x^2 - 308x + 460$, notamos que sea cual sea el valor de x , este siempre resultará en valores mayores que 0. Es decir, existen 2 soluciones reales para y .

Llevando esto a análisis de gráfica, podemos interpretar que la **función es implícita**, ya que existe un x que presenta 2 imágenes en y .

Trabajo práctico individual:

Dadas las siguientes funciones, determina si son explícitas o implícitas.

1. $x^3 + x^2y - 19y^4 = 0$

2. $4x^2y - 3y = x^3 - 1$

3. $xy - \sqrt{3xy^2} = 0$

4. $\frac{y}{\ln x} = \sqrt{x^3 - 9y}$

Actividad práctica en GeoGebra:

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda

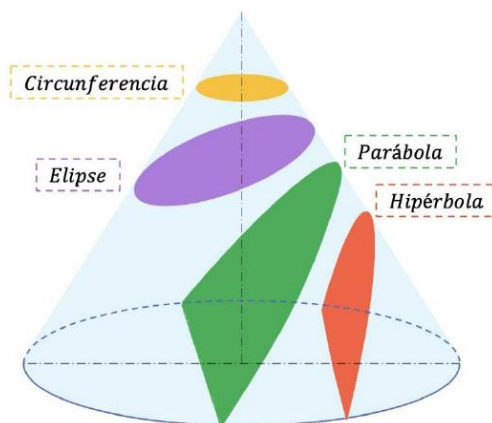
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

Instrucciones:

- Para esta actividad necesitamos instalar el programa **GeoGebra**.
 - Para ello ingresa a su página oficial www.geogebra.org y busca en descargas **GeoGebra Clásico 5**. Utilizaremos esta versión ya que es más amigable para trabajar. En cualquier caso, lo explicado de aquí en adelante servirá en la versión GeoGebra Clásico 5, GeoGebra Clásico 6 y todas sus extensiones.
1. En el programa, en la barra de **Entrada**, ingresa las siguientes funciones explícitas e implícitas y responde las preguntas en un cuadro de texto dentro del programa.
 - $F(x, y) = y^3 - xy^2 + \cos xy - 4$
 - $G(x, y) = y^3 - x^3 - 9y$
 - $H(x, y) = \ln x - \ln y + y - x$
 2. Ingrese cada función definida anteriormente en GeoGebra en la línea **ENTRADA**, ¿podemos visualizar las gráficas de las funciones mencionadas en el plano cartesiano? En caso de no poder visualizar las gráficas, ¿a qué crees que se debe?
 3. Investiga cómo visualizar en el plano cartesiano usando GeoGebra las funciones que, al ser ingresadas, no presentan una gráfica directamente.

2 Algunas curvas importantes: Cónicas

Las secciones cónicas son las curvas que obtenemos cuando hacemos un corte recto en un cono. Por ejemplo, si un cono se corta horizontalmente, la sección transversal es una circunferencia. Entonces, una circunferencia es una sección cónica. Otras formas de cortar un cono producen parábolas, elipses e hipérbolas. Como lo muestra la figura.



2.1 Circunferencia

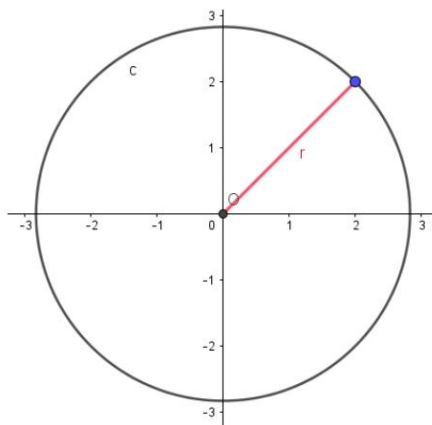
DEFINICIÓN: La circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano.

El punto fijo se llama **centro** de la circunferencia, y la distancia constante se llama **radio**.

La circunferencia cuyo centro es el punto $O(h, k)$ y cuyo radio es la constante r , tiene por ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Es decir, si la circunferencia tiene centro en el origen, la formula seria: $x^2 + y^2 = r^2$



2.1.1 Ecuación general de una circunferencia desplazada

La ecuación general para todas las cónicas es:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A y C son diferentes de cero.

Para el caso de la circunferencia $A = C$. Quedando así:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{ó} \quad Cx^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Práctica guiada N°1:

Complete el cuadrado hasta que la ecuación de la circunferencia quede en su forma canónica, identifique el centro de la circunferencia y su radio.

Ejemplo 1) $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 32 = 0$

$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 32 = 0$	Restar 32 a ambos lados de la ecuación
$(x^2 - 10x) + (y^2 - 8y) = -32$	Agrupe los términos
$(x^2 - 10x + 25) + (y^2 - 8y + 16) = -32 + 25 + 16$	Complete los cuadrados
$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$	Factorice y sume

De la ecuación obtenida se tiene que el centro de la circunferencia es el punto (5,4) y su radio es 3.

Ejemplo 2) $x^2 + y^2 + 14x + 33 = 0$

$x^2 + y^2 + 14x + 33 = 0$	Restar 33 a ambos lados de la ecuación
$(x^2 + 14x) + (y^2) = -33$	Agrupe los términos
$(x^2 + 14x + 49) + (y^2) = -33 + 49$	Complete los cuadrados
$(x + 7)^2 + (y)^2 = 16$	Factorice y sume

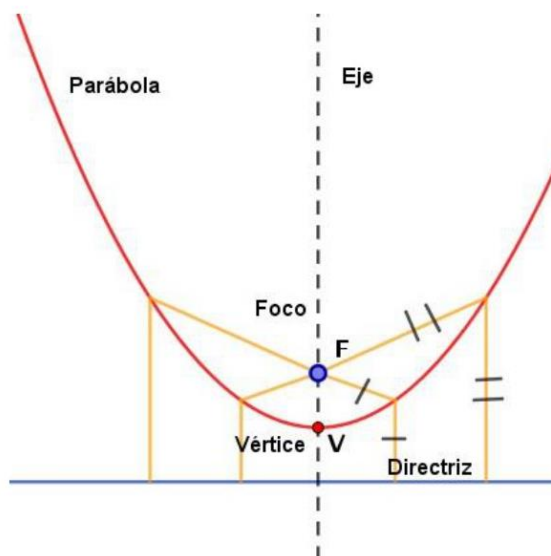
De la ecuación obtenida se tiene que el centro de la circunferencia es el punto $(-7,0)$ y su radio es 4.

2.2 Parábola

DEFINICIÓN: Una parábola es el lugar geométrico de un punto, llamado *foco*, que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, llamada *directriz*, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.

El punto fijo se llama **foco** y la recta fija **directriz** de la parábola.

El vértice V de la parábola se encuentra a la mitad entre el foco y la directriz, y el eje de simetría es la recta que corre por el foco perpendicular a la directriz.



Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

La ecuación general es de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ donde, } A = 0 \text{ ó } C = 0$$

Quedando así:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Dx + Ey + F &= 0 && \text{parábola con eje vertical} \\ Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0 && \text{parábola con eje horizontal} \end{aligned}$$

2.2.1 Parábola con eje vertical

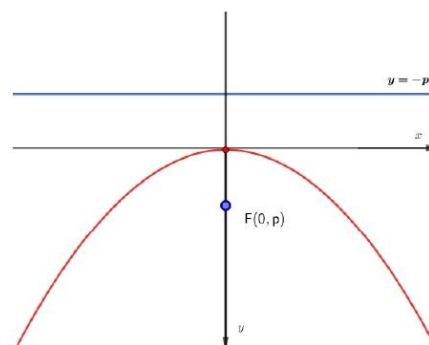
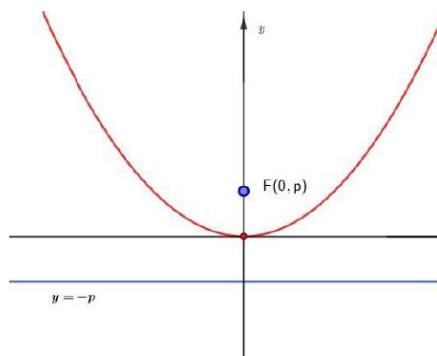
La gráfica de la ecuación: $x^2 = 4py$ es una parábola con las siguientes propiedades.

Vértice $V(0,0)$

Foco $F(0, p)$

Directriz $y = -p$

La parábola abre hacia arriba si $p > 0$ o hacia abajo si $p < 0$.



Practica guiada N°2:

Ejemplo 1) Encuentre una ecuación para la parábola con vértices $V(0,0)$ y foco $F(0,2)$ y trace su grafica.

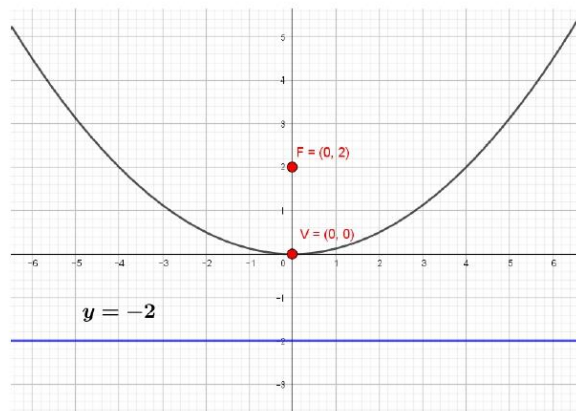
SOLUCIÓN Como su foco es $F(0,2)$, se tiene que $p = 2$. Y como $p = 2 > 0$, la parábola es abierta hacia arriba.

A su vez reemplazando se tiene que la directriz es $y = -2$

Para obtener la ecuación de la parábola solo debemos reemplazar el valor de p en la formula $x^2 = 4py$, quedando así:

$$x^2 = 4(2)y$$
$$x^2 = 8y$$

Luego solo nos basta con graficar la parábola $x^2 = 8y$ en GeoGebra, añadiendo el foco, vértice y la directriz, quedando así:



Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

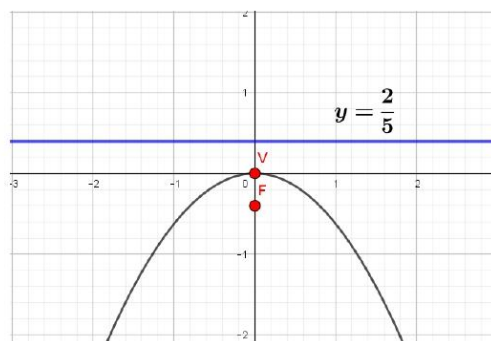
Ejemplo 2) Encuentre el foco y la directriz de la parábola $-x^2 - \frac{8}{5}y = 0$ y trace su grafica.

SOLUCIÓN: Para hallar el foco y directriz, ponemos la ecuación dada en la forma $x^2 = -\frac{8}{5}y$. Al compararla con la ecuación general $x^2 = 4py$ se tiene que:

$$4p = -\frac{8}{5} \rightarrow p = -\frac{2}{5}$$

Luego reemplazando en las fórmulas generales para el foco y la directriz se tiene que el foco es $F(0, -\frac{2}{5})$ y la directriz es $y = \frac{2}{5}$. Como $p < 0$, la parábola abre hacia abajo.

Luego solo nos basta con graficar la parábola $-x^2 - \frac{8}{5}y = 0$ en GeoGebra, añadiendo el foco, vértice y la directriz, quedando así:



2.2.2 Parábola con eje horizontal

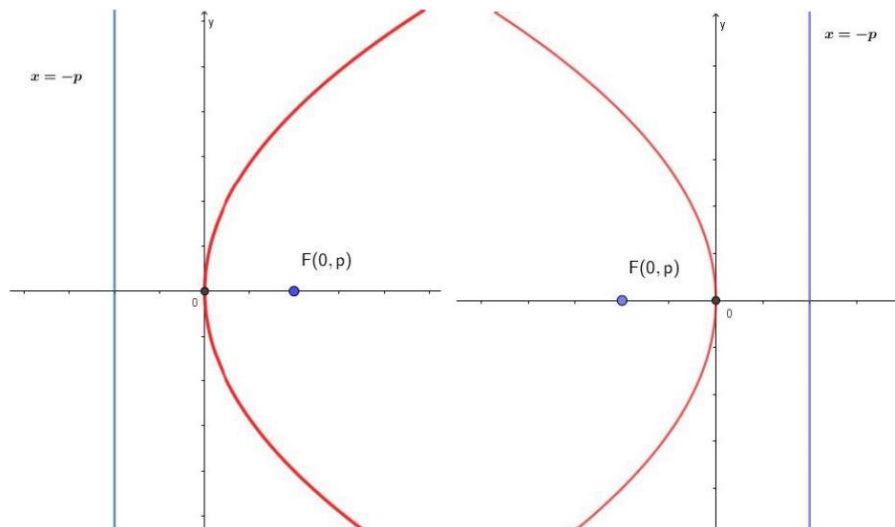
La gráfica de la ecuación: $y^2 = 4px$ es una parábola con las siguientes propiedades.

Vértice $V(0,0)$

Foco $F(p, 0)$

Directriz $x = -p$

La parábola abre hacia derecha si $p > 0$ o hacia izquierda si $p < 0$.



Práctica guiada N°3:

Ejemplo 3) Encuentre una ecuación para la parábola con vértices $V(0,0)$ y foco $F(3,0)$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN: Como su foco es $F(3,0)$, se tiene que $p = 3$. Y como $p = 3 > 0$, la parábola es abierta a la derecha.

A su vez reemplazando se tiene que la directriz es $x = -3$

Para obtener la ecuación de la parábola solo debemos reemplazar el valor de p en la fórmula $y^2 = 4px$, quedando así:

$$y^2 = 4(3)x$$

$$y^2 = 12x$$

Luego solo nos basta con graficar la parábola $y^2 = 12x$ en GeoGebra, añadiendo el foco, vértice y la directriz, quedando así:

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

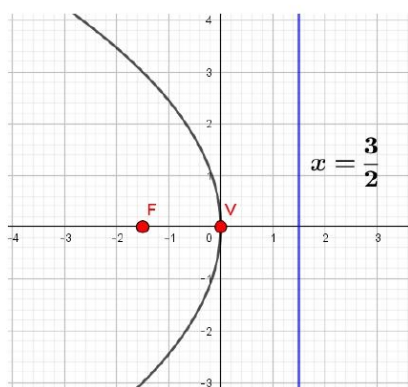
Ejemplo 4) Encuentre el foco y la directriz de la parábola $6x + y^2 = 0$ y trace su grafica usando GeoGebra.

SOLUCIÓN: Para hallar el foco y directriz, ponemos la ecuación dada en la forma $y^2 = -6x$. Al compararla con la ecuación general $y^2 = 4px$ se tiene que:

$$4p = -6 \rightarrow p = -\frac{3}{2}$$

Entonces reemplazando en las fórmulas generales para el foco y la directriz se tiene que el foco es $F\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y la directriz es $x = \frac{3}{2}$. Como $p < 0$, la parábola abre a la izquierda.

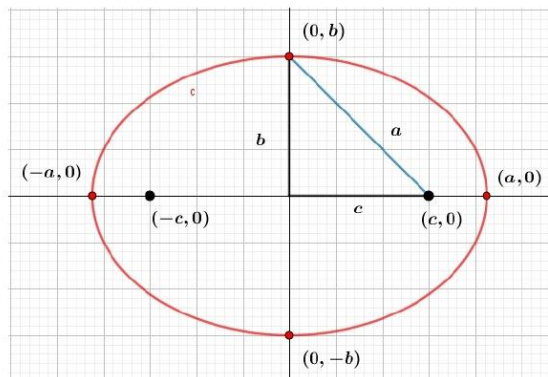
Luego solo nos basta con graficar la parábola $6x + y^2 = 0$ en GeoGebra, añadiendo el foco, vértice y la directriz, quedando así:



2.3 Elipse

Una elipse es una curva ovalada que se asemeja a una circunferencia alargada. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

Definiciones: Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos (F_1 y F_2) de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre dos puntos. Estos dos puntos fijos son los focos de la elipse.



Para obtener la ecuación más sencilla para una elipse, colocamos los focos sobre el eje x en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ de modo que el origen está a la mitad entre ellos.

Para más facilidad hacemos que la suma de las distancias desde un punto en la elipse a los focos sea $2a$. Entonces si $P(x, y)$ es cualquier punto en la elipse, tenemos

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Formula de distancia:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

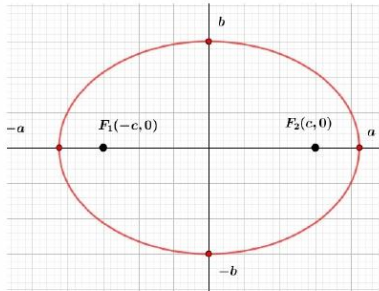
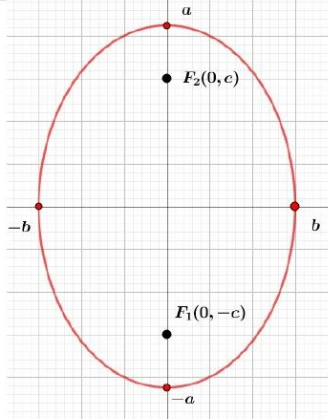
2.3.1 Ecuación general de la elipse:

La ecuación general de las cónicas es de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Para el caso de la elipse, $A \neq C$ y de igual signo.

2.3.2 Elipse con centro en el origen

Ecuación	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > b > 0$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ $a > b > 0$
Vértices	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
Eje mayor	Horizontal, longitud $2a$	Vertical, longitud $2a$
Eje menor	Vertical, longitud $2b$	Horizontal, longitud $2b$
Focos	$(\pm c, 0), c^2 = a^2 - b^2$	$(0, \pm c), c^2 = a^2 - b^2$
Excentricidad	$e = \frac{c}{a} < 1$	
Gráfica		

Práctica guiada N°4:

Ejemplo 5) Encuentre los focos de la elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$, y trace su gráfica usando GeoGebra.

SOLUCIÓN: Primero, se debe transformar la ecuación de la forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$16x^2 + 9y^2 = 144$	Divide entre 144
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	Forma normal

Como $16 > 9$, se tiene que la elipse tiene el eje horizontal menor, además $a = 4$ y $b = 3$.

Luego para obtener el foco se tiene que:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

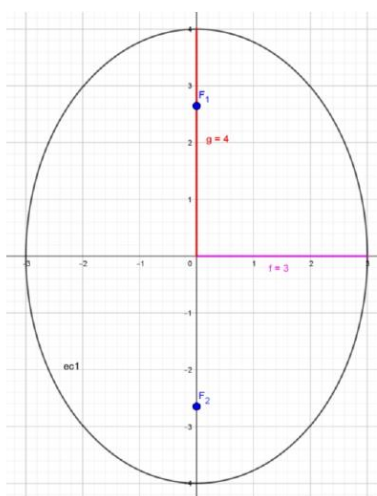
$$c^2 = 16 - 9$$

$$|c| = \sqrt{7}$$

$$c_1 = \sqrt{7} \vee c_2 = -\sqrt{7}$$

Pero, como en este caso el valor de c , es el valor de la distancia entre el foco y el centro de la elipse.
Tomaremos el caso para $c_1 = \sqrt{7}$.

Entonces los focos son $(0, \pm\sqrt{7})$. Luego debemos graficar cada uno de los datos obtenidos.



Práctica guiada N°6:

Ejemplo 6) Una elipse tiene la ecuación: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Encuentre los focos, los vértices y las longitudes de los ejes mayor y menor, y trace la gráfica. Y luego Grafique la elipse y cada una de sus partes utilizando GeoGebra.

SOLUCIÓN: Como el denominador de x^2 es mayor, la elipse tiene un eje horizontal mayor.

Tenemos que: $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, por lo que reemplazando en la fórmula para obtener los focos.

$$c^2 = 9 - 4$$

$$c^2 = 5$$

$$|c| = \sqrt{5}$$

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

$$c_1 = \sqrt{5} \vee c_2 = -\sqrt{5}$$

Pero como en este caso el valor de c , es el valor de la distancia entre el foco y el centro de la elipse. Tomaremos el caso para $c_1 = \sqrt{5}$.

Focos	$(\pm\sqrt{5}, 0)$
Vértices	$(\pm 3, 0)$
Longitud de eje mayor	6
Longitud de eje menor	4

Luego solo nos basta con graficar los datos ya mencionados en GeoGebra.

Práctica guiada N°7:

Ejemplo 7) Los vértices de una elipse son $(\pm 4, 0)$ y los focos son $(\pm 2, 0)$. Encuentre su ecuación y trace la gráfica usando GeoGebra.

Solución: Por la información, tenemos que $a = 4$ y el eje mayor es horizontal. Los focos son $(\pm 2, 0)$, es decir, se tiene que $c = 2$. Para escribir la ecuación, solo nos falta saber el valor de b .

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - b^2 \\ 2^2 &= 4^2 - b^2 \\ 4 &= 16 - b^2 \\ b^2 &= 12 \\ |b| &= \sqrt{12} \\ b_1 &= \sqrt{12} \vee b_2 = -\sqrt{12} \end{aligned}$$

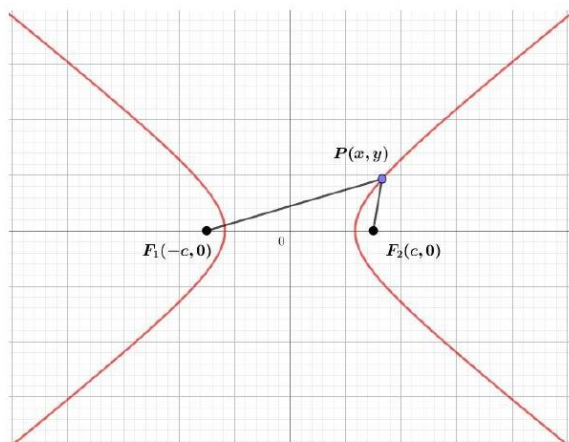
Pero como en este caso el valor de b , es el valor de la distancia del centro de la elipse, a uno de sus ejes. Tomaremos el caso para $b_1 = \sqrt{12}$.

Entonces la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

2.4 Hipérbola

Definiciones. Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.



2.4.1 Ecuación general de la hipérbola

La ecuación general de las cónicas es de la forma:

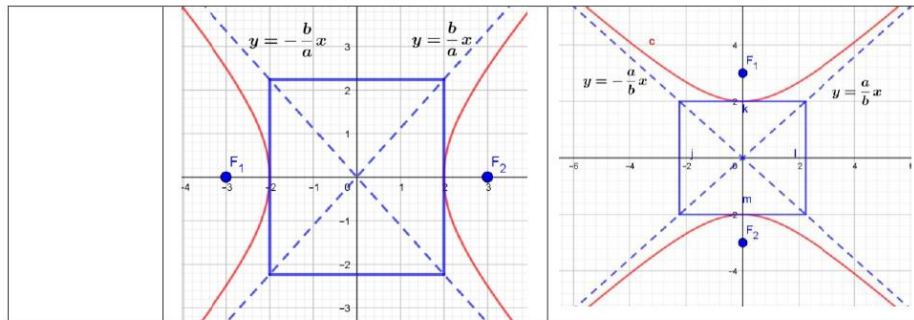
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Para el caso de la hipérbola, A y C tienen signos contrarios.

2.4.2 Hipérbola con centro en el origen

Ecuación	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)
Vértices	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
Eje transverso	Horizontal, longitud $2a$	Vertical, longitud $2a$
Asíntotas	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$
Excentricidad	$e = \frac{c}{a} > 1$	
Focos	$(\pm c, 0), c^2 = a^2 + b^2$	$(0, \pm c), c^2 = a^2 + b^2$

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia



Práctica guiada N°8:

Ejemplo 8) Una hipérbola tiene la ecuación $9x^2 - 16y^2 = 144$. Encuentre los vértices, focos y asíntotas, y trace la gráfica usando GeoGebra.

SOLUCIÓN: Primero debemos transformar la ecuación.

$9x^2 - 16y^2 = 144$	Divide entre 144
$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$	Forma canonica

Como x^2 es positivo, la hipérbola tiene un eje transversal horizontal, es decir, sus vértices y focos están en el eje X.

Como $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, obtenemos $a = 4$, $b = 3$. Por lo que podemos obtener el valor de c .

$$\begin{aligned} c^2 &= 16 + 9 \\ c^2 &= 25 \\ |c| &= 5 \\ c_1 &= 5 \vee c_2 = -5 \end{aligned}$$

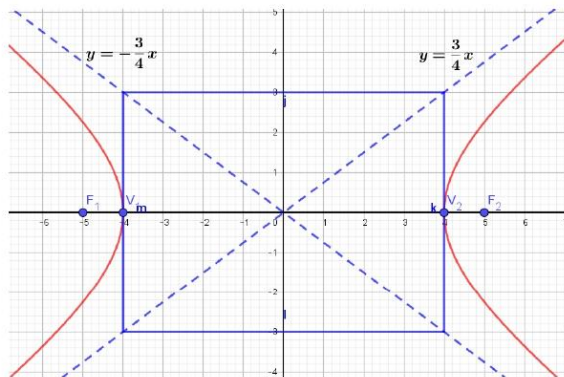
Pero, como en este caso el valor de c , es el valor de la distancia entre el foco y el centro de la hipérbola. Tomaremos el caso para $c_1 = 5$.

Por lo que tenemos:

Vértices	$(\pm 4, 0)$
Focos	$(\pm 5, 0)$
Asíntotas	$y = \pm \frac{3}{4}x$

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

Después de trazar la caja central y asíntotas, completamos el dibujo de la hipérbola.



Trabajo práctico individual:

- I. Identifique cada una de las cónicas completando cuadrados y cada uno de sus componentes de las siguientes ecuaciones. Grafique cada una de las ecuaciones y cada uno de sus componentes usando GeoGebra.

- a) $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$
- b) $5x + 3y^2 = 0$
- c) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{4} = 0$
- d) $-4x^2 - 4x - 8y + 9 = 0$
- e) $8x^2 + 12y = 0$
- f) $25y^2 - 9x^2 - 225 = 0$
- g) $20x^2 + 4y^2 - 5 = 0$
- h) $x^2 - y^2 = 10(x - y) + 1$
- i) $x^2 + 4y^2 + 20x - 40y - 300 = 0$

- II. Encuentre ecuaciones para la familia de parábolas con vértice en el origen y con directrices $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $y = 4$, y $y = 8$.

Trace las gráficas en GeoGebra. ¿Qué concluye usted?

- III. Use GeoGebra para trazar la mitad superior (la parte en los cuadrantes primero y segundo) de la familia de elipses $x^2 + ky^2 = 100$ para $k = 4, 10, 25$ y 50 .
¿Qué tienen en común los miembros de esta familia de elipses? ¿Cómo difieren?

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

- IV. La circunferencia auxiliar de una elipse es la circunferencia con radio igual a la mitad de la longitud del eje menor y centro igual que en la elipse (vea la figura). La circunferencia auxiliar es entonces la circunferencia máxima que puede caber dentro de una elipse.

a) Encuentre una ecuación para la circunferencia auxiliar de la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.



- V. Las hipérbolas se llaman confocales si tienen los mismos focos.

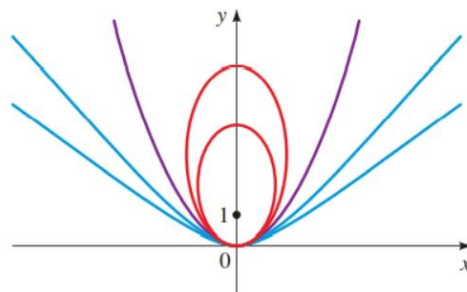
a) Demuestre que las hipérbolas

$$\frac{y^2}{k} - \frac{x^2}{16-k} = 1 \text{ con } 0 < k < 16 \text{ son confocales.}$$

b) Use GeoGebra para trazar cada una de las hipérbolas para $k = 1, 4, 8$ y 12 . ¿Cómo cambia la forma de la gráfica cuando k aumenta?

- VI. Una familia de cónicas confocales. Las cónicas que comparten un foco se llaman confocales. Considere la familia de cónicas que tienen un foco en $10, 12$ y un vértice en el origen, como se ve en la figura.

- Encuentre ecuaciones de dos elipses diferentes que tengan estas propiedades.
- Encuentre ecuaciones de dos hipérbolas diferentes que tengan estas propiedades.
- Explique por qué sólo una parábola satisface estas propiedades. Encuentre su ecuación.
- Trace las cónicas que encontró en los incisos (a), (b) y (c) en los mismos ejes de coordenadas (para las hipérbolas, trace sólo las ramas superiores).
- ¿Cómo están relacionadas las elipses e hipérbolas con la parábola?



2.5 Excentricidad en las cónicas

Las cónicas se pueden definir en términos de uno de sus **focos**, de una recta llamada **directriz** y un número llamado **excentricidad**.

Definición: Una cónica es el lugar geométrico de todos los puntos P de un plano tales que la razón entre la distancia de P a un punto fijo F y de P a una recta fija D , es constante.

El punto fijo F se llama foco de la cónica, la recta D es la directriz asociada al foco F , y la razón constante se denomina excentricidad de la cónica y se denota por e .

Luego, una cónica es el conjunto de todos los puntos P del plano, tales que:

$$\frac{\text{distancia}(P, F)}{\text{distancia}(P, D)} = e$$

Reemplazando esto tenemos que:

$$e = \frac{c}{a}$$

2.5.1 Excentricidad dependiendo de la cónica

Circunferencia	$e = 0$
Elipse	$0 < e < 1$
Parábola	$e = 1$
Hipérbola	$e > 1$

Trabajo práctico individual:

- I. Hallar la ecuación de la cónica con los siguientes datos:
 - a) Vértices $(0,4)$ y $(0,-4)$; Excentricidad $= \frac{3}{2}$
 - b) Vértices $(1,1)$ y $(7,1)$; Excentricidad $= \frac{1}{3}$
 - c) Focos $(0, \pm 2)$; Excentricidad $= \frac{2}{3}$
 - d) Vértices $(-1, -3)$ y $(-1,5)$; Excentricidad $= \frac{3}{4}$
 - e) Vértices $(3,4)$ y $(3, -2)$; Excentricidad $= 2$
- II. Una elipse tiene su centro en el origen, y su eje mayor coincide con el eje Y . Si uno de los focos es el punto $(0,3)$ y la excentricidad es igual a $\frac{1}{2}$. Hallar las coordenadas del otro foco, el otro vértice, las longitudes de sus ejes mayor y menor, y la ecuación de la elipse.
- III. Hallar la ecuación y la excentricidad de la elipse que tiene su centro en el origen, uno de sus vértices en el punto $(0, -7)$ y pasa por el punto $(\sqrt{5}, \frac{14}{3})$
- IV. Demostrar que la circunferencia es un caso particular de la elipse cuya excentricidad vale cero.
- V. Si k es un número positivo, demostrar que la ecuación $3x^2 + 4y^2 = k$ representa una familia de elipses cada una de las cuales tiene una excentricidad igual a $\frac{1}{2}$.
- VI. Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje transversal sobre el eje X (eje perteneciente a los vértices). Hallar su ecuación sabiendo que su excentricidad es $\frac{\sqrt{6}}{2}$ y que la curva pasa por el punto $(2,1)$.

VII. El centro de una hipérbola está en el origen, y su eje transversal está sobre el eje Y . Si un foco es el punto $(0, 5)$ y la excentricidad es igual a 3.

VIII. Demostrar que la excentricidad de toda hipérbola equilátera es igual a $\sqrt{2}$.

Nota:

Hipérbola equilátera:

Consideremos la ecuación de la hipérbola de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se define la hipérbola equilátera como un caso especial de la hipérbola en donde $a = b$, quedando así:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

3 Representación gráfica de funciones de una variable real

Como vimos en el anteriormente, podemos representar de manera gráfica diferentes curvas, identificando su forma explícita o en otros casos con su forma implícita. Fuera de lo convencional, en el mundo de la geometría y de la matemática, no solo encontramos curvas que representan cónicas, también podemos recurrir a los gráficos para comprender otras curvas como: polinómicas, racionales, logarítmicas, trigonométricas, exponenciales, etc. En resumen, toda función que involucre 2 variables siempre puede ser graficada y el gráfico nos permitirá comprender su estructura y discernir si los resultados calculados coinciden con el comportamiento de la curva.

3.1 Funciones polinómicas

Una **función polinomial de grado n** es una función de la forma:

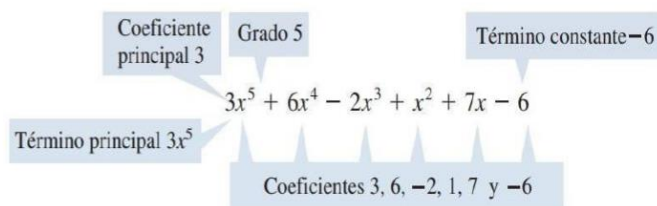
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio. El número a_0 es el **coeficiente o término constantes**.

El número a_n , es el coeficiente de la mayor potencia, es el **coeficiente principal** y el término $a_n x^n$ es el término principal.

Con frecuencia nos referimos a funciones polinomiales simplemente como polinomios. El siguiente polinomio tiene grado 5, coeficiente principal 3 y término constante -6 .



Para graficar los diferentes polinomios, debemos considerar si estos pueden ser expresados de forma explícita o de forma implícita.

Algunos ejemplos de polinomios de forma explícita:

- $x^2 - y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x^2$
- $x^3 - y + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x^3 + 5$
- $x^3 + 2x^3 + 4x + y - 10 = 0 \Rightarrow y = -x^3 - 2x^2 - 4x + 10$

Como hemos podido estudiar en los temas anteriores, estas ecuaciones podemos ingresarlas de manera directa al graficador GeoGebra, anotando en la **ENTRADA** la ecuación de la forma $y = f(x)$.

Algunos ejemplos de polinomios de forma implícita:

- $F(x, y) = x^5 + y^2 - 2y + 7$
- $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
- $F(x, y) = x^3 + x - 2y^2 + 7$

3.2 Funciones Racionales

Una función racional es una función de la forma:

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{con } Q(x) \neq 0$$

donde P y Q son funciones polinomiales. Suponemos que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factor en común. Aun cuando las funciones racionales se construyen a partir de polinomios, sus gráficas tienen un aspecto muy diferente del de las gráficas de funciones polinomiales.

Para hacernos una idea del gráfico de una función racional, debemos tener en cuenta lo aprendido en cursos pasados sobre estas funciones. A modo de recordatorio, debemos tener presente:

1. El dominio de una función racional está formado por todos los números reales x excepto aquellos para los cuales el denominador es cero
2. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si y se aproxima al infinito positivo o negativo cuando x se aproxima a a por la derecha o por la izquierda. (Ver Imagen N°1)

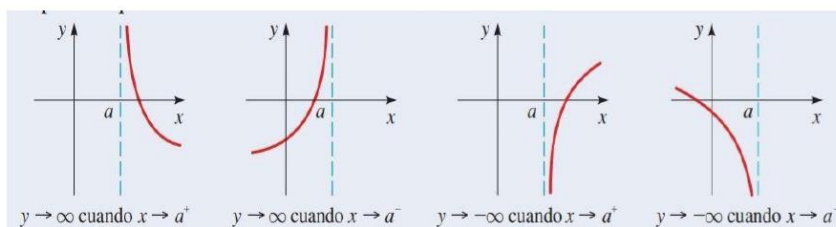


Imagen N°1, Precálculo, Matemática para el cálculo 6ta edición (pag.279)

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

3. La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la función $y = f(x)$ si la curva y se aproxima a b cuando x se aproxima al infinito positivo o negativo.

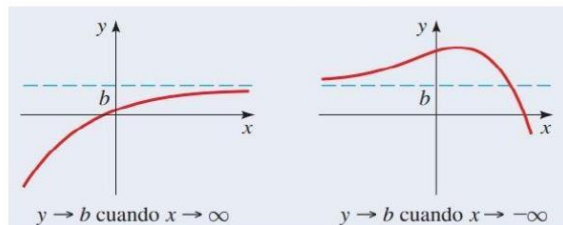


Imagen N°2, Precálculo, Matemática para el cálculo 6ta edición (pag.279)

Para calcular las asíntotas basta con conocer las características de los polinomios, tanto del numerador como del denominador.

- Si el coeficiente principal del denominador es mayor que el coeficiente principal del numerador, la función racional posee una asíntota horizontal y esta se calcula como:

$$\frac{\text{Coeficiente principal del numerador}}{\text{Coeficiente principal del denominador}}$$

- Las asíntotas verticales se calculan mediante los ceros del denominador. Esto se debe a que la función no está determinada en los valores de x que generan ceros en el denominador de una fracción.

Para comprender el cálculo de los puntos de intersección de las funciones racionales y el valor de sus asíntotas, consideramos el siguiente ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$$

- 1) Primero factorizamos la función racional

$$y = \frac{(x+1)(x-4)}{2x(x+2)}$$

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

- 2) Luego determinamos los puntos de intersección en el eje x , igualando la función a 0

$$0 = \frac{(x+1)(x-4)}{2x(x+2)}$$

$$(x+1) = 0 \quad \vee \quad (x-4) = 0$$

$$x = -1 \quad \vee \quad x = 4$$

Por lo tanto, la función interseca al eje x en los puntos $(-1,0)$ y $(4,0)$

- 3) Para determinar los puntos de intersección con el eje y , calculamos $f(0)$

En este caso, la función no está determinada para $f(0)$, ya que si reemplazamos los valores la fracción se indetermina por la presencia de un valor 0 en el denominador.

- 4) Para calcular las asíntotas verticales, consideramos los ceros del denominador.

$$2x(x+2) = 0$$

$$2x = 0 \quad \vee \quad (x+2) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -2$$

Por lo tanto, la función presenta 2 asíntotas verticales, una en la recta $x = 0$ y la otra en la recta $x = -2$

La curva se acercará por la derecha y por la izquierda de cada una de estas asíntotas, determinando el comportamiento de la curva, así:

Cuando $x \rightarrow$	-2^-	-2^+	0^-	0^+
El signo de $y = \frac{(x+1)(x-4)}{2x(x+2)}$	$\frac{(-)(-)}{(-)(-)}$	$\frac{(-)(-)}{(-)(+)}$	$\frac{(+)(-)}{(-)(+)}$	$\frac{(+)(-)}{(+)(+)}$
Entonces $y \rightarrow$	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Tabla N°1, Creación propia

- 5) El procedimiento para calcular las asíntotas horizontales consiste en conocer la relación de los coeficientes mayores del numerador y del denominador.

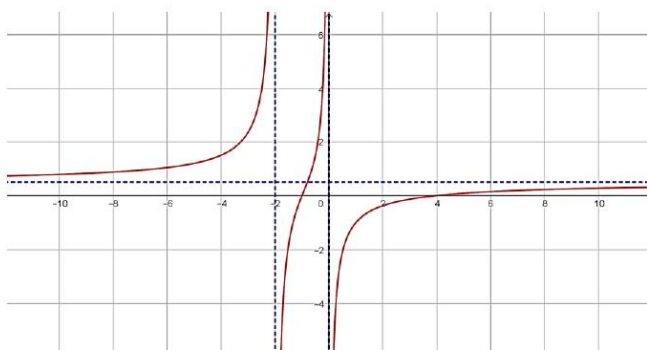
$$\frac{\text{Coeficiente principal del numerador}}{\text{Coeficiente principal del denominador}} = \frac{1}{2}$$

Con esta información podemos notar que existe una asíntota horizontal en la recta $y = \frac{1}{2}$

Con los datos recolectados, podemos estimar el comportamiento de la curva, asumiendo que la curva toma una trayectoria con dirección al $+\infty$ cuando se acerca por la izquierda de la asíntota $x = -2$ y toma una trayectoria hacia $-\infty$ al acercarse por la derecha la misma asíntota.

También, la curva considera una trayectoria hacia $+\infty$ cuando se acerca por la izquierda de la asíntota $x = 0$ y toma valores hacia el $-\infty$ cuando se acerca por la derecha de dicha asíntota

Si graficamos obtenemos:



Para culminar el trabajo de estas funciones, utilizaremos el graficador GeoGebra. Con el podemos visualizar de manera rápida las funciones racionales, ya que estas, comúnmente, vienen expresadas de la forma $y = f(x)$.

Trabajo práctico individual:

1. En GeoGebra, escribir en **ENTRADA** la función racional $r(x) = \frac{2}{x-3}$. Luego grafica sus asíntotas.
2. Repetir lo anterior para: $s(x) = \frac{3x-5}{x+2}$

En pocas ocasiones encontraremos funciones racionales de forma implícita, y estudiarlas nos mostrarán una mayor gama de posibilidades de graficar cualquier situación que se nos presente.

3. Ahora en GeoGebra, escribir en **ENTRADA** las siguientes funciones racionales, utilizando sintaxis *CurvaImplicita*.

- $F(x, y) = \frac{(x^2+y^2-1)}{(x^4+y^2)}$

- $F(x, y) = \frac{x^3+y^2}{y^2+x^2}$

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

3.3 Funciones Exponenciales

La función exponencial con base a está definida en todos los números reales x por:

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Esta función tiene dominio en $\mathbb{R}$ y rango en el intervalo $(0, \infty)$. La recta $y = 0$ (eje x) es una asíntota horizontal de f . La gráfica de f tiene una de las siguientes formas:

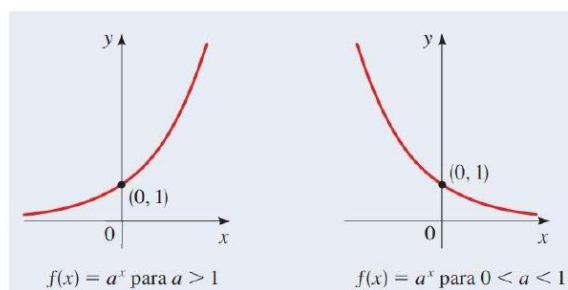


Imagen N°4 Precálculo, Matemática para el cálculo 6ta edición (pag.304)

Desde esta función en adelante, nos encontraremos con mayor cantidad de ejemplos de funciones implícitas. Esto se debe a la utilidad de estudiar con más detalle estas funciones en cursos superiores, donde se abordan derivadas y derivadas implícitas. Lo que no quiere decir que las funciones anteriores no se utilicen en cálculos de derivadas, pero dichas funciones son más simples y dan pie a la introducción del trabajo mismo.

Trabajo práctico individual:

(A) Funciones exponenciales explícitas: Para reconocer a través de su gráfica distintas funciones exponenciales, ingresemos en un mismo plano de GeoGebra las siguientes funciones e identifiquemos cada gráfica con la fórmula usando la opción “texto”:

- $g(x) = 1 + 2^x$
- $h(x) = -e^x + 2$
- $k(x) = 2^{x-1} - 5x$

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

(B) Funciones exponenciales implícitas: Al igual que el ejemplo anterior, para comprender lo que sucede con funciones más complejas encontradas de manera implícita, utilizamos *Curvalmplicita* en GeoGebra y graficamos:

- $F(x, y) = e^{xy+x} - xy - 2$
- $G(x, y) = e^x y - y^2 + 4$

3.4 Función logarítmica

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La función logarítmica con base a denotada por $\log_a$ está definida por:

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Por lo tanto, $\log_a x$ es el *exponente* al cual la base a debe ser elevada para obtener x .

Trabajo práctico individual:

(A) Funciones logarítmicas explícitas: A modo de ejercitación, grafique en GeoGebra las siguientes funciones logarítmicas:

- $y = \log_{10}(1 - x^2)$
- $f(x) = \log_2(x)$
- $h(x) = \ln x + \ln(2 - x)$

(B) Funciones logarítmicas implícitas: Para comprender el comportamiento de las funciones polinómicas implícitas, graficamos en GeoGebra con la sintaxis *Curvalmplicita*, los siguientes ejemplos:

- $F(x, y) = \log_{xy}(2x - y^2)$
- $G(x, y) = \ln y(x - y)$
- $H(x, y) = \log_x y(y + 5)$

3.5 Funciones trigonométricas

Antes de estudiar las funciones trigonométricas, primero debemos explorar la circunferencia unitaria. Dicha circunferencia se define como una circunferencia de radio 1 centrada en el origen, en el plano xy . Su función está definida por:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Para demostrar que, un punto P está ubicado en la circunferencia unitaria, basta con comprobar que sus coordenadas cumplen con la ecuación de una circunferencia unitaria. Por ejemplo $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ se encuentra en la circunferencia unitaria ya que:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = 1$$

Ahora, supongamos que t es un número real. Marquemos una distancia t a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en el punto $(1,0)$ y moviéndonos en dirección contraria a las manecillas del reloj si t es positivo y en sentido de las manecillas del reloj si t es negativo.

De esta forma llegamos al punto $P(x, y)$ en la circunferencia. El punto $P(x, y)$ obtenido en esta forma se llama punto terminal determinado por el número real t .

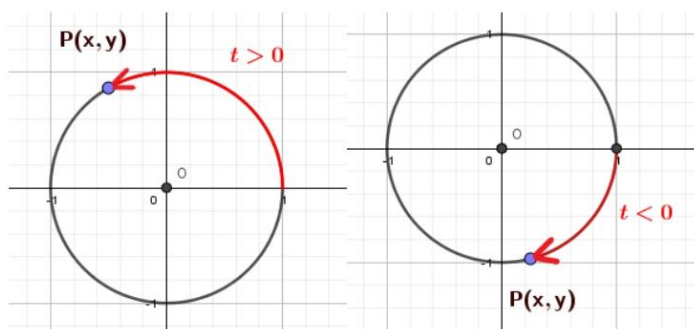


Imagen N°5 Creación propia

La circunferencia unitaria es $C = 2\pi$. Entonces, si un punto inicia en $(1,0)$ y se mueve en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, en toda la vuelta de la circunferencia unitaria, y regresa a $(1,0)$, recorre una distancia de 2π . Entonces podemos observar que para recorrer alrededor del semicírculo ha obtenido una distancia de $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$, y para recorrer un cuarto del círculo ha obtenido una distancia de $\frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$.

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

Observe la siguiente imagen donde se representa el recorrido descrito en cada caso.

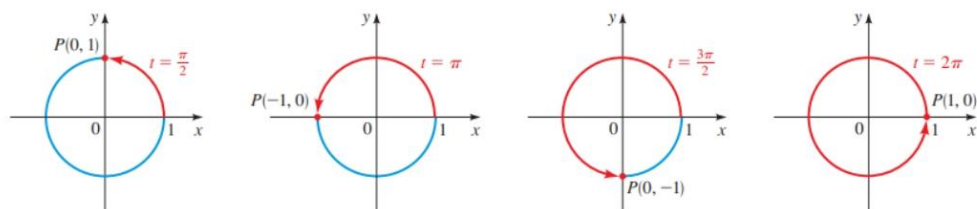


Imagen N°6 Precálculo, Matemática para el cálculo 6ta edición (pag.371)

3.5.1 Gráficas de funciones seno y coseno

Se relacionarán las funciones seno y coseno directamente con los valores en donde oscila t . Como vimos con anterioridad, la circunferencia unitaria tiene un periodo de 2π , que nos permite en palabras simples, dar la vuelta completa a la circunferencia. Así el punto $P(x, y)$ terminal, determinado por el número real t es el mismo que el punto $P(x, y)$ determinado por el número real $t + 2\pi$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(t + 2n\pi) &= \operatorname{sen} t && \text{para cualquier entero } n \\ \operatorname{cos}(t + 2n\pi) &= \operatorname{cos} t && \text{para cualquier entero } n \end{aligned}$$

Entonces las funciones seno y coseno repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π . Para trazar sus gráficas, graficaremos primero un periodo, es decir, determinamos pares ordenados sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ completando una tabla de valores (Tabla N°2), para luego trazar la gráfica (imagen N°7).

t	$\operatorname{sen} t$	$\operatorname{cos} t$
$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 0$
$\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$	$1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow -1$
$\pi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$
$\frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1$

Tabla N°2, Precálculo, Matemática para el cálculo 6ta edición (pag.387)

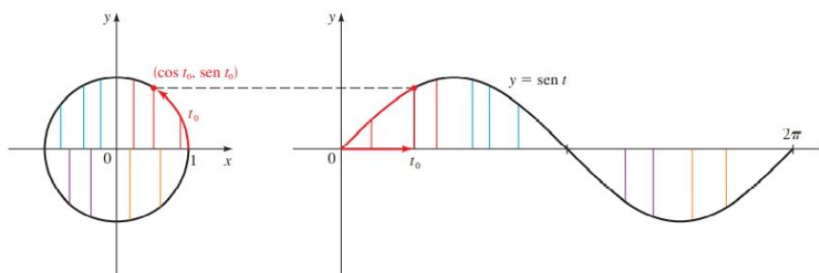


Imagen N°7 Precálculo, Matemática para el cálculo 6ta edición (pag.387)

Para trazar las gráficas en forma más precisa, podemos encontrar otros pocos valores de $\sen t$ y $\cos t$:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sen t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Tabla N°3, Precálculo, Matemática para el cálculo 6ta edición (pag.387)

A continuación, usamos esta información para graficar las funciones $\sen t$ y $\cos t$ para t entre 0 y 2π en las Figuras 2 y 3. Éstas son las gráficas de un período. Usando el dato de que estas funciones son periódicas con período 2π , obtenemos sus gráficas completas al continuar la misma configuración a la izquierda y a la derecha en cada intervalo sucesivo de longitud 2π . La gráfica de la función seno es simétrica con respecto al origen. Esto es como se esperaba, porque la función seno es una función impar. Como la función coseno es una función par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y .

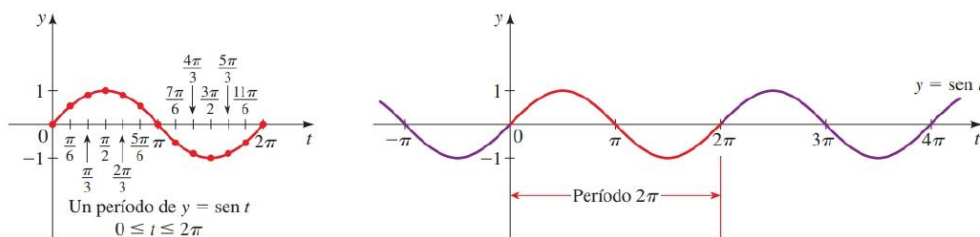


Imagen N°9, Precálculo, Matemática para el cálculo 6ta edición (pag.388)

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

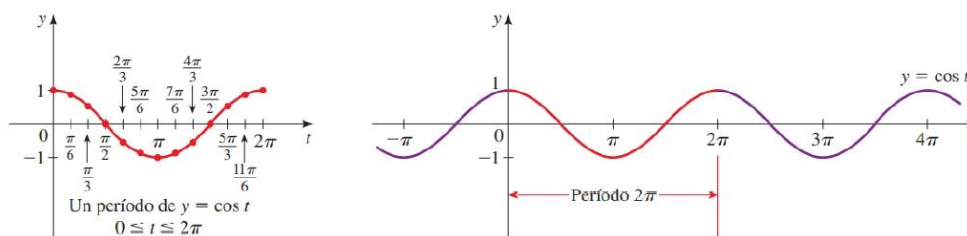


Imagen N°10, Precálculo, Matemática para el cálculo 6ta edición (pag.388)

3.5.2 Transformaciones de funciones seno y coseno.

A continuación, consideramos gráficas de funciones que son transformaciones de las funciones seno y coseno. Es tradicional usar la letra x para denotar la variable del dominio de una función. Por lo tanto, de aquí en adelante usamos la letra x y escribimos $y = \text{sen } x$, $y = \text{cos } x$, $y = \text{tan } x$ y así sucesivamente para denotar estas funciones.

Práctica Guiada N°1

Sigue las siguientes indicaciones para comprender las diferentes transformaciones de las funciones seno y coseno:

- En GeoGebra grafica la función $y = \cos x$
- Crea un deslizador en GeoGebra, esta herramienta la encontraras en la parte superior, en la barra de herramientas por defecto.
- Nombra al deslizador con la letra a , representará los valores numéricos y con un mínimo de 0, máximo de 5 e incremento de 0,1
- Ahora grafica una nueva función $y = a * \cos x$
- Para finalizar mueve el deslizador y observa cómo intervienen los valores de a en la gráfica.
- Repite los mismos pasos para una función $y = \text{sen } x$

Como vimos en la circunferencia unitaria, las funciones seno y coseno tienen periodos de 2π , por lo tanto, para las siguientes fórmulas:

$$y = a * \text{sen}(kx)$$

$$y = a * \text{cos}(kx)$$

$$k > 0$$

Necesariamente kx debe variar entre 0 y 2π para completar el periodo de las funciones seno y coseno. En otras palabras, $0 \leq kx \leq 2\pi$ o $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{k}$. Entonces en las funciones seno y coseno, x varía entre 0 y $\frac{2\pi}{k}$.

Estas curvas son conocidas como curvas sinusoidales y cosenoidales, que de forma colectiva se agrupan en **curvas sinusoidales**.

Práctica guiada N°2

Aquí, veremos cómo afectan los diferentes valores de k en las funciones seno y coseno.

- Primero debemos graficar ambas curvas sin intervención. Ingresamos en GeoGebra las funciones $y = \sin x$, $y = \cos x$.
- Ahora generamos 2 deslizadores, uno llamado a y otro k . Estos deslizadores deben tener las mismas características: ser numéricos, de mínimo 0 y máximo 2 con incremento de 0.1.
- Ahora graficamos nuevas curvas, multiplicando a y k donde corresponda. (Para ello revisamos nuevamente la forma de las funciones seno y coseno, que involucran estos valores)
- Juega con los deslizadores y observa las gráficas que resultan. ¿Qué puedes decir al variar el valor k y la gráfica de las funciones?, ¿Qué pasa cuando este aumenta o disminuye?
- Para finalizar, reflexiona con respecto a las siguientes preguntas: ¿Qué pasa con la función cuando a es negativo y k positivo o viceversa? ¿Qué sucede con las gráficas cuando ambos son negativos? ¿Cómo podemos generalizar estas reflexiones y conclusiones, de tal manera que podamos demostrar su comprensión?

Otra transformación que podemos realizar a las curvas de seno y coseno es referente a su desplazamiento en la gráfica. Como ya sabemos, los desplazamientos se pueden reducir a desplazamientos verticales y horizontales. Para visualizar estos desplazamientos, replicamos los siguientes pasos en GeoGebra:

Práctica guiada N°3:

- Graficamos una función seno y una función coseno sin ningún valor que las afecte.
- Generamos un deslizador c , numérico y seleccionamos a tu parecer los mínimos y máximos
- Luego graficamos una función $y = c + \sin x$
- ¿Qué puedes ver en la gráfica? ¿Qué sucede cuando c es negativo?
- Para encontrar el otro desplazamiento, generamos un deslizador k numérico con valores que te acomoden.
- Graficamos una función incorporando este deslizador k en donde consideres que actuará como deslizador de la función.

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

- ¿Qué acción genera k sobre la función? ¿Qué pasa cuando k es negativo? ¿Qué conclusiones generales podemos sacar de esto?

A modo de resumen de lo visto en las distintas practicas guiadas, te dejamos el siguiente resumen, que contiene valiosa información y algunas generalidades para cada una de las trasformaciones.

Curvas de seno y coseno

Las curvas sinusoidales y cosenoidales

$$y = a * \text{sen}(k(x - b)) \quad y \quad y = a * \cos(k(x - b)) \quad (k > 0)$$

Tienen **amplitud** $|a|$, **período** $\frac{2\pi}{k}$, y **desfase** b

Un intervalo apropiado sobre el cual graficar un período completo es $\left[b, b + \left(\frac{2\pi}{k}\right)\right]$.

Actividad práctica en GeoGebra:

1. Dadas las siguientes funciones, determine es polinómica, racional, logarítmica, exponencial o trigonométrica, también determine las intersecciones con el eje x , con el eje y y las asíntotas si es que las presenta:

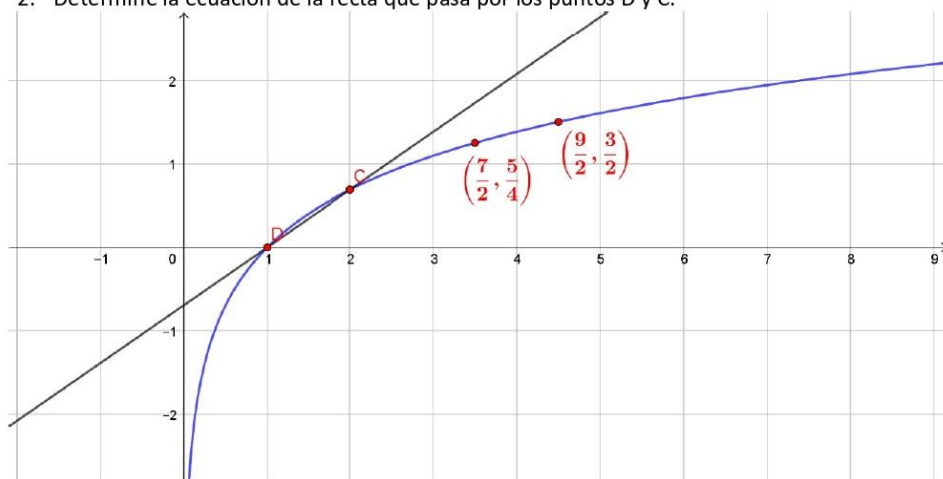
- i. $f(x) = \frac{6x}{x^2+2}$
- ii. $g(x) = x^4 - x^2 - 2x + 2$
- iii. $h(x) = 10^x - 5^x$
- iv. $k(x) = 2^x - 5$



UMCE

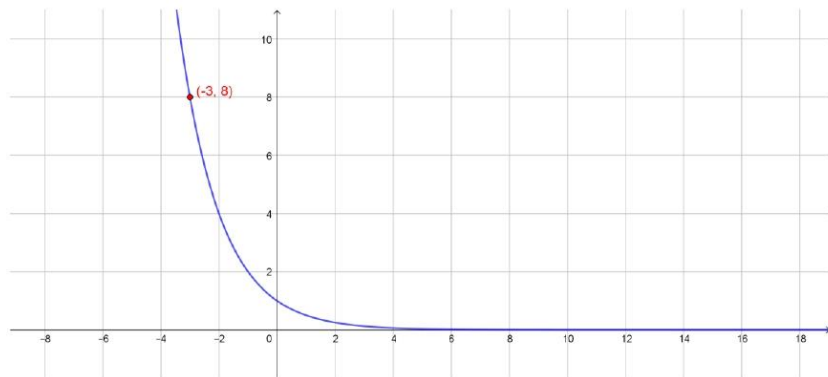
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemática

2. Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos D y C.



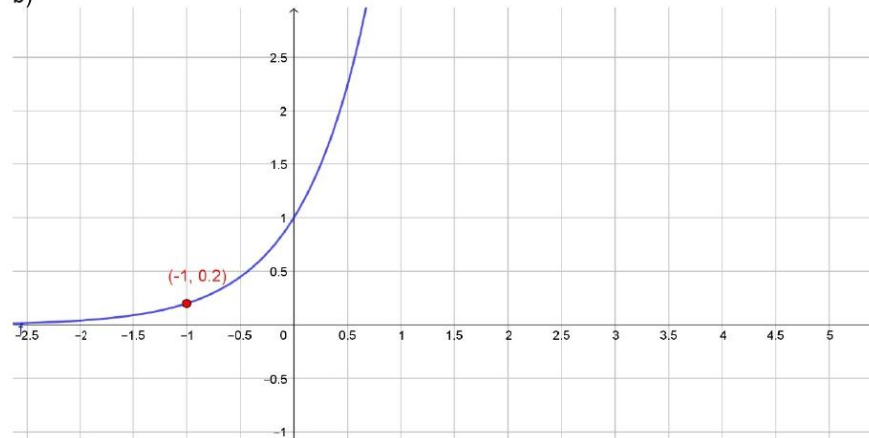
3. Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica nos presentan. Argumente algebraicamente o con sus palabras la estrategia para encontrar las fórmulas de las funciones.

a)

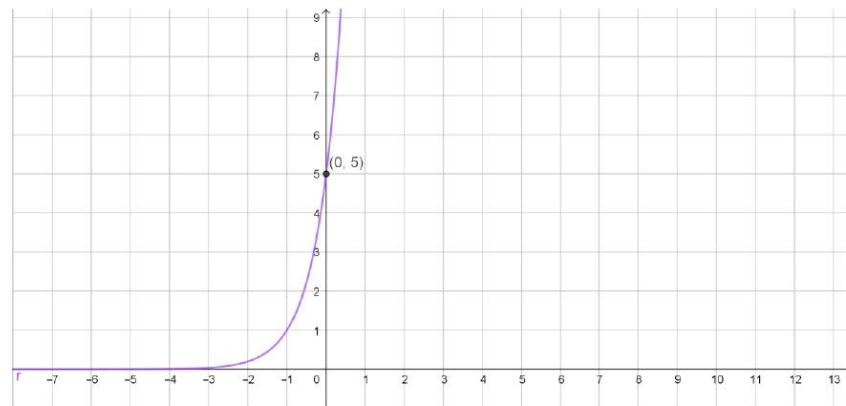


Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

b)



c)



Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

**UMCE**

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemática

4. Compare las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$, siguiendo las indicaciones:
 - a. Evalúa ambas para los valores $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15$, y 20 .
 - b. Trace las gráficas de f y g en el mismo conjunto de ejes.
 - c. Determine que función crece con mayor rapidez y si existe intersección en las gráficas

5. Estudio complementario sobre la gráfica de las funciones estudiadas:
 - a. Investigue que condiciones determinan una asíntota diagonal en una función racional.
 - b. Investigue si la presencia de esta asíntota impide la aparición de asíntotas horizontales y/o verticales.
 - c. Busque un ejemplo de función racional que presente una asíntota diagonal, mencione su forma algebraica y grafique usando GeoGebra.

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

MÓDULO DE APRENDIZAJE N°2: CURVAS PLANAS**4 Curvas planas y Ecuaciones paramétricas**

En los módulos anteriores trabajamos el concepto de curva mediante funciones de variable real, coordenadas polares, entre otros. En esta sección definiremos como se obtiene una curva mediante ecuaciones paramétricas. Para ello tenemos la siguiente definición:

4.1 Ecuaciones paramétricas

Definición: Si f y g son funciones definidas sobre un intervalo I , entonces el conjunto de puntos $(f(t), g(t))$ es una curva plana. Las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

donde $t \in I$, son ecuaciones paramétricas para la curva, con parámetro t .

4.2 Trazar una ecuación paramétrica en GeoGebra

Práctica guiada n°1: Trace la curva definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x = t^2 - t \qquad y = t - 1$$

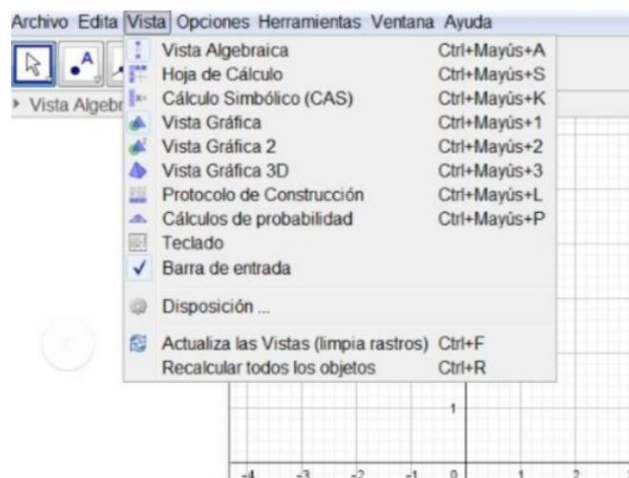
Solución en GeoGebra:

Para todo valor de t , obtenemos un punto sobre la curva. Por ejemplo, si $t = 0$, entonces $x = 0$ e $y = -1$, de modo que el punto correspondiente es $(0, -1)$.

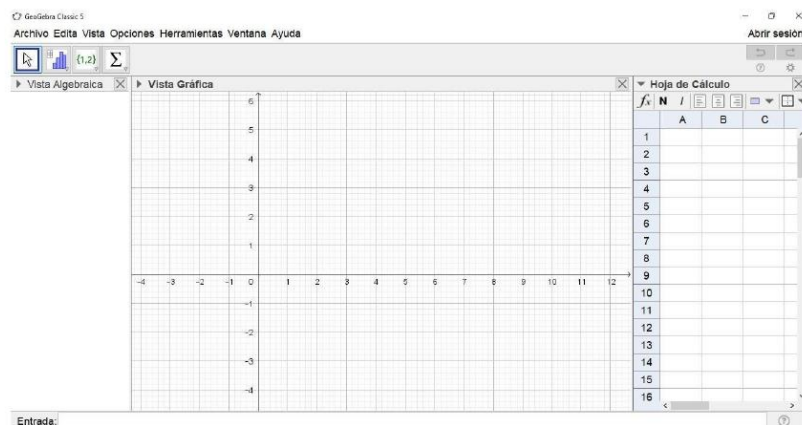
Para encontrar más puntos de esta curva, podemos generar una tabla. Con los valores que esta tabla nos arroja, podemos graficar la curva.

Para todo este proceso recurriremos al graficador gratuito GeoGebra.

1. En GeoGebra, seleccionamos la pestaña llamada **Vista**, como muestra la siguiente figura.



Luego activamos **Hoja de Cálculo**, como se muestra en la siguiente figura



Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

2. Al abrir la **Hoja de Cálculo**, generamos una tabla de valores de la siguiente manera.

Hoja de Cálculo				
f_x	N	/		
	A	B	C	
1	T	X	Y	
2	-2			
3	-1			
4	0			
5	1			
6	2			
7	3			
8	4			
9	5			

3. Completar las columnas de X e Y .

Observación:

- La vista **Hoja de Cálculo**, trabaja de la misma forma que Excel. Como corresponde a una hoja de cálculo, en cada casilla podemos generar funciones o ecuaciones. Por ejemplo, en la casilla B2 generamos una ecuación de la forma $= A2^2 - A2$.

Hoja de Cálculo				
f_x	N	/		
B2				
	A	B	C	
1	T	X	Y	
2	-2	$=A2^2 - A2$		
3	-1			
4	0			
5	1			
6	2			
7	3			
8	4			
9	5			

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

- Para rellenar los espacios arrastramos desde la esquina inferior derecha, posibilitando, al igual que en Excel, que se generen automáticamente los valores bajo la función definida.

▼ Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	T	X	Y
2	-2	6	
3	-1	2	
4	0	0	
5	1	0	
6	2	2	
7	3	6	
8	4	12	
9	5	20	
10			

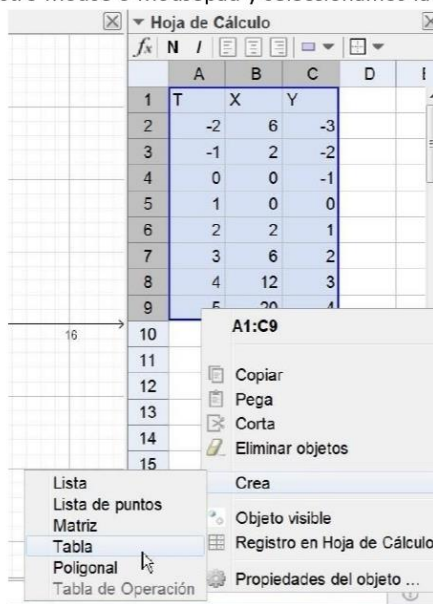
▼ Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	T	X	Y
2	-2	6	=A2 - 1
3	-1	2	
4	0	0	
5	1	0	
6	2	2	
7	3	6	
8	4	12	
9	5	20	
10			

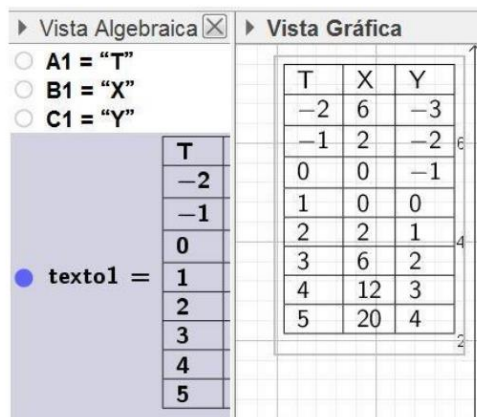
▼ Hoja de Cálculo

	A	B	C
1	T	X	Y
2	-2	6	-3
3	-1	2	-2
4	0	0	-1
5	1	0	0
6	2	2	1
7	3	6	2
8	4	12	3
9	5	20	4
10			

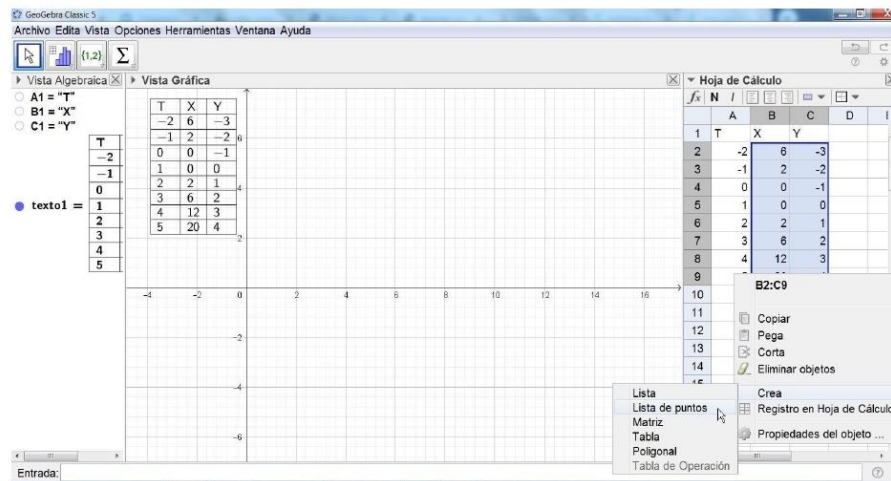
4. Al completar la tabla, seleccionamos todos los valores de ella como muestra la figura. Luego presionamos el click derecho de nuestro Mouse o Mousepad y seleccionamos la opción **Crea**, en ella buscamos la opción **Tabla**.



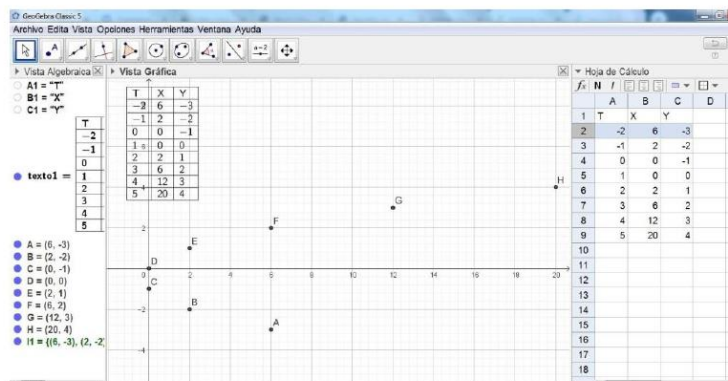
Al seleccionar la Tabla, ocurrirá lo siguiente:



5. Luego, se seleccionan solo los valores de X e Y , para posteriormente seleccionar la opción **Lista de puntos**, también ubicada en la opción **Crea**.



Al seleccionar la **Lista de puntos**, ocurrirá lo siguiente:



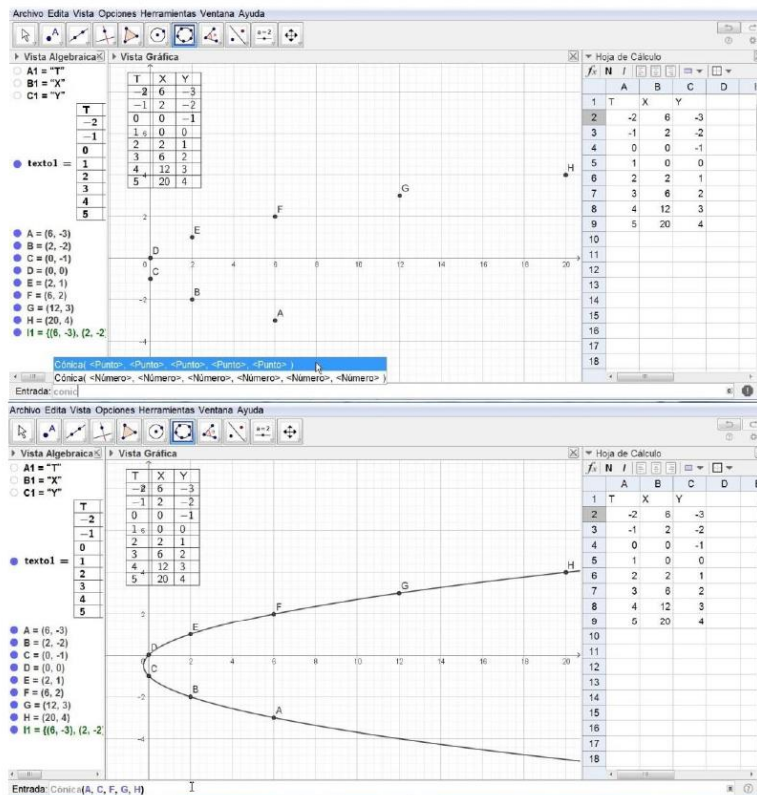
6. Al obtener todos los puntos de la tabla, podemos observar que los puntos de la gráfica pertenecen a una parábola, por lo que para obtener la ecuación exacta utilizaremos la función (o sintaxis) llamada **Cónica**.

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

Observación: Para obtener la ecuación se puede realizar de las siguientes formas:

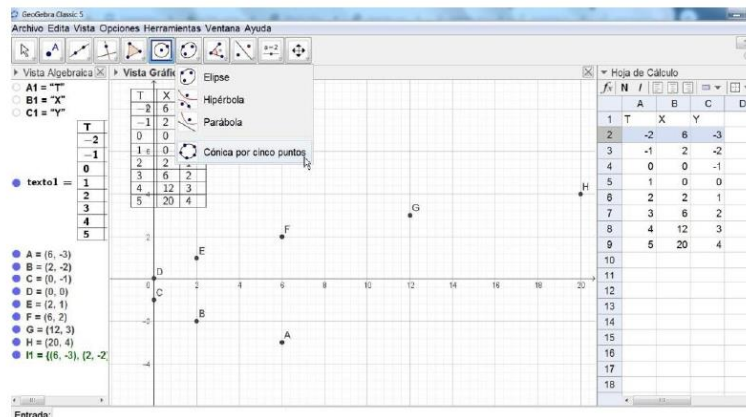
- a. En la Entrada de GeoGebra, se escribe la función:

Cónica(< Punto >, < Punto >, < Punto >, < Punto >, < Punto >)



Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
 Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

- b. Otra forma de generar la función es utilizando una de las pestañas de la **Vista Gráfica**, específicamente la séptima pestaña (de izquierda a derecha), en ella se encuentran varias opciones para generar diferentes cónicas. En ella seleccionaremos la opción **Cónica por cinco puntos**, al seleccionar esta opción, marcaremos 5 puntos.



Trabajo práctico individual n°1:

- a) Utilizando el ejercicio anterior, sustituimos t por $-t$, obteniendo las ecuaciones paramétricas.

$$x = t^2 + t \quad y = -t - 1$$

Grafique usando GeoGebra y basándose en las instrucciones anteriores.

- b) Además, sustituimos t por $2t$ en la práctica guiada, obteniendo:

$$x = 4t^2 - 2t \quad y = 2t - 1$$

Grafique usando GeoGebra y basándose en las instrucciones anteriores.

4.3 Eliminación de parámetro

Práctica guiada n°2: Elimine el parámetro de las siguientes ecuaciones paramétricas.

Sea la ecuación paramétrica:

$$x = t^2 - t \quad , \quad y = t - 1$$

Primero despejamos t de la ecuación más sencilla y luego la sustituimos en la otra ecuación. De la ecuación $y = t - 1$, obtenemos $t = y + 1$. Sustituyendo en la ecuación de x , obtenemos:

$$x = t^2 - t = (y + 1)^2 - (y + 1) = y^2 + y$$

Entonces la curva del Ejemplo 1 tiene la ecuación rectangular $x = y^2 + y$, de modo que es una parábola.

La eliminación del parámetro con frecuencia nos ayuda a identificar la forma de una curva, como vemos en los siguientes dos ejemplos.

4.4 Modelado del movimiento circular

Práctica Guiada n°3: Modelado del movimiento circular

Las siguientes ecuaciones paramétricas modelan la posición de un cuerpo en movimiento en el tiempo t (en segundos).

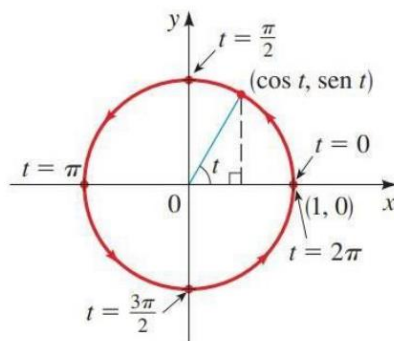
$$x = \cos(t) \quad y = \sin(t) \quad t \geq 0$$

Describe y grafique la trayectoria del cuerpo.

Solución: Para identificar la curva, eliminamos el parámetro. Como $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ y como $x = \cos(t)$ y $y = \sin(t)$ para todo punto (x, y) en la curva tenemos

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

Esto significa que todos los puntos en la curva satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, por lo que la gráfica es una circunferencia de radio 1 con centro en el origen. Cuando t aumenta de 0 a 2π , el punto dado por las ecuaciones paramétricas arranca en $(1,0)$ y se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj una vez alrededor del círculo, como se ve en la Figura. Entonces el cuerpo completa una revolución alrededor del círculo en 2π segundos. Observe que el parámetro t puede ser interpretado como el ángulo que se muestra en la figura.



4.5 Cónicas de forma paramétrica

4.5.1 Circunferencia

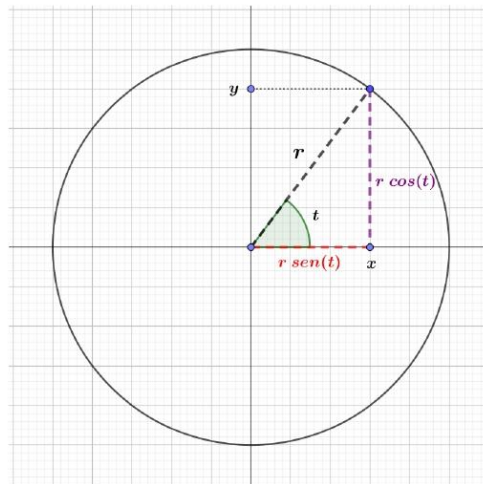
4.5.1.1 Circunferencia con centro en el origen

Queremos descomponer el movimiento circular en el eje x y en el eje y . Recordemos que la ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

donde r es el radio de la circunferencia

Para obtener la ecuación paramétrica de la circunferencia, expresaremos las coordenadas de un punto $P(x, y)$ perteneciente a la circunferencia en función a un ángulo θ con ayuda de la trigonometría como muestra la siguiente figura:



De lo anterior tenemos que los valores de x e y son:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \quad \text{donde } 0 \leq t \leq 2\pi$$

4.5.1.2 Circunferencia con centro fuera del origen

Recordemos que la ecuación de una circunferencia con centro fuera del origen es de la forma:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

donde el centro es $O(h,k)$ y su radio es r

Al dividir la ecuación general por r^2 se tiene que:

$$\frac{(x - h)^2}{r^2} + \frac{(y - k)^2}{r^2} = 1$$

En otras palabras:

$$\left(\frac{x - h}{r}\right)^2 + \left(\frac{y - k}{r}\right)^2 = 1$$

Por identidad trigonométrica se tiene el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned}\cos t &= \frac{x-h}{r} \\ \sin t &= \frac{y-k}{r}\end{aligned}$$

Despejando x e y se tiene que:

$$\begin{cases} x = h + r \cos t \\ y = k + r \sin t \end{cases} \quad \text{donde } 0 \leq t \leq 2\pi$$

Práctica guiada n° 3: Parametrizar las siguientes ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + x - 4y = 0$$

Completando cuadrados se tiene que:

$$\begin{aligned}\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + (y^2 - 4y + 4) &= \frac{1}{4} + 4 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 &= \frac{17}{4}\end{aligned}$$

Es decir, se tiene que:

$$h = \frac{1}{2} \quad k = 2 \quad r = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Una posible parametrización es:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \cos t \\ y = 2 + \frac{\sqrt{17}}{2} \sin t \end{cases} \quad \text{donde } 0 \leq t \leq 2\pi$$

4.5.2 Parábola

4.5.2.1 Parábola con vértice en el origen

Se debe recordar que la ecuación de la parábola es:

$$y^2 = 4px$$

donde p es el valor de la directriz

Si reemplazamos $t = y$ se tiene que:

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{4p} \\ y = t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Práctica guiada n° 4: Parametrizar el arco de la parábola cuya ecuación es $y^2 = -4x$ comprendido entre los puntos $(0,0)$ y $(-9,6)$.

Solución:

Por la ecuación de la parábola, se tiene que es una ecuación con centro en el origen y $p = -1$, por lo que la parametrización queda:

$$\begin{cases} x = -\frac{t^2}{4} \\ y = t \end{cases}$$

Solo nos basta con encontrar el intervalo real que tomará valores el parámetro. Para esto sustituiremos los valores de x e y con los puntos dados en la ecuación paramétrica.

- Para $(0,0)$

$$\begin{cases} 0 = -\frac{t^2}{4} \\ 0 = t \end{cases}$$

- Para $(-9,6)$

$$\begin{cases} -9 = -\frac{t^2}{4} \Rightarrow |t| = 6 \\ 6 = t \end{cases}$$

Por lo tanto, el intervalo es: $0 \leq t \leq 6$

Quedando la parametrización de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = -\frac{t^2}{4} \\ y = t \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 6$$

4.5.2.2 Parábola con vértice fuera del origen

Se debe recordar que la ecuación de la parábola es:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

donde el vértice está en el punto $P(h, k)$ y p es el valor de la directriz

Si reemplazamos $t = y - k$ se tiene que:

$$\begin{cases} x - h = \frac{t^2}{4p} \\ y - k = t \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Es decir:

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{4p} + h \\ y = t + k \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Práctica guiada n° 5: Parametrizar la siguiente parábola:

$$y^2 + 4x + 2y - 3 = 0, x \geq 0$$

Solución:

Primero debemos transformar la ecuación de la parábola en su forma canónica:

$$\begin{aligned} y^2 + 4x + 2y - 3 &= 0 \\ y^2 + 2y &= -4x + 3 \\ y^2 + 2y + 1 &= -4x + 3 + 1 \\ (y + 1)^2 &= -4x + 4 \\ (y + 1)^2 &= -4(x - 1) \end{aligned}$$

Se tiene que la parábola tiene su centro en el punto $(1, -1)$ y $p = -1$, pero como $x \geq 0$ se tiene que:

$$-4(x - 1) \geq 0 \Rightarrow x - 1 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

En otras palabras, solo nos piden parametrizar los valores cuando $0 \leq x \leq 1$. Para saber cual es este arco, debemos buscar los valores de y cuando $x = 0$.

$$\begin{aligned} (y + 1)^2 &= -4(0 - 1) \\ (y + 1)^2 &= 4 \\ |y + 1| &= 2 \\ y &= 1 \vee y = -3 \end{aligned}$$

Reemplazando en la formula general de la parametrización se tiene:

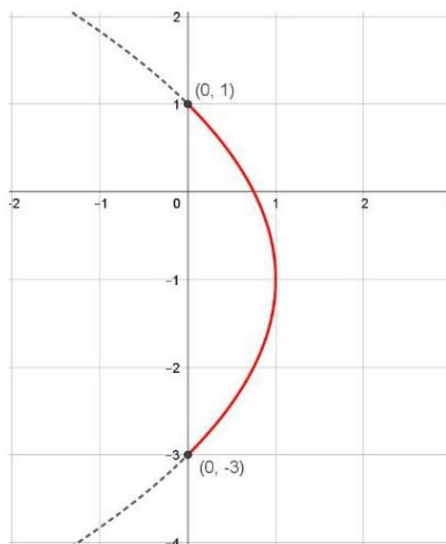
$$\begin{cases} x = -\frac{t^2}{4} + 1 \\ y = t - 1 \end{cases}$$

Pero solo queremos los valores de t cuando y varía entre -3 y 1 , por lo que reemplazando en y se tiene que:

$$t = -2 \vee t = 2$$

Por lo tanto, la ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x = -\frac{t^2}{4} + 1 \\ y = t - 1 \end{cases} \quad \text{con } -2 \leq t \leq 2$$



Práctica guiada n° 6: Hallar la ecuación cartesiana y graficar la curva de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t^2 \end{cases} \quad \text{donde } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

Solución: Para obtener la ecuación cartesiana despejamos el parámetro t de la primera ecuación y luego lo sustituimos en la segunda:

$$t = x - 1$$

$$y = 2 - (x - 1)^2$$

$$(x - 1)^2 = -(y - 2)$$

Es una parábola cuyas ramas apuntan hacia abajo, y vértice en $(1, 2)$. Pero, como t toma valores entre el $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$, es necesario reemplazar estos valores en la primera ecuación para conocer las raíces de ella:

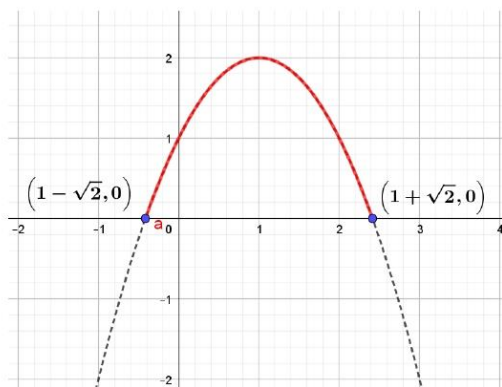
- Para $t = -\sqrt{2}$

$$-\sqrt{2} = x - 1 \Rightarrow \boxed{x = 1 - \sqrt{2}}$$

- Para $t = \sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = x - 1 \Rightarrow \boxed{x = 1 + \sqrt{2}}$$

Por lo tanto, las raíces de la parábola son los puntos $(1 - \sqrt{2}, 0)$ y $(1 + \sqrt{2}, 0)$.



Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

Trabajo guiado n° 2:

- a) Hallar la ecuación de la parábola con directriz $y = -1$ y foco $F(1,3)$
- b) Parametrizar el arco de la parábola que verifica la restricción: $y \leq 9$

4.5.3 Elipse**4.5.3.1 Elipse con centro en el origen**

Hay que recordar que la ecuación de la elipse con centro en el origen es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a > b > 0$

En otras palabras:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Por identidad trigonométrica se tiene el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned}\cos t &= \frac{x}{a} \\ \text{sen } t &= \frac{y}{b}\end{aligned}$$

Despejando x e y se tiene que:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \text{ sen } t \end{cases} \quad \text{donde } 0 \leq t \leq 2\pi$$

4.5.3.2 Elipse con centro fuera del origen

Recordemos que la elipse con centro fuera del origen es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

donde $a > b > 0$ y el punto $O(h, k)$ es el centro de la elipse

Trabajo guiado n° 3:

Sabiendo esto, ¿Cómo creen que es la parametrización de la elipse con centro en $O(h, k)$?

Trabajo guiado n° 4:

Hallar una parametrización de las siguientes curvas:

a) $x^2 + 4y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

b) $2x^2 + y^2 - 8x + 2y - 1 = 0$

4.5.4 Hipérbola**4.5.4.1 Hipérbola con centro en el origen**

Al parametrizar la circunferencia y la elipse, utilizábamos la razón trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{cos}^2 t = 1$$

Pero como la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ con } a > 0 \wedge b > 0$$

No podemos utilizar dicha razón trigonométrica, por lo que utilizaremos:

$$\sec^2 t - \operatorname{tg}^2 t = 1$$

Donde:

$$\sec t = \frac{x}{a}$$
$$\operatorname{tg} t = \frac{y}{b}$$

Observación: se tiene que $\sec t$ y $\operatorname{tg} t$ no están definidas para $t = \frac{\pi}{2}$ ni en $t = \frac{3\pi}{2}$.

Por lo que al parametrizar la hipérbola queda de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = a \sec t \\ y = b \operatorname{tg} t \end{cases} \quad \text{donde } t \in [0, 2\pi] - \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

Práctica guiada n° 7: Hallar la parametrización de la hipérbola definida por la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$$

Solución:

Reemplazando en la ecuación se tiene:

$$\begin{cases} x = 2 \sec t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases} \quad \text{donde } t \in [0, 2\pi] - \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

4.5.4.2 Hipérbola con centro fuera del origen

Recordemos que la hipérbola con centro fuera del origen es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

donde $a > b > 0$ y el punto $O(h, k)$ es el centro de la hipérbola

Trabajo guiado n° 5:

Sabiendo la ecuación paramétrica con centro en el origen ¿Cómo creen que es la parametrización de la hipérbola con centro en $O(h, k)$?

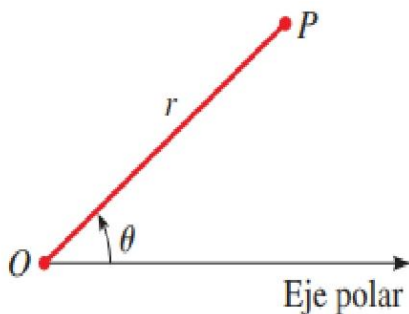
5 Coordenadas Polares

5.1 Definición de Coordenadas Polares

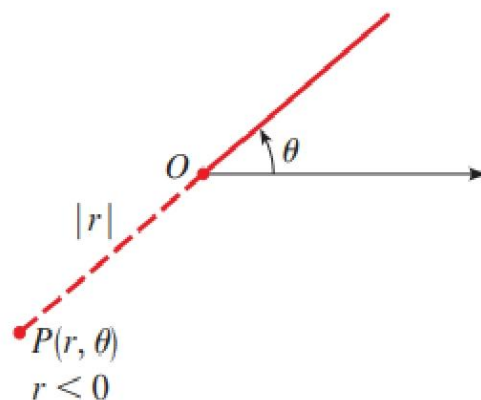
El sistema de coordenadas polares usa distancias y direcciones para especificar la posición de un punto en el plano. Para establecer este sistema de, escogemos un punto fijo O del plano llamado polo (u origen) y de O trazamos un rayo llamado eje polar. A continuación, a cada punto P se le pueden asignar coordenadas polares $P(r, \theta)$ donde

r es la distancia de O a P

θ es el ángulo entre el eje polar y el segmento $\overline{OP}$

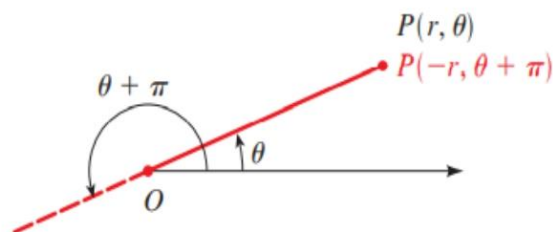


Por convención cuando θ es positivo, se mide en dirección contraria a las manecillas del reloj, y cuando θ es negativo se mide en el sentido de las manecillas del reloj. Si r es negativa, entonces $P(r, \theta)$ se define como el punto que se encuentra a $|r|$ unidades del polo en dirección opuesta a la dada por θ .



5.2 Determinación de todas las coordenadas polares de un punto

En coordenadas polares existe un número infinito de representaciones del mismo punto. Esto se puede apreciar con las coordenadas (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$, las cuales representan el mismo punto, como se aprecia en la figura a continuación:



De hecho, cualquier punto $P(r, \theta)$, se puede escribir de la forma:

$$P(r, \theta + 2n\pi) \text{ y } P(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

5.3 Relación entre coordenadas polares y rectangulares

Es frecuente que aparezcan situaciones en las que sea necesario considerar coordenadas polares y rectangulares simultáneamente. El eje polar de las coordenadas polares coincide con el eje x positivo de las coordenadas rectangulares (plano cartesiano). Utilizando las definiciones de las funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras, podemos determinar las siguientes relaciones:

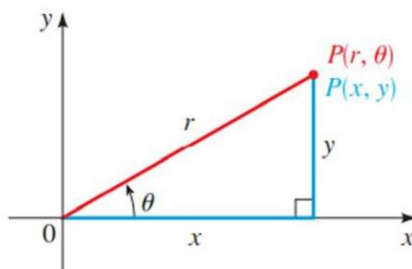
- i. Para cambiar de coordenadas polares a rectangulares, utilizamos las fórmulas

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

- ii. Para cambiar de coordenadas rectangulares a polares, utilizamos las fórmulas

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad y \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

Gráficamente, lo anterior explicado se visualiza de la siguiente manera:



5.3.1 Convertir coordenadas polares a coordenadas rectangulares

Ejemplo 1: Encuentre la coordenada rectangular para el punto que tiene coordenadas polares

$$\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$$

Solución: Como $r = 4$ y $\theta = \frac{2\pi}{3}$, reemplazamos estos valores en $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, quedando así:

$$\begin{aligned}x &= 4 \cos \frac{2\pi}{3} = 4 \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \\y &= 4 \sin \frac{2\pi}{3} = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

El punto en coordenadas rectangulares es $(-2, 2\sqrt{3})$.

5.3.2 Convertir coordenadas rectangulares a coordenadas polares

Ejemplo 2: Encuentre las coordenadas polares para el punto que tiene coordenadas rectangulares $(2, -2)$

Solución: Usando $x = 2$, $y = -2$, tenemos:

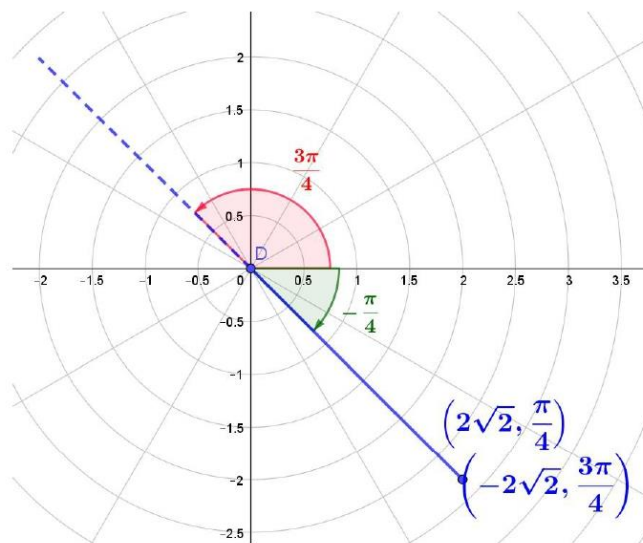
$$\begin{aligned}r^2 &= x^2 + y^2 \\r^2 &= 2^2 + (-2)^2 \\r^2 &= 8\end{aligned}$$

de modo que $r = 2\sqrt{2}$ o $-2\sqrt{2}$

Además:

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{y}{x} \\ \tan \theta &= \frac{-2}{2} \\ \tan \theta &= -1\end{aligned}$$

Por lo que $\theta = \frac{3\pi}{4}$ o $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Como en este caso, el punto pertenece al cuarto cuadrante se puede representar con las coordenadas polares $(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$ o $(-2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$.



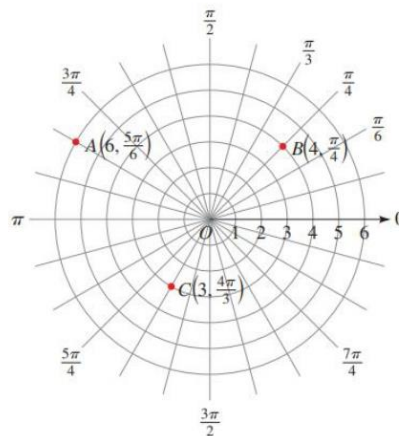
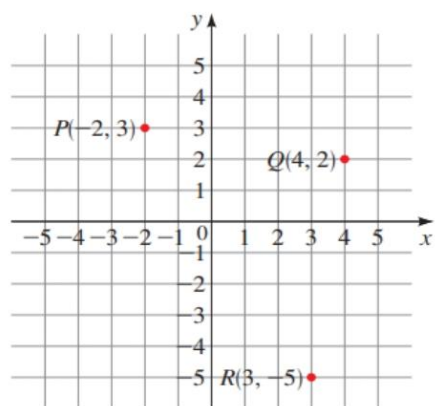
5.4 Gráfica de ecuaciones polares

La gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ está formada por todos los puntos P que tienen al menos una representación polar (r, θ) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Muchas curvas que aparecen en matemáticas y sus aplicaciones son representadas en forma más fácil y natural por ecuaciones polares que por ecuaciones rectangulares.

Una cuadrícula es útil para localizar puntos en coordenadas rectangulares. Por otro lado, para graficar coordenadas polares, es conveniente usar una cuadrícula formada por circunferencias centradas en el polo y rayos que emanan del polo.

**UMCE**

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemática



Práctica guiada N°1: Trace una gráfica de la ecuación polar $r = 2 \operatorname{sen} \theta$.

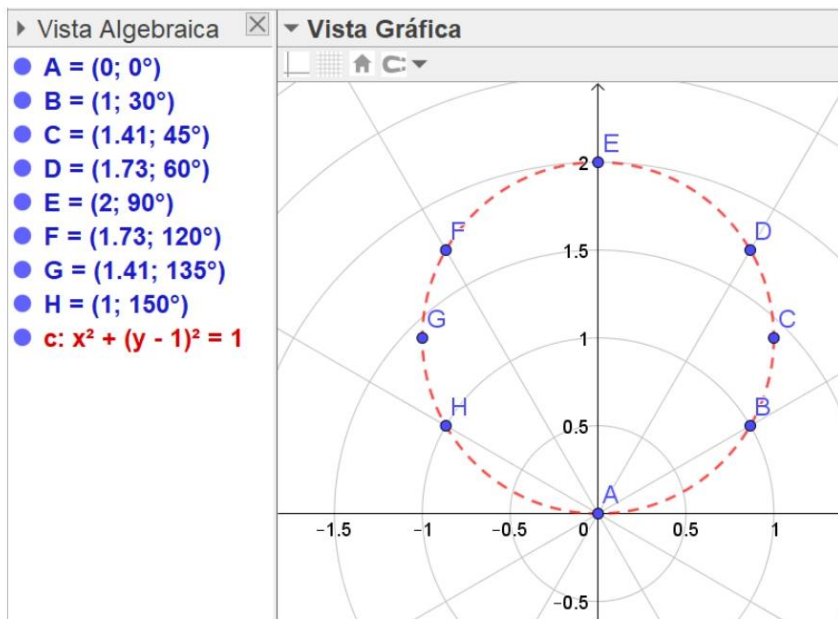
Solución: primero usamos la ecuación para determinar las coordenadas polares de varios puntos en la curva. Como lo muestra la siguiente tabla:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
		30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$r = 2 \operatorname{sen} \theta$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

Luego nos basta con localizar los puntos en un grafico y trazar la curva.

Observación: La grafica parece ser de una circunferencia, pero solo utilizamos los valores de θ entre 0 y π , porque para los valores de θ entre π y 2π , son los mismos valores de r , pero en negativo.

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia



5.4.1 Propiedades que considerar para graficar ecuaciones en coordenadas polares

5.4.1.1 Intersecciones

Las intersecciones que se acostumbra a determinar son las correspondientes al eje polar (eje X) y a un eje perpendicular al eje polar en el polo.

Las primeras se encuentran haciendo $\theta = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots, \pm n\pi$ en general, para $n \in \mathbb{Z}$ y determinando en la ecuación los correspondientes valores de r .

Si existen algunas intersecciones con el eje a 90° , estas se obtendrán haciendo

$$\theta = \frac{n}{2}\pi; \quad n \in \mathbb{Z} \text{ e impar, ó sino: } \theta = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

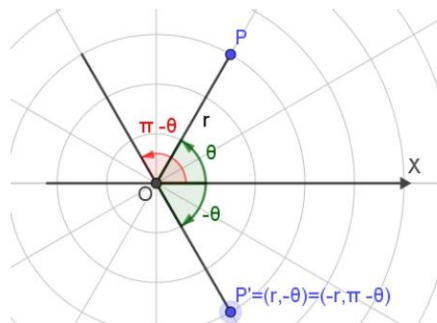
5.4.1.2 Simetrías

Las más importantes son las siguientes:

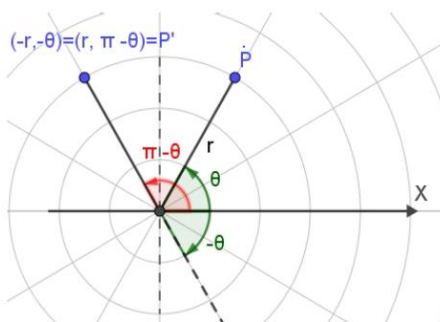
i. Simetría con respecto al eje polar:

Existe simetría con respecto al eje polar, si la ecuación no se altera o se transforma en una ecuación equivalente cuando:

- Se reemplaza θ por $-\theta$, ó
- Se reemplaza θ por $(\pi - \theta)$ y r por $-r$.



ii. Simetría con respecto al eje a 90° :



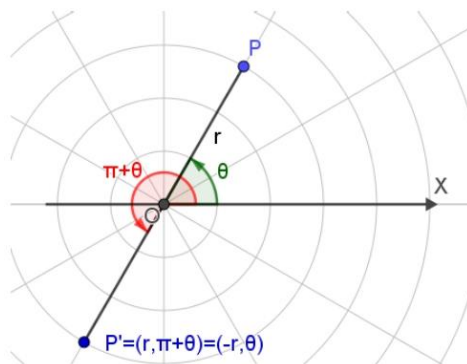
Hay simetría con respecto al eje 90° , si la ecuación no se altera o se transforma en una ecuación equivalente cuando:

- Se reemplaza θ por $(\pi - \theta)$, ó
- Se reemplaza θ por $-\theta$ y r por $-r$.

iii. Simetría con respecto al polo:

Se tiene simetría con respecto al polo, si la ecuación no se altera o se transforma en una ecuación equivalente cuando:

- Se reemplaza θ por $\pi + \theta$, ó
- Se reemplaza r por $-r$.



5.4.1.3 Extensión

Para analizar la extensión de la gráfica, conviene en lo posible despejar r en función de θ .

Los valores de θ que hacen a r imaginario complejo, deben ser desechados.

Si algún valor de θ hace $r = +\infty$, esto indica que la curva "tiende hacia el infinito en esa dirección".

A menudo, importantes cambios se presentan en las vecindades de los valores de θ que hacen

$r = +\infty$, Y por lo tanto puede ser útil determinar valores de r correspondientes a valores de θ un poco menores y un poco mayores que los que hacen a r infinito.

También es importante determinar los valores de θ que hacen a r máximo o mínimo.

Práctica guiada N°2: Para comprender de mejor manera las intersecciones, simetrías y extensiones, dejamos este ejercicio en el cual se presentan cálculos de cada valor.

Graficar la ecuación $r = 6 * \cos\theta + 3$

a) Intersecciones:

- Con el eje polar:

$$\begin{aligned}\theta = 0^\circ &\Rightarrow r = 9 \\ \theta = 180^\circ &\Rightarrow r = -3\end{aligned}$$

Para otros múltiplos de π se obtienen los mismos valores. Por lo cual solo asumimos 2 puntos de intersección con el eje polar: $(9, 0^\circ)$ y $(-3, 180^\circ)$

- Con el eje 90°

$$\begin{aligned}\theta = 90^\circ &\Rightarrow r = 3 \\ \theta = 270^\circ &\Rightarrow r = 3\end{aligned}$$

Con los demás valores $(2n+1)90^\circ$, para $n \in \mathbb{Z}$, se obtienen los mismos valores.

Luego hay dos puntos de intersección de 90° : $(3, 90^\circ)$ y $(3, 270^\circ)$

b) Simetrías:

La única simetría que se puede verificar es la que corresponde al eje polar, pues al cambiar θ por θ no cambia la ecuación.

c) Extensión:

Para todo valor de θ se obtiene uno de r , real y finito. La curva es cerrada. El máximo valor de r corresponde al valor θ que hace $\cos\theta = 1$, es decir $\theta = 0^\circ$ y $r = 9$.

El mínimo valor de r corresponde al valor de θ que hace $\cos\theta = -1$, es decir $\theta = 180^\circ$ y $r = -3$.

Conviene también estudiar para qué valores de θ , si existen, r toma el valor de cero:

$$\theta = 6 \cos\theta + 3, \cos\theta = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}, \theta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right), \theta = 120^\circ \text{ y } \theta = 240^\circ$$

Como valores principales. La curva pasa por el polo con direcciones 120° y 240° respectivamente.

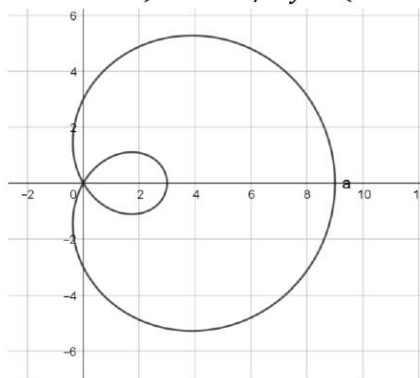
En este punto podemos utilizar GeoGebra para calcular la gráfica, determinando que nuestros cálculos son correctos.

Para ingresar en GeoGebra una función propuesta desde las coordenadas polares a cartesianas, debemos recordar que:

$$x = r \cos \theta \quad \text{y} \quad y = r \sin \theta$$

Así:

$$x = (6 * \cos \theta + 3)\cos\theta \quad \text{y} \quad y = (6 * \cos \theta + 3)\sin\theta$$



Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

5.5 Cónicas en coordenadas polares

En el módulo anterior, ya se vieron cada una de las características de las cónicas. Ahora con ayuda de lo que aprendimos recientemente sobre las coordenadas polares, transformaremos cada una de las ecuaciones a coordenadas polares.

5.5.1 Circunferencia

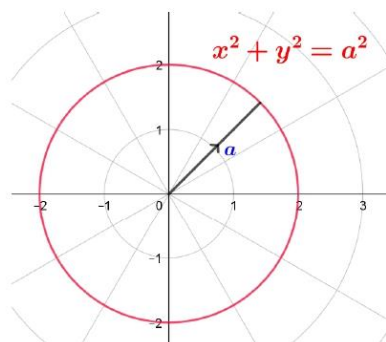
5.5.1.1 Circunferencia con centro en el polo

Antes recordemos que la ecuación de una circunferencia es

$$x^2 + y^2 = a^2, \text{ donde } a \text{ es el radio.}$$

Aplicando transformaciones tenemos:

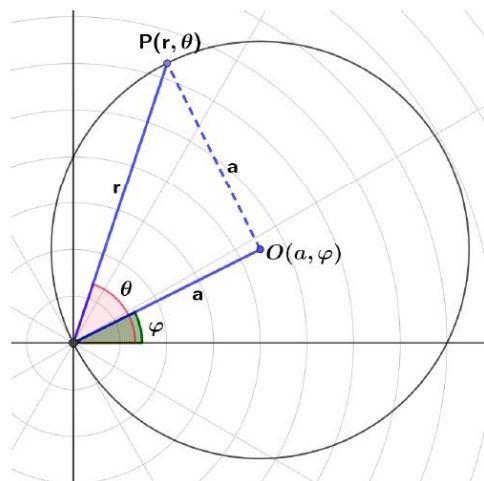
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2 \\ (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 &= a^2 \\ r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta &= a^2 \\ r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) &= a^2 \\ r^2 &= a^2 \\ \boxed{r = a} \end{aligned}$$



5.5.1.2 Circunferencia con centro en el punto (a, φ) y que contiene al polo

Trazamos una circunferencia con centro $O(a, \varphi)$ y un punto perteneciente al polo.

Luego de trazar la circunferencia se trazan 2 segmentos, uno del punto $P(r, \theta)$ al polo y otro del centro de la circunferencia al polo, es decir, del punto $O(a, \varphi)$ al polo. Ambos segmentos por definición tienen medidas r y a respectivamente.



Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

Como el punto $P(r, \theta)$ pertenece a la circunferencia y el punto $O(a, \varphi)$ es el centro de la circunferencia, si se traza un segmento de P a O su distancia es igual al radio, es decir:

$$d(P, O) = a$$

Del triángulo formado entre el origen, el centro de la circunferencia y el punto P , se tiene:

Luego, para obtener la ecuación de la circunferencia.

Debemos obtener r , para eso por ley del coseno se tiene que:

$$a^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - \varphi)$$

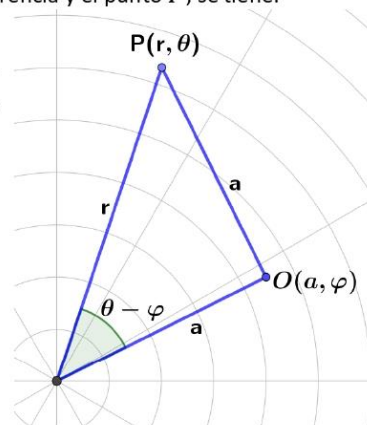
$$r^2 = 2ar \cos(\theta - \varphi)$$

$$\boxed{r = 2a \cos(\theta - \varphi)}$$

O también

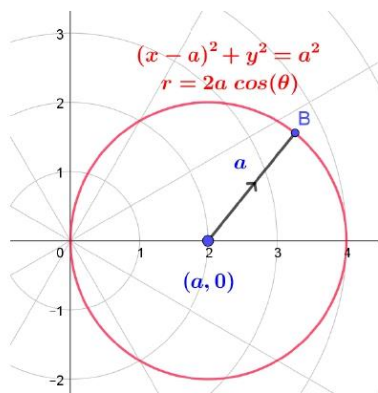
$$r = 2a[\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi]$$

$$\boxed{r = 2a \cos \theta \cos \varphi + 2a \sin \theta \sin \varphi}$$



5.5.1.3 Casos especiales:

- i. Si $\varphi = 0$, entonces $r = 2a \cos(\theta)$



Transformándola a su forma cartesiana se tiene:

$$r = 2a \cos(\theta)$$

$$r = 2a \frac{x}{r}$$

$$r^2 = 2ax$$

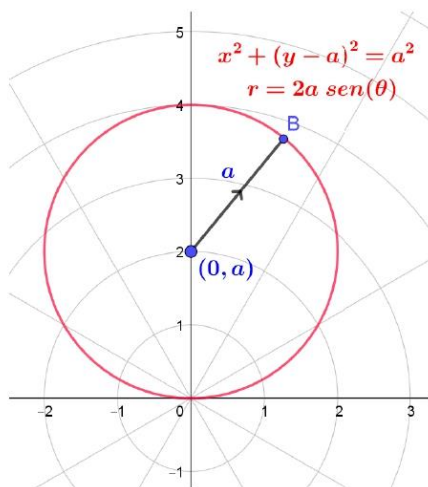
$$x^2 + y^2 = 2ax$$

$$(x^2 - 2ax + a^2) + y^2 = a^2$$

$$\boxed{(x - a)^2 + y^2 = a^2}$$

Una circunferencia con centro en el punto $(a, 0)$ y radio $r = a$

ii. Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, entonces



$$\begin{aligned} r &= 2a \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ r &= 2a \cos \theta \cos \frac{\pi}{2} + 2a \sin \theta \sin \frac{\pi}{2} \\ r &= 2a \cos \theta * 0 + 2a \sin \theta * 1 \\ \boxed{r &= 2a \sin \theta} \end{aligned}$$

Transformándola a su forma cartesiana se tiene:

$$\begin{aligned} r &= 2a \sin \theta \\ r &= 2a \frac{y}{r} \\ r^2 &= 2ay \\ x^2 + y^2 &= 2ay \\ x^2 + (y^2 - 2ay + a^2) &= a^2 \\ \boxed{x^2 + (y - a)^2 &= a^2} \end{aligned}$$

Una circunferencia con centro en el punto $(0, a)$ y radio $r = a$

iii. Si $\varphi = \pi$, entonces $r = -2a \cos \theta$

iv. Si $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, entonces $r = -2a \sin \theta$

5.5.2 Parábola, elipse e hipérbola

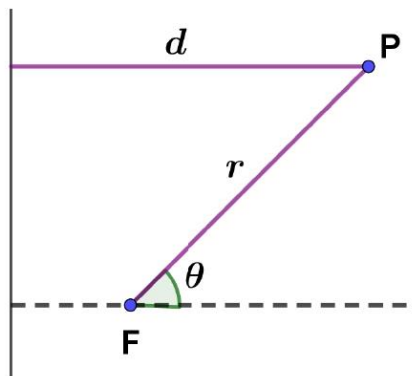
Una cónica se define como el lugar geométrico de los puntos P del plano que cumplen que, dada una recta llamada *directriz* y un punto llamado *foco*, existe una relación entre la distancia de un punto al foco y una distancia del punto a la directriz, de la siguiente forma:

$$d(P, F) = e d(P, D)$$

Con ayuda de la imagen podemos ver que $d(P, F) = r$ y $d(P, D) = d$, ahora reemplazando en la fórmula anterior se tiene que:

$$r = ed$$

Donde el parámetro e se define como la excentricidad y su fórmula es $e = \frac{r}{d}$.



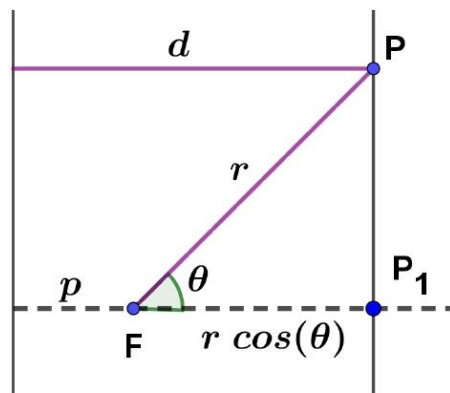
5.5.2.1 Construcción de la forma general de las cónicas en coordenadas polares

De la imagen anterior, definiremos la distancia entre el foco y la directriz como p :

$$d(F, D) = p$$

A su vez, si se proyecta el punto P , en el eje polar y se obtiene la distancia entre la proyección del punto P (definido como P_1) y el foco F usando trigonometría, se tiene que:

$$d(F, P_1) = r \cos \theta$$



Esto quiere decir que:

$$\begin{aligned}d(P, D) &= d(F, D) + d(F, P_1) \\d &= p + r \cos \theta \\r &= e(p + r \cos \theta) \\r &= ep + er \cos \theta \\r - er \cos \theta &= ep \\r(1 - e \cos \theta) &= ep \\r &= \frac{ep}{1 - e \cos \theta}\end{aligned}$$

5.5.2.2 Tipo de cónica dependiendo de la excentricidad

Elipse	$0 < e < 1$	$r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$
Parábola	$e = 1$	$r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$
Hipérbola	$e > 1$	$r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$

Casos especiales son:

- Si $\varphi = 0$, tenemos $r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}$
- Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, tenemos $r = \frac{ep}{1 + e \sin \theta}$
- Si $\varphi = \pi$, tenemos $r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$
- Si $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, tenemos $r = \frac{ep}{1 - e \sin \theta}$

Práctica guiada N°3: Graficar: $r = \frac{6}{1 + \cos \theta}$

Solución: De la ecuación, se tiene que $e = 1$, por lo tanto, es una parábola con el foco en el polo y directriz en $x = 6$.

Para graficar en GeoGebra:

Primero debemos reemplazar los valores de r en $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, quedando así:

$$\begin{aligned}x &= \left(\frac{6}{1 + \cos \theta} \right) \cos \theta \\y &= \left(\frac{6}{1 + \cos \theta} \right) \sin \theta\end{aligned}$$

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

Luego, utilizaremos el comando *Curva*, que se encuentra en la entrada de GeoGebra:

Curva(< *Expresión* >, < *Expresión* >, < *Parámetro* >, < *Valor inicial* >, < *Valor final* >)

En donde:

- **Expresión:** Corresponde a la forma que adquiere la coordenada en la situación en que se trabaja. En este caso, las expresiones son escritas en forma polar; en primera instancia de x y en segunda instancia de y.
- **Parámetro:** Corresponde al valor bajo el cual dependen las expresiones mencionadas. En la mayor parte de los casos, las expresiones muestran los valores x e y de un punto, que se modifica bajo las condiciones del parámetro. Los parámetros pueden ser números o ángulos.
- **Valor inicial:** Es el valor desde donde comienza el parámetro.
- **Valor final:** Es el valor en donde finaliza el parámetro.

Continuando con el ejercicio, si se reemplaza los datos en el comando *curva* de la siguiente forma, se obtiene la parábola.

$$Curva\left(\left(\frac{6}{1+\cos\theta}\right)\cos\theta,\left(\frac{6}{1+\cos\theta}\right)\sin\theta,\theta,0,\pi\right)$$

Trabajo guiado N°1:

I. Graficar cada una de ecuaciones que se presentan a continuación:

a) $r = \frac{6}{1-\cos\theta}$

k) $r = \frac{6}{1-2\sin\theta}$

b) $r = \frac{6}{1+\sin\theta}$

c) $r = \frac{6}{1-\sin\theta}$

d) $r = \frac{6}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}$

e) $r = \frac{6}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$

f) $r = \frac{6}{1+\frac{1}{2}\sin\theta}$

g) $r = \frac{6}{1-\frac{1}{2}\sin\theta}$

h) $r = \frac{6}{1+2\cos\theta}$

i) $r = \frac{6}{1-2\cos\theta}$

j) $r = \frac{6}{1+2\sin\theta}$

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

**UMCE**

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemática

¿Existe alguna relación entre ellas?, si existe una relación, argumente cual es.

- II. Dada la curva E descrita por la ecuación $r^2 = 9$, exprese dicha ecuación en coordenadas cartesianas; luego, trace su gráfica de la curva E.
- III. Sea la curva F descrita por la ecuación $r^2 = \frac{9}{1+\sin^2\theta}$. Exprese dicha ecuación en coordenadas cartesianas; luego, trace su gráfica de la curva F.
- IV. Muestre que $r = 3 \sin\left(4\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ y $r = 3 \cos(4\theta)$ son curvas que coinciden en el plano polar; luego, halle su ecuación equivalente.

MÓDULO DE APRENDIZAJE N°2: CURVAS PLANAS

Práctica indagatoria individual

1 Cicloide

Si considera una rueda circular y la hace rodar en línea recta, al seguir la trayectoria de un punto fijo en la rueda podrá ver que el movimiento dibuja una curva.

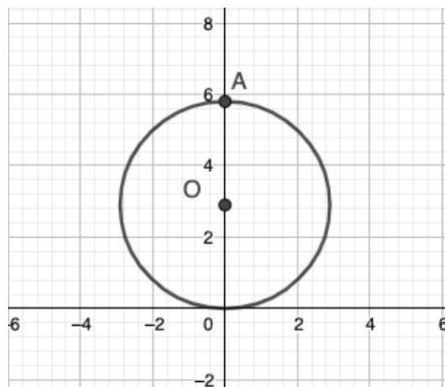


[Recurso de [Zorgit](#)]

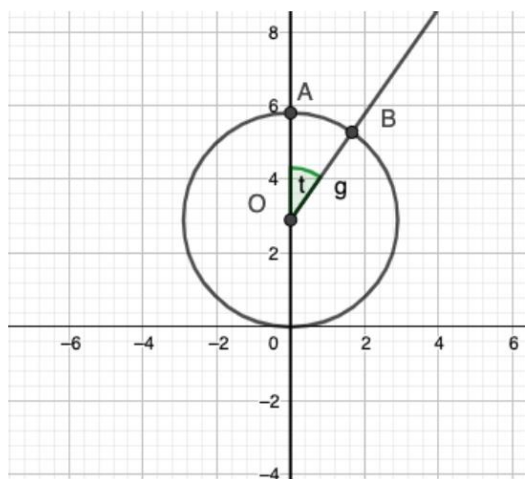
Esta curva se conoce como *cicloide* y en este taller determinaremos sus ecuaciones.

Práctica 1: Buscar el origen de esta curva

- **Paso 1:** Escriba la ecuación de una circunferencia centrada en el $O = (0, r)$ de radio r .

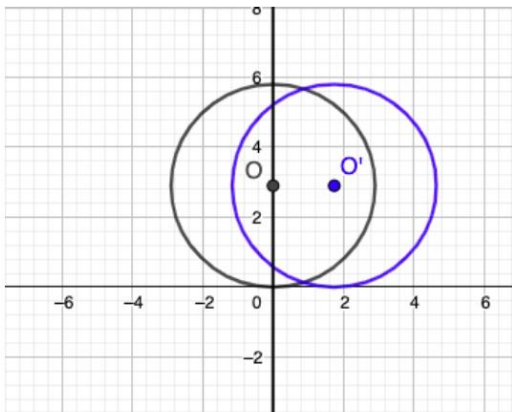


- **Paso 2:** Fije el punto $A = (0, 2r)$ en la circunferencia.
- **Paso 3:** Llame t a la variable tiempo. Determine en la circunferencia el punto B obtenido al rotar $A = (0, 2r)$ en ángulo t (sentido reloj, t en radianes).
Respuesta: $(r \sin(t), r(1 + \cos(t)))$



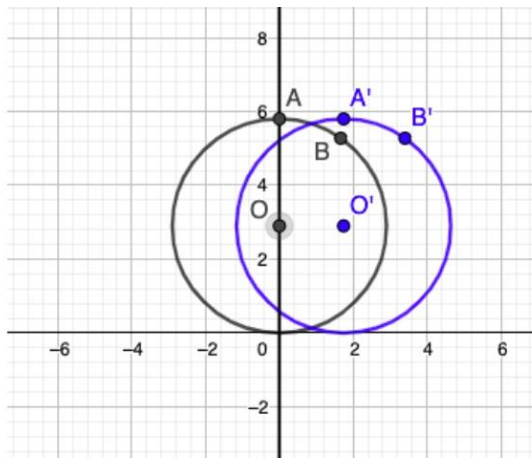
Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia

- **Paso 4:** Encuentre la ecuación de la circunferencia trasladada en el punto $O' = (tr, r)$. Note que tr es la medida del arco definido por el ángulo t .

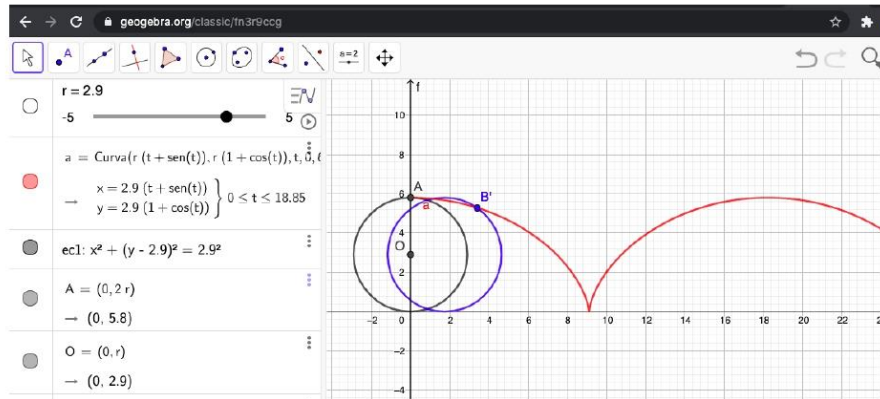


- **Paso 5:** Determine las coordenadas del punto B' definido por la traslación en (tr, r) del punto B obtenido en el paso 3.

Respuesta: $(r(t + \sin(t)), r(1 + \cos(t)))$



- Paso 6: Grafique en GeoGebra las coordenadas del punto $B' = (x(t), y(t))$ usando el comando $Curva(x(t), y(t), t, 0, 6\pi)$. Utilice un deslizador r para el radio.



- Paso 7: Investigue que sucede al cambiar el parámetro 6π , y los valores del radio.
- Paso 8: ¿Es posible que esta curva modele el movimiento de un péndulo? ¿Cuáles deberían ser los parámetros?

1.1 Rotación de curvas

Práctica 2: Escriba las ecuaciones cartesianas de la curva

Considere los pares ordenados (a, b) y (c, d) . Se define la operación $*$ como
 $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

1. Calcule $(z * z')$ y $(z' * z)$ donde $z = (r \cos(t), r \sin(t))$ y $z' = (r' \cos(t'), r' \sin(t'))$. Para expresar su resultado recuerde las identidades trigonométricas $\cos(t + t')$ y $\sin(t + t')$.
2. Represente en el plano cartesiano $z, z', (z * z')$
3. Considere los siguientes casos especiales $r' = 1$ y $t' = 0, 45, 60, 90, 180$ y dibuje en cada caso. ¿Qué puede concluir respecto al producto $(z * z')$ en cada caso?

r'	t'	$(z * z')$
1	0	
1	45	
1	60	
1	90	
1	180	

4. Sea $(x(t), y(t))$ una curva en el plano cartesiano. Dibuje la cicloide y luego dibuje en GeoGebra la curva
 $X(t) = \cos(t')x(t) - \sin(t')y(t)$
 $Y(t) = \cos(t')y(t) + \sin(t')x(t)$
 Para los valores dados de t' en el punto 3., ¿qué puede concluir al respecto de la curva original y las curvas obtenidas?

Práctica 3: Realice la rotación en diversos ángulos de las curvas vistas en las actividades anteriores. Parta con las cónicas y luego continúe con las otras (al menos 3 curvas en total).

2 Rosa de 4 pétalos

Dibujar la gráfica de la ecuación $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, indicando los interceptos, simetrías, extensión, tabla de valores y la gráfica.

Para graficar la curva dada, siga las indicaciones paso a paso:

- Abra un nuevo archivo de GeoGebra y establezca en la VISTA GRAFICA, el plano polar.
- Lea y comprenda el desarrollo escrito a continuación:

1. Intersecciones

Con el eje polar:

para $\theta = n\pi$ y $n \in \mathbb{Z}$, $r = 0$

Con el eje a 90° ; para $\theta = 2n + 12$ y $n \in \mathbb{Z}$, $r = 0$

Las intersecciones con los ejes se reducen al polo $r = 0$. El haber obtenido $r = 0$ para $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$ indica que la curva se acerca al polo siguiendo las direcciones de los ángulos polares 0° y 90° .

✚ En GeoGebra, marque en el plano polar los puntos y datos correspondientes a este paso.
¿Cuáles son esos valores?

2. Simetrías

Con respecto al eje polar:

Cambiamos θ por $-\theta$ y observamos que la ecuación se altera:

$$r = 3 \operatorname{sen} 2(-\theta) = 3 \operatorname{sen} (-2\theta) = -3 \operatorname{sen} 2\theta.$$

Sin embargo, esto no indica que no existe la simetría; debemos además verificar la segunda regla, es decir, reemplazar θ por $\pi - \theta$ y r por $-r$.

$$-r = 3 \operatorname{sen} 2(\pi - \theta)$$

$$-r = 3 \operatorname{sen} (2\pi - 2\theta)$$

$$-r = 3 \operatorname{sen} (-2\theta)$$

$$-r = -3 \operatorname{sen} 2\theta$$

$$r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$$

Luego existe simetría con respecto al eje polar.

Con respecto al eje a 90° :

Se reemplaza θ por $\pi - \theta$

$$r = 3 \operatorname{sen} 2(\pi - \theta)$$

$$r = 3 \operatorname{sen} (2\pi - 2\theta)$$

$$r = 3 \operatorname{sen}(-2\theta)$$

$$r = -3 \operatorname{sen} 2\theta$$

NO CUMPLE.

Se reemplaza θ por $-\theta$ y r por $-r$.

$$-r = 3 \operatorname{sen} 2(-\theta)$$

$$-r = 3 \operatorname{sen} (-2\theta)$$

$$-r = -3 \operatorname{sen} 2\theta$$

$$r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$$

Existe simetría con respecto al eje a 90° .

Con respecto al polo:

Se reemplaza r por $-r$ y se observa que no cumple.

Se reemplaza θ por $\pi + \theta$.

$$r = 3 \operatorname{sen} 2(\pi + \theta)$$

$$r = 3 \operatorname{sen} (2\pi + 2\theta)$$

$$r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$$

Existe simetría con respecto al polo.

3. Extensión

Por la simetría con respecto a los dos ejes y al polo, será suficiente estudiar la extensión para valores de θ correspondientes al primer cuadrante: $0 \leq \theta \leq 90^\circ$.

Para todo valor de θ en el intervalo anterior, r existe con valores reales.

El valor máximo de r se obtiene cuando $\sin 2\theta = 1$, es decir cuando $2\theta = 90^\circ$ ó $\theta = 45^\circ$, y corresponde a $r = 3$.

El mínimo valor ya lo obtuvimos para $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$. Y corresponde a $r = 0$, el polo.

4. Otros puntos de la curva

θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
2	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
$\sin 2\theta$	0°	12	32	1	32	12	0
$r = 3 \sin 2\theta$	0°	32	2,60	3	2,60	32	0

Con toda la información recabada, obtenga la curva en coordenadas polares.

- ✚ Abra la Hoja de Cálculo de GeoGebra. En A1, escriba: ang y luego sobre esta palabra con botón derecho del mouse, elija Propiedades del objeto, en Texto, busque Símbolos y elija θ .
- ✚ Ahora copie la celda A1 en B1, con las mismas indicaciones anteriores cambie el texto por 2θ . Haga lo mismo en C1 y cambia texto por $\sin 2\theta$ y luego en D1 por $3 \sin 2\theta$.
- ✚ Para completar la tabla en la columna desde A1 a A8 agregar los números $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$, respectivamente. (Si la tabla no genera automáticamente el número en radianes, ingrese a propiedades de cualquier objeto, luego en la parte superior busque Preferencias – Avanzado y modifique de grados a radianes).
- ✚ En B2 ingrese la fórmula $= 2 * (A2)$ y copiar la celda hasta B8
- ✚ En C2 ingrese la fórmula $= \sin (B2)$ y copiar la celda hasta C8
- ✚ En D2 ingrese la fórmula $= 3 * (C2)$ y copiar la celda hasta D8

-  Marque toda la tabla y elija del menú-tabla el icono color fondo (elija un color claro), luego en borde.
 -  Mantenga marcada la tabla. En menú de la izquierda elija tabla, esta se visualizará en VISTA GRAFICA. Luego elija CREAR (puede poner antes en Nombre "Gráfica").
5. **Guardar archivo GeoGebra como PDF y adjunta en la tarea dispuesta en e-virtual (El archivo GeoGebra debe contener la gráfica y tabla).**

3 Lemniscata de Bernoulli

Las Lemniscatas están definidas en coordenadas polares de la forma $r^2 = a * \cos(2\theta)$ o de la forma $r^2 = a * \sin(2\theta)$

Para esta actividad, es necesario que repita el procedimiento descrito en la rosa de 4 pétalos.

1. Identifique las intersecciones, simetrías, extensiones y grafique en GeoGebra la Lemniscata cuya forma está definida como $r^2 = 4 * \cos(2\theta)$
2. Identifique las intersecciones, simetrías, extensiones y grafique en GeoGebra la Lemniscata cuya forma está definida como $r^2 = 4 * \sin(2\theta)$
3. Cree un PDF para cada archivo GeoGebra de los puntos 1 y 2, y adjúntelos en la entrega de e-virtual.

4 Curva de Agnesi

Una actividad deportiva de ciclismo recorre una determinada curva descrita sobre la colina de un cerro. La curva proyectada sobre un plano (ver Figura 1) tiene las siguientes características:

- Posee una asíntota horizontal $y = 0$, a la derecha y a la izquierda del origen.
- Alcanza su valor máximo justo al cruzar el eje Y , es decir, $(0, a)$ está en la curva y es su valor máximo.
- Está determinada por un único parámetro a .

Resolver:

1. Determine la ecuación del lugar geométrico de la curva de Agnesi. Para ello siga los siguientes pasos:

- **Paso 1:** Trace una circunferencia, con centro en el punto $(0, \frac{a}{2})$ y radio $\frac{a}{2}$.
- **Paso 2:** Trace una tangente a la circunferencia, paralela al eje X , es decir una recta L_1 que pasa por el punto $(0, a)$
- **Paso 3:** Desde el origen de coordenadas, trace rectas que corten a la circunferencia en B y a la recta L en A .
- **Paso 4:** Trace una recta L_2 paralela al eje X que pase por el punto B
- **Paso 5:** Trace una recta L_3 paralela al eje Y que pase por el punto A
- **Paso 4:** El punto genérico P de la Curva de Agnesi será aquel en que se crucen las rectas L_2 y L_3 (ver la Figura 1).



UMCE

Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Facultad de Ciencias Básicas
Departamento de Matemática

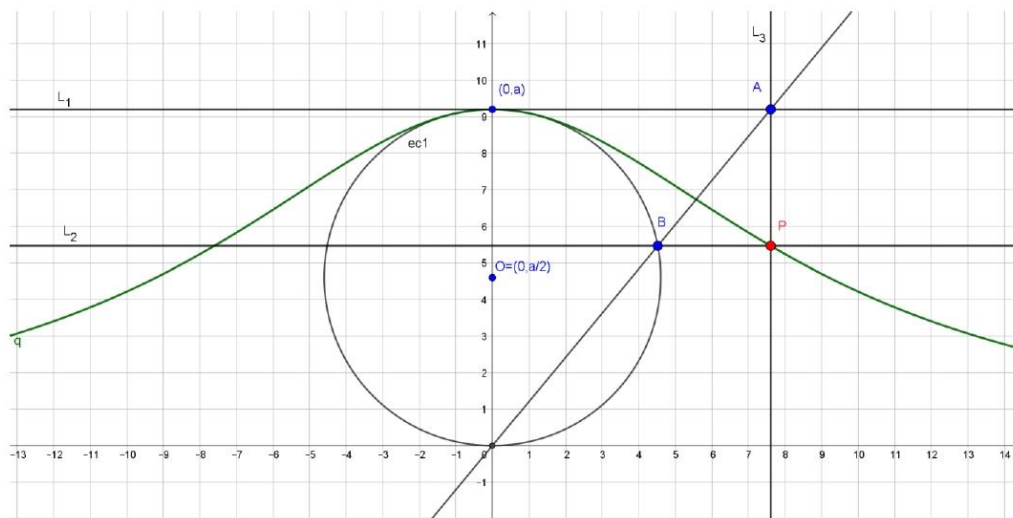


Figura 1

2. Habiendo determinado el lugar geométrico, calcule en GeoGebra, la Curva de Agnesi para $a = 5, 10, 15$. Mostrando su resultado algebraico y su gráfica respectiva.
3. Anime el desplazamiento del punto B en GeoGebra, para visualizar el recorrido del punto P . Guarde el archivo con su nombre, por ejemplo: "Nombre_Apellido.ggb".

Profesora: Isabel Berna Sepúlveda
Ayudantes: Felipe Alvarado Bolados - Nicole Urrutia Urrutia