UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

DETECCIÓN DE ERRORES CONCEPTUALES EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN PARA ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA MEDIA

TESINA PARA OPTAR AL TÍTULO PROFESIONAL DE PROFESOR DE MATEMÁTICA MENCIÓN EN EDUCACIÓN EN ASTRONOMÍA

AUTOR: HERNÁN ÁVILA ALFARO

PROFESORA GUÍA: ISABEL BERNA SEPÚLVEDA

SANTIAGO DE CHILE, AGOSTO 2020

Autorización

Autorizo la reproducción total o parcial de este trabajo de investigación para fines académicos y su alojamiento en el repositorio institucional SIBUMCE del sistema de Bibliotecas UMCE.

Tabla de contenido

Índice de tablas

Índice de figuras

Introducción

El currículum en la educación chilena muestra los lineamientos que debe seguir la enseñanza regular en el ámbito escolar, éste desde el sector matemática se abordan cuatro ejes en la enseñanza media, entre ellos se caracteriza el eje denominado como “Álgebra y Funciones”. En éste eje se abordan temáticas entorno a algunos tipos de funciones, y es en octavo básico donde tiene su primer acercamiento la noción de función. Esto se constituye como una de sus bases que viene a tomar cuerpo la siguiente investigación, se presentará el análisis documentado de textos referente a la enseñanza-aprendizaje del concepto de función para estudiantes de enseñanza media.

Aquí se plantea si la enseñanza de este concepto es adecuado en el rigor matemático, es decir, si en este ejercicios se hallan errores conceptuales. Al existir errores conceptuales trae como consecuencia un mal uso del esta sofisticada herramienta matemática. Para evidenciar estos errores es necesario clarificar con certeza la definición del concepto de función y el error detectado sea categorizado como tal, vale decir, si efectivamente es un error conceptual, esto mediante documentación bibliográfica que denote este objeto de estudio en cada uno de sus ámbitos en el que se desarrolla culturalmente.

1. Planteamiento del Problema Objetivos del Estudio

1.1. Planteamiento del problema

El carácter importante de la noción de función frente al currículum nacional es extenso en cuanto a continuidad temporal, dado que desde octavo básico a cuarto medio se ve explícitamente este objeto matemático tan trascendental y útil en la matemática aplicada, análisis matemático, geometría analítica, topología, probabilidades, álgebra y en otras disciplinas. Por lo que en un eje de estudio declarado en los planes y programas otorgados por el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) está explícitamente con el nombre de "Álgebra y Funciones".

La transversalidad del concepto de función le permite ser un objeto matemático sofisticado que requiere una comprensión, manipulación, aplicación, modelación y representación rigurosa inherente a la abstracción otorgada a ésta herramienta tan potente. Por otra parte, el concepto de función posee variados registros de representaciones, las cuales necesariamente deben ser consideras en la enseñanza-aprendizaje de esta para una comprensión efectiva de éste concepto.

No solo en la educación secundaria sino que hasta a las carreras técnicas como también universitarias que están relacionadas a la matemática incluye en sus programas la herramienta de la función matemática, ya sea en la comprensión del concepto de función al igual que en la aplicación de algunas funciones ya definidas, como por ejemplo, función lineal, afín, cuadrática, entre otras.

El concepto de función no es un tema que esté ajeno a investigaciones, ya que es posible hallar diversas publicaciones en las que existen sugerencias conceptuales, metodológicas, didácticas y epistemológicas en torno a éste. En este mismo sentido es posible evidenciarlo en el alcance de las propuestas existentes en los programas otorgados por el Ministerio de Educación, como en diversas teorías planteadas desde la Didáctica de la Matemática.

Ante esto, el profesor de matemática no está libre de caer en errores conceptuales que, como por nombrar algunos, se hallan en la asignar significados no correspondidos a objetos matemático completamente diferentes, está el de ecuación y función, razones trigonométricas y función trigonométrica, derivada de una función y función derivada, curva y gráfica de una función, ecuación de una función, asegurar que una función es como una máquina, entre otras.

Por lo tanto, a raíz de lo manifestado surge la pregunta *¿Existen errores conceptuales en la enseñanza del concepto de función presente en los documentos asociados a la enseñanza-aprendizaje de estudiantes de educación media?* La respuesta a esta interrogante puede responderse con el análisis de los documentos de difusión de enseñanza de matemática en contraste del significado de este objeto matemático que es el concepto de función a la luz de sus diferentes niveles, a) Dimensión matemática, b)Significado Curricular y c)Significado Holístico (Godino & Batanero, 1994) (Pecharromán, 2013) (Ávila Godoy, Ibarra Olmos, & Grijalva Monteverde, 2010).

1.2. Objetivos del Estudio

1.2.1. Objetivos Generales

O1. Conceptualizar el concepto de función en tres niveles, dimensión matemática, significado curricular y significado Holístico, para comprender su significado como objeto matemático.

O2. Detectar errores conceptuales en la enseñanza-aprendizaje del concepto de función documentos asociados a la enseñanza-aprendizaje para estudiantes de enseñanza media.

O3. Evidenciar errores conceptuales en la enseñanza-aprendizaje del concepto de función hallados en documentos insertos en el plano educativo de educación media.

1.2.2. Objetivos Específicos

o1. Comprender el origen evolutivo del concepto de función.

o2. Categorizar las variantes epistemológicas del concepto de función.

o3. Conocer el carácter otorgado al concepto de función en el ámbito educativo.

o4. Identificar la importancia de los diversos registros del concepto de función como fundamento de la enseñanza aprendizaje de éste.

o5. Recopilar documentos asociados a la enseñanza-aprendizaje para estudiantes de enseñanza media.

o6. Detectar errores en documentos recopilados.

o7. Contrastar errores detectados ante el significado del concepto de función como objeto matemático.

o8. Presentar recurrencia de errores detectados que no proporcionan el conocimiento adecuado para alcanzar los aprendizajes

1.3. Justificación del Estudio

Teniendo en cuenta la importancia que la Educación le otorga al concepto de función dentro de la matemática cabe el cuestionamiento de que si existen errores en la enseñanza-aprendizaje del concepto de función para estudiantes de enseñanza media. Si así, entonces es necesario detectar los errores recurrentes en la enseñanza-aprendizaje de los estudiantes de enseñanza media y evidenciar estos errores en la práctica, de modo que al tener el significado de este objeto matemático sea posible realizar un contraste que muestre estos errores.

Al detectar los errores conceptuales está la posibilidad de que en estudios futuros se establezcan propuestas de enseñanza que eviten estos errores conceptuales, que permitirá el logro de objetivos, tanto en las habilidades y aprendizajes asociados al concepto de función.

2. Marco Teórico

2.1. Introducción

El concepto de función es la noción más gravitante dentro de la matemática debido a que es una herramienta interdisciplinaria, pues no solo es utilizada en matemática, sino también posee gran importancia en física, astronomía, química, biología, economía, entre otras áreas del conocimiento, por lo que no debe ser extraño que el nacimiento y perfeccionamiento de su definición se halla en el desarrollo histórico de la matemática, inmerso en diversos contextos históricos, filosóficos, religiosos y científicos (Barahona Droguett, 2002).

En este capítulo se estudiará la Construcción del concepto de función, Importancia del concepto de función en la Educación Matemática y Fundamentos de la enseñanza-aprendizaje del concepto de función, para construir de manera certera, profunda y lo más fidedigno posible (Rodríguez G. & Valldeoriola R., 2009) acerca de las concepciones existentes en torno al concepto de función.

2.2. Construcción del concepto de función

La construcción del concepto de función es pertinente analizar desde dos puntos de vistas convenientes, en la que se encuentra su construcción histórica y su construcción epistemológica, las cuales cobran importancia en su compresión y evolución de esta, desde lo más primitivo que pareciera lo que es una función a las abstracciones más complejas que se han construido.

2.2.1. Construcción Histórica

Actualmente el concepto de función es una herramienta sofisticada que ha permitido avances propios para la matemática, como también se evidencia que es una herramienta importante culturalmente, ya que en cada una de las edades en las que se suele clasificar la historia universal el concepto de función se ve ocasiones implícita y, en otras, explícitamente involucrado en el paso de una época a otra.

2.2.1.1. Edad Antigua

El concepto de función aún no es definido en parámetros estrictos y rigurosos, sin embargo, en la antigüedad es posible diferenciar entre los aportes realizados por los griegos a diferencia de lo descubierto por otras regiones del antiguo mundo, como Mesopotamia, Antiguo

Egipto, China e India, denotadas como “Matemática Antigua o Prehelénica” (Sastre, Rey, & Boubée, 2008).

En el ámbito prehelénico estaba ligado a situaciones de cambio y variación que se asociaban a la observación de los astros, en especial el trabajo realizado por los babilonios es destacable pues, de ellos se han encontrado tablillas, las cuales presentan e resultado de multiplicaciones, divisiones, cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cúbicas, con una fecha de antigüedad estimada en los años 2000 a.C. y 500 a.C.; otras evidencias de los babilonios, se hallan en las tablillas astronómicas en las cuales se encontraron registros de datos referentes a los períodos de visibilidad de un planeta y el ángulo de éste con respecto al Sol (Sastre, Rey, & Boubée, 2008). Cabe destacar que lo descrito por los babilonios responde a casos particulares, sin concebir generalizaciones de cada resultado.

En la misma tónica, la cultura griega es también destacable, dado que, basándose en la proporcionalidad como herramienta, lograron describir cuantitativamente la relación establecidas entre dos magnitudes homogéneas, y el tratar problemas ligado a funciones sin tener esta herramienta bien definida lograron establecer relaciones aritméticas y geométricas. Es destacable el trabajo de Ptolomeo, quien dio con aportes claros para definir lo que hoy se conoce como la función seno y coseno lo que demarca el comienzo de la trigonometría.

Finalmente, en este periodo es posible evidenciar tres tipos de registros primitivos que conforman la definición del concepto de función, descripción verbal de la cual se subentiende que son los planteamientos de problemas quedando en forma escrita; descripción en tablas, que se vislumbra en el registro de las tablillas babilónicas y en el uso de tablas en las relaciones aritméticas y geométricas; y por último, el lenguaje abreviado, que se interpreta como la notación primitiva de las notaciones modernas que dan el carácter reconocible al concepto de función y sus aplicaciones.

2.2.1.2. Edad Media

La edad media, también conocida como la edad oscura, desde la perspectiva científica pareciera que el avance científico y descubrimientos importantes no existieran, no obstante, nacen conceptos fundamentales que componen al concepto de función como el término de variable, el cual también surge de la necesidad del estudio del mundo natural y cotidiano, estudios como calor, luz, densidad, distancia y velocidad media de un movimiento uniformemente acelerado, estos términos hoy en día se formulan algebraicamente en parámetros formales de funciones.

Nicolás Oresme (S. XIV) creó una representación gráfica (no es un plano cartesiano, pues, los aportes de Descartes, quien propuso el sistema coordenado mencionado, se caracterizan dentro de la Edad siguiente) y geométrica para representar relaciones existentes entre magnitudes físicas, lo que fue una primera aproximación al concepto de función, con una variable dependiendo del comportamiento de otra; esto se infiere de su frase: “Todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento”(Crespo & Ponteville, 2003; Parra 2015; Sastre, Rey & Boubée, 2008).

Según D’hombres, 1987, citado en Jaimes (2012) bosquejos sugeridos por Nicolás Oresme que consideraba tres tipos configuraciones diferentes se hallan las siguientes representaciones:

I. Uniformemente Uniforme: Oresme dibujó una representación velocidad/tiempo, en la que los puntos de una recta horizontal representan sucesivos instantes de tiempo (según él denominados como longitudes) y, paa cada uno de estos instantes traza un segmento (latitud) perpendicular a la recta de dicho punto. Se obtiene un rectángulo para esta configuración:

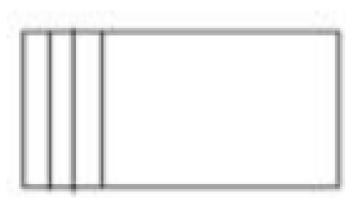


Figura 1. Uniformemente Uniforme

II. Uniformemente deformes: La figura Uniformemente deforme corresponde a una velocidad con aceleración constante. La figura obtenida es un triángulo o un trapecio, el cual dependerá de la intensidad inicial de la cualidad.

Figura 2. Uniformemente deformes

III. Deformemente deformes: Corresponden a las aceleraciones constantes de la velocidad. En contraste de las representaciones anteriores cuando la línea borde no sea una recta corresponde a casos deformemente deformes:

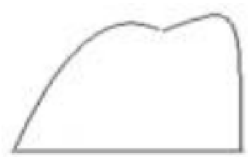


Figura 3. Deformemente deformes

2.2.1.3. Edad Moderna

El inicio de la Geometría Analítica con los aportes de René Descartes permitió comprender a la función como una relación de dependencia, con la introducción implícita del sistema de coordenadas, con ello las llamadas curvas geométricas y el comienzo de las técnicas que se utilizarán para el estudio de la teoría de las ecuaciones.

Así mismo, en esta época, sobresalen los trabajos de Newton, Leibniz y Euler quienes realizaron aportes a la simbolización del álgebra y dieron las primeras definiciones explicitas de función, definiciones que, según lo investigado por Crespo y Ponteville (2003) compilan las definiciones propuestas por estos importantes matemáticos que dieron grandes aportes para la humanidad. Entre ellas se encuentran:

> "Ciertas longitudes tales como abscisas, ordenadas, tangentes, normales, etc. Asociadas con la posición de un punto en una curva" (Leibniz).
> "Cuando un punto genérico P se mueve a lo largo de una curva, y su abscisa X, o su ordenada Y, o cualquiera otra cantidad variable relativa a la curva, aumentaba o disminuía; fluía". "Dada una relación entre cantidades fluentes, encontrar una relación entre sus fluxiones y recíprocamente" (Newton).

“Una función de una cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad y números o cantidades constantes” (Euler).

“Si x es una cantidad variable, entonces toda cantidad que depende de x de cualquier manera o, que esté determinada por aquel se llama una función de dicha variable” (Euler).

Evidentemente estas definiciones se sustentan en la visión dinámica, conciben la función bajo los términos de variable y como un constante cambio de ellas produciendo otros valores. Es importante destacar que hasta este momento aún no se evidencia el uso de la teoría de conjuntos, la aplicación de una relación, producto cartesiano, sino que estos aparecen en una próxima etapa.

2.2.1.4. Edad contemporánea

Comienza a surgir la notación característica del concepto de función “$f(x)$”, como también las definiciones más rigurosas ligadas a la teoría de conjuntos. En 1822 Josehp Fourier escribió: “Una función general $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas, cada una de las cuales es arbitrario” (Citado por Crespo & Ponteville, 2003), esta definición comienza a dar nociones de la unicidad, no obstante, se limita al conjunto de partida dentro de un conjunto numerable.

Por otra parte, se tiene primera definición de función que contempla la unicidad de correspondencia y quien lo formula Dirichlet según sus palabras en 1837, diciendo: “Dos variables x e y están asociados de tal forma que al asignar un valor a x entonces, por alguna regla o correspondencia, se asigna automáticamente un valor a y, se dice que "y" es una función (unívoca) de x”.

Para cerrar la definición del concepto de función a lo largo de la historia y finalizar con lo que hoy se conoce en términos de teoría de conjuntos fue propuesta en el siglo XX por los matemáticos Bourbaki en el año 1939, citado por Shílov (2004), y lo definen: “Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto”.

Finalmente, el análisis histórico muestra que las bases de la construcción del concepto de función es fundamentado en las nociones de variable, dependencia, correspondencia y transformación, mostrando que esta construcción presenta bases en la orientación intuitiva y subjetiva de cada uno de los aportes que a través de la historia a permitido la construcción ya completa y acabada del concepto de función. (Quintero & Cadavid, 2009).

2.2.2. Construcción Epistemológica

Para realizar una construcción epistemológica del concepto de función es pertinente conocer las orientaciones filosóficas que determinaron las definiciones que surgieron a través de la historia. Es en la antigua Grecia donde es posible asentar un debate filosófico con dos afirmaciones contrapuestas, y que el concepto de función se analiza en dos paradigmas diferentes.

En cada uno de estos pensamientos se halla dos exponentes de estos pensamientos, Heráclito que postula: "*Todo cambia, todo se transforma*" y Parménides, que afirma "La inmutabilidad del ser, la negación del movimiento y del cambio". Bajo estas dos afirmaciones es posible detectar la pretensión en el paradigma, conforme a lo estudiado en la misma construcción de la definición del concepto de función, su perfeccionamiento y evolución, desde la experiencia hasta la abstracción de ésta, lo podemos clasificar en una de estas visiones.

Al igual que la construcción histórica del concepto de función, también suscita y se vislumbra la construcción epistemológica del concepto de función, que autores como Parra (2015), Farfán (2008) presentan el desarrollo histórico y epistemológico como un todo. Dada las pretensiones de este estudio es pertinente separar estas construcciones; no está demás mencionar que el enfoque epistemológico del concepto de función se encuentra estrechamente relacionado con su construcción histórica. Para detallar este enfoque se abordaran las diversas visiones que surgen desde la construcción epistemológica, estas se clasifican dentro de seis categorías (Parra, 2015), que dependiendo del contexto histórico, cultural, social y disciplinar es donde cobra mayor sentido e importancia.

2.2.2.1. La función como correspondencia

La *función como una correspondencia* se relaciona y se sustenta básicamente en no poseer la herramienta de la noción de variables. El surgimiento de esta visión se evidencia en la Edad Antigüedad posibilitando gran ayuda a la hora de desempeñar labores como el registro de datos en tabillas. *La función como una correspondencia* se puede hallar en el artículo publicado por Sastre, Rey y Boubeé (2008), ésta correspondencia se puede hallar, como por ejemplo, en tener una secuencia de números para contar; se puede decir entonces, que la noción de función tiene sus raíces en el desarrollo del concepto de número al relacionarla con la evolución histórica de la matemática.

En esta misma clasificación se ve afianzada fuertemente las operaciones básicas de la aritmética; se observa de forma implícita la noción de función, como por ejemplo, la función suma es un ejemplo de *la función como correspondencia*, este hecho, de que la operación binaria de suma es una función queda demostrado con herramientas que otorga el Álgebra Moderna y al catalogar la función suma dentro de los parámetros actuales con lo que se conoce el concepto de función; ésta se sustenta por el concepto de Ley de Composición Interna.

Como *la función como correspondencia* está asociada al desarrollo del concepto de número y la enumeración, las funciones de sucesiones y de series es posible catalogar en este paradigma, dado que éstas son funciones de enumeración en la que existe una correspondencia que es posible enumera a pesar de que esta enumeración sea infinita.

2.2.2.2. La función como relación entre magnitudes

De la forma que la *función como correspondencia* forma parte en lo cotidiano de la Edad Antigua, esta visión se opone a la de correspondencia dado el conflicto de la matemática estática con la matemática dinámica, se detecta y hace presente el debate filosófico de Heráclito y Parménides. La visión filosófica de lo estático estuvo presente un largo tiempo, donde "Los Elementos" de Euclides predominaron el estudio de la geometría con la visión y relaciones estáticas.

En el paradigma de la función como una relación entre magnitudes se toma en cuenta el concepto de variable dentro del concepto de función, el que se relaciona con lo de magnitud, dando un sentido dinámico y en completo movimiento, este, hecho permitió el surgimiento de conjuntos numéricos, que en la antigüedad no se concebían dentro de sus sistemas numéricos.

La visualización de *la función como relación entre magnitudes* concibe y acoge como propio el término de variable, éste sustenta a la matemática como un objeto algebraico de gran riqueza y por ende al concepto de función en términos generales, le dota de identidad propia y que marca la gran diferencia entre el concepto de función versus con el de ecuación, este último acuña a la incógnita como término emblema y característico (Wilhelmi, Godino, & Lasa, 2014).

2.2.2.3. La función como representación gráfica

En la misma tónica que proporciona la visión de *la función como relación entre magnitudes* se propone que el mundo que se encuentra en movimiento y que este también es posible representarlo de manera visual en curvas, esquemas y gráficos, y mediante un bosquejo de una determinada situación trabajar en este ámbito. Algunos ejemplos de *la función como representación gráfica* se puede hallar el diagrama sagital, tablas de valores, curvas, entre otros.

Uno de los pioneros en trabajar en *la función como representación gráfica* fue Nicolás Oresme (S. XIV), ya mencionado anteriormente, trabajó en un sistema de representación gráfica, el cual no es el sistema coordenado cartesiano, sino que muestra bosquejos de situaciones que se encuentran en movimientos y representarlos de manera geométrica.

La función como representación gráfica tiende a ligarse con las metáforas en la enseñanza de la matemática, por ejemplo, se asocia a una curva como el resultado de la trayectoria de un punto en movimiento, y éste sigue los determinados parámetros expresados en su forma analítica (Font, 2001); lo cual no es cierto, pues en rigor este punto no se mueve dentro de la curva que ha sido representada de forma gráfica.

Otro enfoque de expresar *la función como representación gráfica* es cuando la curva de una función es representada por un conjunto infinito de puntos que componen a ésta, de este modo es necesario tener herramientas que otorgan *la función como expresión analítica* y *la función a partir de la teoría de conjuntos* – que se presentarán en puntos posteriores –, ya que la gráfica de una función f es el conjunto formado por los puntos de coordenadas $(x, f(x))$ (Font & J., 2003).

2.2.2.4. La función como expresión analítica

Justamente con la aparición de la Geometría Analítica se formaliza lo geométrico en términos algebraicos, y se establece u puente entre la Geometría y el Álgebra. En el siglo XVII, la definición analítica de la función nace por dichos de Jean Bernoulli, cuya cita mencionada en el trabajo de Boyer (1986, pág. 531), donde expresa: “Llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes”.

Los aportes de Euler permitieron afianzar la notación de función que hoy se conoce, siendo el primero en utilizar $f(x)$ como la notación para una función. De igual modo también contribuye en el campo de las funciones con las funciones algebraicas y trascendentes (Farfán & García, 2008).

Es importante señalar que las notaciones características del concepto de función, que hasta el día de hoy son trabajadas, garantiza y que sostiene a la visión de *la función como expresión analítica* un mejor trabajo que los otros paradigmas, pues, da la posibilidad de trabajar fuera de tablas, gráficas, entre otras, optimizando los recursos materiales y espaciales donde se trabaja, y otorga al campo de la matemática el operar y manipular funciones de modo semejante como se realiza en la aritmética.

2.2.2.5. La función como correspondencia arbitraria

La correspondencia arbitraria centra su visión filosófica en lo estático, parecido en gran manera a la función como correspondencia a secas. Este paradigma epistemológico responde principalmente a un periodo donde se contaba con la notación actual de una función y los correspondientes conjuntos numéricos donde realizar las aplicaciones. Dirichlet en 1837, mencionado por Barahona (2002), Parra (2015), Boyer (1986), entre otros – según su definición del concepto de función ya expuesta en la construcción del concepto de función histórica – por primera vez, se considera a *la función como una correspondencia arbitraria*. Presenta su afirmación junto con un ejemplo la cual no responde a una función que esté bajo la concepción de *la función como expresión analítica*. La conocida función de Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1, si\ x \in [a,b] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \\ 0, si\ \ x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

En otras palabras, esta función desafía la visión de la función como expresión analítica y la función como representación gráfica, pues no existe una curva que represente este tipo de función.

De igual modo Riemann en 1858 aporta nuevamente al campo de la matemática con una nueva definición dando fuerza a *la función como correspondencia arbitraria*, con la siguiente afirmación: “Se dirá que y es un función de x si a todo valor bien determinado de x le corresponde un valor bien determinado de y y cualquera que sea la forma de la relación que una a x y a y” Riemann citado por Parra (2015).

2.2.2.6. La función a partir de la Teoría de Conjuntos

La función dentro de este último paradigma que se define dentro de la Teoría de Conjuntos, la cual surge dado el avance de la abstracción de la matemática; en este paradigma el Álgebra Abstracta y la Topología sustentan al concepto de función dentro de la abstracción de la Matemática, otorgándole un estatus prominente en ésta (Parra, 2015).

La función a partir de la Teoría de Conjuntos establece la definición alcanzada en la edad contemporánea, está definición con su importante grado de abstracción fue aportada por los matemáticos Bourbaki, esto mencionado por Shílov (2004). Ésta definición del concepto de función es actualmente la que predomina en la formación universitaria de estudiantes que cursan asignaturas matemáticas, donde dan el realce a su comprensión.

2.3. Concepto de Función en la Educación

El concepto de función dentro de la educación cobra importancia y relevancia la cual debe ser conocida, desde su importancia a rasgos generales hasta las concepciones trascendentales que posee el currículum nacional frente a la educación regular.

2.3.1. Importancia del Concepto de Función en la Educación Matemática

Según informe de Arturo Mena (2010), menciona el concepto de función, límite, continuidad, la difícil introducción de los números indo-arábigos en Europa, por mencionar algunos, clasificados dentro de las herramientas matemáticas que han tenido una lenta evolución en su construcción, y por ende su difícil introducción en el ámbito educativo. Ya desde el año 1908 – aproximadamente – Félix Klein se ocupó en la formación de profesores de matemática, mencionaba que el concepto de función es el más importante de la matemática, en consecuencia los profesores debían dominar completamente ésta herramienta tan sofisticada.

Tomando en cuenta el conocimiento del avance histórico de la formalización del concepto de función, se logra apreciar que su definición abstracta y conceptual rigurosa que se tiene al alcance de los estudiantes parece contradictorio y curioso que los programas de cursos matemáticos, como en Análisis, el avance curricular es contrario al avance histórico de conceptos troncales de estos cursos, como muestra la tabla tomada de Bagni (2004) "*Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria"*[1]:

Conjuntos y funciones	⟶	Límites, funciones continuas	⟶	Derivadas	⟶	Integrales
Cantor (1875) Bourbaki (1939)	⟵	Cauchy y Weierstrass (1821)	⟵	Newton y Leibniz (1665)	⟵	Kepler (1615), Fermat (1638). *Arquímedes

Figura 4 Avance conceptual de formación de Análisis versus avance temporal conceptual

Evidentemente de estos conceptos fundamentales del Análisis en la matemática el último en aparecer en contraste de los otros conceptos es el concepto de función. El currículum Nacional de Matemática para enseñanza secundaria no es ajeno a este fenómeno del avance conceptual; por mostrar un ejemplo, es que para cursos de formación diferenciada en estudiantes de Tercero y Cuarto medio es posible participar del curso Límites, Derivadas e Integrales (Ministerio de Educación, 2020), donde el concepto de función es la herramienta más importante de éste.

De esto expresado se infiere que el concepto de función es una herramienta fundamental en la Educación Matemática, tanto en la matemática elemental y por ende a la matemática avanzada y que requiere mayor grado de abstracción.

2.3.2. Definición del Concepto de Función en la Educación Matemática

Actualmente existen diversos textos de estudio, tanto para estudiantes universitarios como para estudiantes de enseñanza secundaria; en ellos se halla definiciones con más de un enfoque epistemológico. A continuación se presentan algunas definiciones sugeridas por textos considerados importantes dentro de la formación en Educación Matemática:

James Stewart menciona: "Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento llamado $f(x)$, de un conjunto B" (2012).

[1] Esta tabla fue originalmente fue tomada de Hairer, E. & Wanner, G.: 1996, *Analysis by its History*: Springer-Verlag, New York.

El texto para estudiantes universitarios de Tom M. Apostol menciona la siguiente definición a considerar: “Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y, una función es una ley que asocia a cada objeto de X uno y sólo un objeto de Y” (2001).

En el texto Cálculo y Geometría Analítica de Larson, indica: “DEFINICIÓN DE FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE. Sean X e Y dos conjuntos de números reales. Una función real f de una variable real x de X a Y es una correspondencia que asigna a cada número x de X exactamente un número y de Y” (1999).

Por otra parte, en Álgebra Moderna de Herstein trata el concepto de función como aplicación de la manera siguiente: “Si S y T son conjuntos no vacios, entonces una aplicación de S en T es un subconjunto M de $S \times T$, tal que para todo $s \in S$ hay un solo $t \in T$ tal que el par ordenado (s, t) está en M” (1980, pág. 21).

El texto Geometría Analitica de Lehmann define: “Si dos variable, x e y, están relacionadas de tal manera que para cada valor asignado a la x dentro de su intervalo, quedan determinados uno o más valores correspondientes de y, se dice que y es una función de x” (1989, pág. 286)

El texto Álgebra Superior de la serie Schaum propone la definición de función luego del estudio de Teoría de Conjuntos y Relaciones, definiendo: “Una función es una relación tal que cada elemento del dominio tiene su par con un solo elemento del rango” (Spiegel & Moyer, 2007).

Desde la arista de la educación básica se presenta en el texto escolar para octavo básico las siguientes definiciones planteadas en un mismo texto de estudio, expresando: “Una función f de un conjunto A en un conjunto B $(f: A \longrightarrow B)$ es una relación que asocia a cada elemento x de A un único elemento y de B” y nuevamente lo define: “Una función es una relación entre dos variables x e y, de manera que a cada valor x, llamado preimagen, le corresponde un único valor de y, llamado imagen” (Torres Jeldes & Caroca Toro, 2019).

Se observa el carácter riguroso que pretende la educación matemática en el enfoque de funciones. Por lo que se espera que los educados matemáticamente tengan y posean el rigor suficiente de la comprensión completa y acabada del concepto de función.

2.3.3. Concepto de Función en la Currículum Nacional

El término de Función en los programas de estudio de matemática que propone el currículum Nacional aparece un eje temático con el nombre "Álgebra y Funciones", mencionando lo siguiente:

> *"En este eje, se espera que los estudiantes comprendan la importancia del lenguaje algebraico para expresarse en matemática y las posibilidades que ese lenguaje les ofrece. Se espera que escriban, representen y usen expresiones algebraicas para designar números; que establezcan relaciones entre ellos mediante ecuaciones, inecuaciones o funciones, siempre orientadas a resolver problemas, y que identifiquen regularidades que les permitan construir modelos y expresen dichas regularidades en lenguaje algebraico. Este eje pone especial énfasis en que los estudiantes aprendan a reconocer modelos y ampliarlos, y desarrollen la habilidad de comunicarse por medio de expresiones algebraicas.*
>
> *Los aprendizajes en Álgebra y Funciones se relacionan fuertemente con el eje de Números; un trabajo adecuado en ambos ejes permitirá que los estudiantes comprendan y desarrollen conceptos nuevos cuando cursen niveles superiores, y fortalezcan los adquiridos en el ciclo anterior. Se espera que, al final de este periodo, comprendan y manipulen expresiones algebraicas sencillas, y establezcan relaciones entre estas expresiones mediante ecuaciones o inecuaciones. Especialmente, se pretende que puedan usar metáforas para interiorizarse del concepto de función y cómo utilizarla para manipular, modelar y encontrar soluciones a situaciones de cambios en diferentes ámbitos, como el aumento de ventas en un tiempo determinado. Se espera que transformen expresiones algebraicas en otras equivalentes para resolver problemas y que sean capaces de justificar su proceder; que expresen igualdades y desigualdades mediante ecuaciones e inecuaciones y que las apliquen para resolver problemas; que comprendan las funciones*

lineales, las funciones cuadráticas y sus respectivas representaciones, y que resuelvan problemas con ellas"[2].

Es en Octavo básico donde de manera explícita describe que la noción de función debe ser aprendida por los estudiantes, asegurando esto en su Objetivo de Aprendizaje 7 (OA7) que menciona: "Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: Utilizando tablas. Usando metáforas de máquinas. Estableciendo reglas entre x e y. Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con software educativo" (Ministerio de Educación, 2016), donde a grandes rasgos se interpreta que el estudiante debe comprender la noción de función desde los paradigmas de "La función como correspondencia", "La función como relación entre magnitudes" y "La función como una representación gráfica".

Dada la gran importancia y énfasis que pone el currículum Nacional vigente no solo en Octavo Básico proponiendo la comprensión de la noción de función, sino que también continúa el Concepto de Función en la formación en su educación regular. No está demás mencionar que el este concepto también es de gran importancia en la educación superior en carreras afines de la Matemática, donde es fundamental para apropiarse de los conceptos como Derivadas e Integrales.

2.4. Función en la Matemática

A pesar de conocer los fundamentos epistemológicos, históricos y educaciones del concepto de función y de como este trasciende a otras ciencias, es interesante su naturaleza matemática y de cómo es definido éste toma su presencia en la formalidad. Donde este se estudia generalmente en cursos iniciales de álgebra en enseñanza superior. Por lo cual, los siguientes apartados estarán en el orden relativo que se le asigna en éstos cursos, tomando como referencia apuntes de álgebra de Ingeniería Matemática (2013).

Este análisis es caracterizado a partir de la concepción epistemológica de la *función a partir de la Teoría de conjuntos*, por lo tanto este análisis está completamente ceñido a la matemática contemporánea y bajo lo que se conoce como algebra de funciones.

[2] Este propósito se puede hallar en los programas de estudio de séptimo básico a segundo medio.

El concepto de función toma sentido en la Teoría de Conjuntos mediante conceptos como Producto cartesiano y relaciones, donde la función toma carácter importante y uno dentro del conjunto de todas las relaciones de un producto cartesiano.

2.4.1. Definición de Función

Sean A y B conjuntos. Llamaremos función de A en B a cualquier $f \subseteq A \times B$ tal que

$$(\forall a \in A)(\exists!\, b \in B)\ (a, b) \in f$$

Se esto es caracterizado por la notación $f: A \longrightarrow B$, siempre y cuando f es función de A en B.

2.4.2. Igualdad de funciones

Sean $A, B, C\ y\ D$ conjuntos. Si $f: A \longrightarrow B$ y $g: C \longrightarrow D$ son funciones, entonces:

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} Dom(f) = Dom(g) \\ \wedge \\ Rec(f) = Rec(g) \\ \wedge \\ \big(\forall x \in Dom(f)\big) f(x) = g(x) \end{cases}$$

2.4.3. Inyectividad

Definición

Para los conjuntos A y B. Sea $f: A \longrightarrow B$ una función. Diremos que f es inyectiva si se cumple que

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

O equivalentemente, si se cumple que:

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2)$$

2.4.4. Sobreyectividad

Definición

Se tiene los conjuntos A y B. Se tiene la función $f: A \longrightarrow B$. Diremos que f es sobreyectiva si se cumple que

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)\ y = f(x)$$

2.4.5. Biyectividad

Sean A y B conjuntos y $f: A \longrightarrow B$ una función. Diremos que f es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

2.4.6. Función Inversa

Sean A y B conjuntos, con $f: A \longrightarrow B$ función, donde f es biyectiva se define la función inversa de f, denotada como f^{-1} por:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)\; f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

2.5. Fundamentos en la Enseñanza-Aprendizaje de Funciones

Dada las diferentes variantes epistemológicas del concepto de función emergen los llamados registros de representaciones, estas tomadas en cuenta por la Teoría de Registros de Representación son las que permiten al estudiante ver de diversos modos los objetos matemáticos, dando la importancia que "la comprensión de la matemática requiere de una coordinación interna entre los diversos sistemas de representación semióticos posibles que se pueden elegir y usar" (Duval, 2006).

En la misma tónica de la diversidad epistemológica del concepto de función y en relación con teorías de aprendizaje están los Modos de Pensamiento propuestos por Sierpinska (2000), que originalmente planteó ésta teoría bajo el contexto de un curso que ella impartía de Álgebra Lineal, ella en pro de la superación de los obstáculos epistemológicos que integra el aspecto geométrico con la compresión de los aspectos teóricos. En consecuencia de su estudio expone en su propuesta que consta de tres modos de pensamiento:

- Modo sintético-geométrico: Propone que la mente trata de describir directamente el objeto matemático. Utilizando la representación gráfica, teniendo visualmente puntos, lineal, planos, curvas, entre otras.
- Modo analítico-aritmético: En este sentido los objetos matemáticos se dan mediante relaciones numéricas, fórmulas o ecuaciones. Se puede hallar, expresiones como, el vector pasa a ser un par ordenado, las rectas pasan a ser ecuaciones lineales.
- Modo analítico-estructural: Los objetos son representados por las propiedades que poseen o que los axiomas que permiten demostrarlos. Por lo tanto, se comprende su propiedad intrínseca de manera rigurosa.

Reafirmando éstas interpretaciones, de que la multiplicidad de registros representativos que ofrece el concepto de función, con su destacada importancia dentro de la Matemática, se generan distintos niveles de abstracción y comprensión para el aprendiz (Ramos, 2005), por lo que las teorías referidas son de gran utilidad para tener en cuenta en la enseñanza del concepto de función.

En este mismo sentido es pertinente señalar que aprendizaje de las funciones se da siempre y cuando se desarrolle la capacidad de las y los estudiante para interpretar y usar cada una de las representaciones del concepto de función. Así mismo la capacidad de traducción de uno a otro indica la comprensión del mismo (Rico, 2000).

En este mismo lineamiento Michèle Artigue (1995, pág. 109) propone que la comprensión del concepto de función amerita una flexibilidad, no obstante, el desarrollo de esta flexibilidad presenta dificultades, pues, se necesita tener la habilidad de relacionar la función vista como un proceso y la función vista como una entidad conceptual de manera flexible; la dificultad por la carencia de esta flexibilidad se halla en los estudiantes al momento de enfrentar cursos de Cálculo y Análisis.

3. Marco Metodológico

3.1. Diseño Metodológico

La investigación tiene un carácter cualitativo dado los objetivos generales de este trabajo apunta a la compresión del significado del objeto matemático, para este caso es el concepto de función, la detección de errores en documentos de acceso para estudiantes de enseñanza media y también evidenciar estos errores conceptuales. Es decir, se caracteriza como metodología cualitativa, pues trata de describir y evidenciar un fenómeno educativo, en especial en estudiantes de enseñanza media de Chile, apoyado en el estudio enfocado a documentos escritos (Latorre, Rincón, & Arnal, 2003).

La metodología cualitativa para esta investigación se reafirma en el sentido de que la problemática en estudio busca describir una situación que sucede a diario en las salas de clases de estudiantes de enseñanza media, que es el dar significados e interpretaciones no fidedignas con respecto al concepto de función, deformando muchas veces la visión concreta de lo que es la matemática en rigor. Denzin y Lincoln (2005) mencionan:

> *"La investigación cualitativa es una actividad que localiza al observador en el mundo. Consiste en un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo visible. Estas prácticas transforman el, lo convierten en una serie de representaciones, que incluyen las notas de campo, las entrevistas, conversaciones, fotografías, registros y memorias. En este nivel, la investigación cualitativa implica una aproximación interpretativa y naturalista del mundo. Esto significa que los investigadores cualitativos estudian las cosas en su contexto natural, intentando dar sentid o interpretar los fenómenos en función de los significados que las personas le dan."*

En este sentido, ésta se interesa en estudio de fenómenos del contexto natural e histórico, como también, por los significados que se atribuyen a una cultura en particular, en nuestro caso es en el ámbito de la educación matemática. Sin embargo, para que este estudio tome mayor subjetividad posible es deseable que el investigador anule los prejuicios y valores previos que este posea, de modo que sea posible sesgar los resultados; no obstante, al no anular estos prejuicios se tornará en un obstáculo dentro de la investigación, en consecuencia éste no interpretará adecuadamente los resultados *(Rodríguez G. & Valldeoriola R., 2009)*

3.2. Tipo de Estudio: Estudio de caso

Se utiliza el estudio de caso por tener la flexibilidad y el sentido orientador al acceder a la comprensión de un fenómeno en particular. Considerando, que el estudio de casos es una investigación empírica donde se estudia un determinado fenómeno contemporáneo al momento de la investigación, en especial cuando los límites entre el fenómeno y su contexto no son claramente evidentes (Yin R. , 1994).

Existe un debate respecto de la pertinencia del estudio de caso como investigación cualitativa, ya que por naturaleza no es estrictamente cualitativo. En esta misma tónica autores también discrepan referentes a si esta tipología de estudio, esto dado que su interés de estudio responde a un caso particular, o varios (Rodríguez G. & Valldeoriola R., 2009); en algunas disciplinas es considerado con un rol auxiliar y devaluado en el desarrollo científico (Matínez C., 2006).

Según Rodríguez & Vallderiola (2009) caracterizan la múltiple denominaciones en categorizaciones que puede ser regida y orientada el estudio de caso, y que para responder a las orientaciones de esta investigación, se ciñe bajo la perspectiva de Robert Yin, autor característico y representativo de los estudios de casos, que según Jiménez y Comet (2016), Yin es un sugerido como referencia obligatoria en metodologías de investigación de tipo de estudio de caso. Conforme señala Yin (2009) es pertinente tener en cuenta que el estudio de caso es un "proceso lineal pero iterativo", de modo para representar esta afirmación se presenta la siguiente figura:

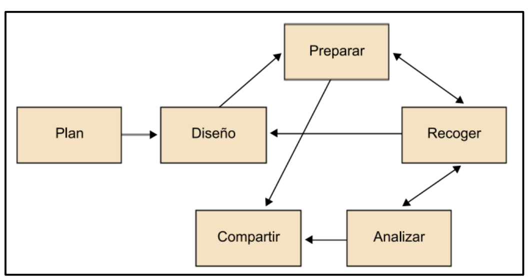


Figura 5. Proceso lineal e iterativo[3]

[3] Figura tomada de Metodología de la Investigación (Rodríguez G. & Valldeoriola R., 2009)

Según Stake (2005) considera que los estudios de casos se pueden categorizan dentro de tres tipos de investigaciones, intrínseco, instrumental y caso múltiple o colectivo, donde éste último es descrito como un estudio instrumental extendido a más de un caso. Los casos pueden ser similares, como también, tampoco pueden ser similares, si existiese esta similitud la no es relevante tomar en cuenta. Por tanto, en este trabajo se realizará bajo un caso múltiple o colectivo.

Los casos a estudiar en esta investigación se centró en dos situaciones concretas dada la naturaleza de los Objetivos Generales de esta investigación, una en la conceptualización del concepto de función como objeto matemático, considerando la construcción histórica y epistemológica, la concepción del concepto de función dentro de la educación y los fundamentos de enseñanza-aprendizaje del concepto de función de forma asertiva relacionada con el O1. En segundo lugar, el caso de estudio está centrado en la detección de los errores conceptuales la documentación accesible para estudiantes de enseñanza media esta relacionadas con O2 y O3.

3.3. Muestra de Estudio

Es importante señalar, antes de declarar la muestra en estudio, por el tipo de investigación, que en este trabajo es el de "estudio de caso", por ende los estudios no son representativos de una muestra de una población o de un universo en concreto en lo que sea posible generalizarlo estadísticamente, sino que se pretende interpretar a proposiciones teóricas, debido que el objetivo del investigador en este tipo de estudio es una generalización mediante un análisis riguroso y no de en enumerar frecuencias (Jiménez Chaves & Comet W., 2016).

Con la pregunta de investigación que orienta a este trabajo: "*¿Existen errores conceptuales en la enseñanza del concepto de función presentada en los documentos que los estudiantes de enseñanza media tienen acceso?"* se define explícitamente que la muestra de este estudio no corresponde a individuos o estudiantes, sino que se centra en el análisis de los significados otorgados al concepto de función en documentación accesible para estudiantes de enseñanza media, que consecuentemente se detectaron errores conceptuales de estos.

Dado que se tienen dos estudios de caso, que es la conceptualización del concepto de función para comprender su significado como objeto matemático y la detección de errores conceptuales del concepto de función en documentos accesible para estudiantes de enseñanza media. La siguiente tabla responde a la caracterización de la muestra de estudio para cada uno de ellos:

Tabla 1. Muestra de estudio

Estudio de caso	Muestra
(a) Conceptualización del concepto de función para comprender su significado como objeto matemático.	• Definición matemática. • Significado en el currículum nacional. • Significado en los textos del estudiante. • Significado Holístico (Histórico y Epistemológico).
(b) Detección de errores conceptuales en la enseñanza-aprendizaje del concepto de función en documentos accesibles para estudiantes de enseñanza media.	• Programas de estudio de Matemática de Octavo Básico, Primero medio y Segundo medio. • Textos de Matemática del estudiante. • Planificaciones de Matemática.

3.3.1. Criterio de elección muestras de estudio

Al tener dos estudios de caso en esta investigación se asignan criterios diferentes para ambos, ya que no existen similitudes entre estos dos estudios de caso, referente a las intenciones de cada uno de estos estudios.

3.3.1.1. Estudio de caso (a)

Para delimitar los criterios de elección para la muestra de éste estudio se considerarán aquella fuente documentada en la que sea pertinente evidenciar definiciones y desarrollo del concepto de función. Bajo la búsqueda de esta fuente documentada se corrobora que los autores consideraros sean citados en otros trabajos en más de una oportunidad.

Criterios:

1. Textos de estudios sugeridos en bibliografía de cursos de matemática de educación superior.
2. Programas de Estudios de Matemática de enseñanza media.
3. Tesis relacionadas al concepto de función.
4. Artículos de revistas respecto a la evolución del concepto de función.
5. Artículos de revistas respecto concepción epistemológica del concepto de función.
6. Textos de didáctica de la matemática.

3.3.1.2. Estudio de estudio (b)

Bajo una premisa semejante que los criterios del estudio (a) se considera la fuente documentada que sea de acceso para estudiantes de enseñanza media, en especial de octavo básico, primero medio y segundo medio, sin embargo, un aspecto que difiere del estudio (a) es que no se considerará exclusivamente aquella fuente prestigiosa que sea referida o recomendada más de una vez, pues se necesita evidencia documentos que los estudiantes de enseñanza media tienen acceso fácilmente.

Criterios:

1. Programas de Matemática Octavo básico, Primero medio y Segundo medio.
2. Textos de matemática para el estudiante de los cursos a estudiar de más de una editorial.
3. Planificaciones de clases de matemática relacionadas al concepto de función.

3.4. Técnicas de Investigación

Esta investigación al tener dos estudios de caso se definen las siguientes técnicas de investigación para cada uno de los estudios de caso

Tabla 2. Técnicas de investigación

Estudio de caso	Técnicas de investigación
(c) Conceptualización del concepto de función para comprender su significado como objeto matemático.	• Revisar y analizar investigaciones de tipo histórico-epistemológicas. • Estudiar y explicitar el concepto de función en el ámbito educativo • Caracterizar fundamentos de enseñanza-aprendizaje del concepto de función.
(d) Detección de errores conceptuales en la enseñanza-aprendizaje del concepto de función en documentos accesibles para estudiantes de enseñanza media.	• Contrastar cada tipo de documentos referente al concepto de función para estudiantes de enseñanza media, mediante: a) Definición Matemática b) Definición Epistemológica c) Fundamentos de enseñanza-aprendizaje

3.5. Credibilidad

El que esta investigación no sea cualitativa no le resta credibilidad a la interpretación de los datos, pues al tener una metodología cualitativa con sustento teórico y argumentos concretos de lo que representa éste tipo de investigación. Por tanto, para asegurar la credibilidad de esta investigación se aplicará un proceso de triangulación de la información obtenida, la cual contempla un carácter teórico y también metodológico.

Según Okuda y Gómez-Restrepo (2005) define el método de la triangulación como: "*término metafórico representa el objetivo del investigador en la búsqueda de patrones de convergencia para poder desarrollar o corroborar una interpretación global del fenómeno humano objeto de la investigación y no significa que literalmente se tengan que utilizar tres métodos, fuentes de datos, investigadores, teoría o ambientes*".

Al aplicar éste método se espera que las debilidades de cada estrategia en particular no se sobrepongan con las debilidades de las otras, permitiendo que las fortalezas de estas se sumen. Es decir, al utilizar una sola estrategia los estudios son más sesgados y no permite visualizar adecuadamente la intención de la investigación, por ende, se caracteriza la investigación con una sola estrategia de estudio como una investigación débil en comparación con una investigación que ejecuta más de una estrategia.

Dicho de otro modo, en esta investigación se consideran que ambos estudios de caso (a) y (b) se sustenten bajo un método de triangulación dada las técnicas seleccionadas como estrategias de investigación para cada estudio de caso.

4. Presentación y Análisis de los Datos

4.1. Significado del concepto de función

En el sentido de esta investigación, la cual tiene como propósito detectar errores conceptuales del concepto de función en la enseñanza aprendizaje para estudiantes de enseñanza media, es pertinente definir las técnicas de detección de estos errores. Éstas técnicas sustentadas en el marco metodológico prescinden de la caracterización del concepto de función. Con el estudio llevado a cabo en el marco teórico de este trabajo permite orientar el significado del concepto de función como un objeto matemático potente, el cual ha sido construido culturalmente bajo diversos contextos, tanto matemático, histórico, epistemológico, educacional y en la fundamentación del aprendizaje de este. Por tanto, el tener solo una definición que aúne todos los contextos involucrados es prácticamente inconveniente, pues esta se podría caracterizar con solo alguna de estas.

En consecuencia, dado el marco teórico de este trabajo se suscitan tres definiciones globales que abarcan cabalmente lo que refiere al concepto de función, que es definición epistemológica, definición educacional y fundamentos de la enseñanza-aprendizaje, todo esto en responder al significado de éste objeto matemático.

4.1.1. Definición Epistemológica

Dado el carácter sofisticado del concepto de función y este como herramienta matemática transversal e interdisciplinaria cobra sentido en la visión que se encuentre. Además, por lo proporcionado por autores como Youschkevitch (1975), Kleiner (1989), Sastre, Rey y Boubée (2008), Díaz Gómez (2013) y Parra (2015), señalan que la construcción histórica y epistemológica del concepto e función es un hecho a la par, sin embargo, la definición epistemológica aporta al significado del concepto de función para los fines de este trabajo de investigación; de este modo se pueden representar la siguiente de resumen que cada uno de los seis paradigmas donde se puede categorizar el concepto de función:

Tabla 3. Definición epistemológica del concepto de función

La función como correspondencia	Concepto de número Tablas Aritmética básica (adición, sustracción, multiplicación, división)

	Enumeración Sucesiones Series
La función como relación entre magnitudes	Concepto de variable Interpolación y extrapolación en la búsqueda de variables Relación entre magnitudes físicas
La función como representación gráfica	Representaciones de curvas Diagrama Sagital Bosquejo de situaciones que se modelan mediante funciones
La función como expresión analítica	Ecuación (o fórmula) de una función Puente entre la geometría y el álgebra
La función como correspondencia arbitraria	Regla unívoca entre un valor x e y Funciones discontinuas
La función a partir de la Teoría de Conjuntos	Teoría de conjuntos Relaciones Dominio y Recorrido

Ya con los paradigmas epistemológicos caracterizados constituyen una definición abierta del concepto de función, la cual es un referente al momento de realizar un análisis errores conceptuales del concepto de función en la enseñanza aprendizaje, evidenciando y categorizando la orientación epistemológica de los documentos a estudiar.

4.1.2. Definición Educacional

La definición educacional del concepto de función no solo se enmarca del quehacer escolar o de la enseñanza regular, sino que este responde a lineamientos propios de la matemática, que a su vez ésta al se caracteriza con diversas ramas de estudio, entre las más importantes se hallan Aritmética, Álgebra, Análisis, Geometría, Estadística y Probabilidad, Por tanto, es necesario definir el concepto de función en cada una de éstas para conceptualizar el significado del concepto de función que tienen apropiadas estas ramas importantes de la matemática. No está demás mencionar que el quehacer matemático no responde a los requerimientos del ámbito educacional sino que es propia de esta ciencia tan profunda. Cabe destacar que las definiciones apropiadas por cada una de las ramas importantes de la matemática responden también a uno o más paradigmas de la concepción epistemológica del concepto de función.

El propósito de hallar la definición del concepto de función en las áreas de la matemática ya mencionadas se podrá conceptualizar el propósito educacional implícito del concepto de función, para que al momento de realizar la triangulación descrita en el marco teórico de este trabajo se determine el área matemática implícita y por ende validar su orientación epistemológica.

Por tanto, al igual que la definición epistemológica la definición educacional no tendrá una definición concisa que apropie todos los puntos de vistas que las diversas áreas aplican en el quehacer matemático de cada una de éstas. Para este fin de definir de manera abierta el concepto de función se categorizaran en una tabla el área de la matemática relacionándola con una definición del concepto de función caracterizada en un texto importante y junto con la definición (o definiciones) epistemológica que se puede asociar a esta.

Tabla 4. Definición del concepto de función en las áreas de la matemática

	DEFINICIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN	**PARADIGMA(S) EPISTEMOLÓGICO**
ARITMÉTICA	Siempre que una cantidad variable depende de otra se dice que es función de esta última. Aritmética de Baldor	• *La función como correspondencia* • *La función como relación de magnitudes.*
ÁLGEBRA	Si S y T son conjuntos no vacios, entonces una aplicación de S en T es un subconjunto M de $S \times T$, tal que para todo $s \in S$ hay un solo $t \in T$ tal que el par ordenado (s, t) está en M. Herstein, Álgebra Moderna.	• *La función a partir de la teoría de conjuntos*
GEOMETRÍA	Si dos variable, x e y, están relacionadas de tal manera que para cada valor asignado a la x dentro de su intervalo, quedan determinados uno o más valores correspondientes de y, se dice que y es una función de x. Lehmann, Geometría Analítica	• *La función como representación gráfica* • *La función como expresión analítica* • *La función como correspondencia* • *La función como relación de magnitudes*
ANÁLISIS	Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y, una función es una ley que asocia a cada objeto de X uno y sólo un objeto de Y Apostol Calculus, Volumen I.	• *La función a partir de la teoría de conjuntos* • *La función como expresión analítica* • *La función como correspondencia arbitraria*

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA	• *La función a partir de la teoría de conjuntos* • *La función como correspondencia arbitraria* • *La función como expresión analítica*

El aunar todos y cada una de las definiciones del concepto de función que puedan explicitarse en cada una de las ramas de la matemática se obviaría, probablemente, el carácter y las intenciones de cada una de éstas. También, es importante mencionar que las ramas de la matemática no son totalmente rígidas dentro de cada una de estas, sino que se entrelazan y comparten definiciones y aportes para tener una comprensión más acabada de ciertos objetos, como por ejemplo el análisis toma elementos de la geometría analítica para representar gráficamente funcione, esto solo para mencionar.

Finalmente, ya con esta definición abierta que se muestra en la Tabla 4. Definición del concepto de función en las áreas de la matemática permite conceptualizar el significado del concepto de función como un objeto matemático importante y que también proporciona una herramienta para la detección de los errores conceptuales que serán detectados en los próximos apartados. Por tanto, la definición educacional del concepto de función responde a los propósitos de investigación propia de cada una de las ramas de la matemática, y por ende tiene concomitancias en la educación matemática.

4.1.3. Fundamentos en la enseñanza-aprendizaje

Los fundamentos en la enseñanza-aprendizaje descritos en el marco teórico en el punto 20. hacen referencia a los diversos tipos de registros de representación del concepto de función, que según Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013) presenta los registros de representaciones de la noción de función, en lo que identifica, Verbal, Gráfica, Simbólica y Tabular. También Parra (2015) consigna los registros Verbal, Gráfico, Simbólico, Tabular e Icónico. Y no solo ellos sino que también estas representaciones son identificados como también definidas por Rey y colaboradores (2009), con los registros Verbal, Tabular, Gráfico, Algebraico y Algorítmico. De ésta última se tomará como referente para dar orientación a los registros de representaciones de este objeto matemático que es la función, ver Tabla 5. Registros de representaciones, de este modo, conforme a Rico (2000) el aprendizaje de las funciones se da siempre y cuando se desarrolle la capacidad de las y los estudiante para interpretar y usar cada una de las representaciones del concepto de función.

Tabla 5. Registros de representaciones

Registros de representaciones	
Registro Verbal	Descripción de una determinada función en lenguaje natural de una determinada función
Registro Tabla	La función de valores en una tabla de correspondencia
Registro Gráfico	La función se representa por medio de una curva en el plano
Registro Algebraico	La función se representa por una expresión algebraica
Registro Algorítmico	La función es presentada en su proceso para calcular la imagen dada una preimagen

Por tanto, la conceptualización del significado del concepto de función conforme a los fundamentos de enseñanza-aprendizaje pone énfasis en los diversos registros representativos del concepto de función, pues, de este modo permite al profesor tener como indicador el evidenciar los diversos registros que el estudiante puede plasmar.

Por consiguiente, los fundamentos de enseñanza-aprendizaje del concepto de función muestran una conceptualización de lo que el estudiante puede manifestar mediante un determinado registro de representación que es validad por el docente. Por tanto, el significado no puede ser definido en términos cerrados sino que es pertinente la recopilación de los diversos registros de este como muestra la Tabla 5. Registros de representaciones

4.1.4. Conceptualización del concepto de función

Dado el análisis realizado de la comprensión el significado del concepto de función es evidente que desde el ámbito que se desee investigar éste objeto matemático se pueden hallar distintos puntos de vistas de lo que es el concepto de función; ahora, para fines y objetivos de esta investigación ligado a lo formal matemático y educacional es pertinente integrar estas definiciones en un solo instrumento que permita detectar los errores conceptuales del concepto de función en la enseñanza-aprendizaje de los estudiantes de enseñanza media.

Por tanto, se confecciona una herramienta que permita evidenciar en primer lugar el paradigma que se halle en los instrumentos para luego detectar los errores conceptuales en su determinada orientación que presente. Esta herramienta es una tabla (ver

Tabla 6. Instrumento de Conceptualizar el concepto de función) que debe permitir consignar la conceptualización de los documentos donde se estudiaran para detectar los errores conceptuales.

Tabla 6. Instrumento de Conceptualizar el concepto de función[4]

	Aritmética					**Álgebra**					**Geometría**					**Análisis**					**Probabilidad y Estadística**				
	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico
La función como correspondencia																									
La función como relación entre magnitudes																									
La función como representación gráfica																									
La función como expresión analítica																									
La función como correspondencia arbitraria																									
La función a partir de la teoría de conjuntos																									

[4] Esta tabla está inspirada en las tablas que consignan los significados pretendidos de la función como objeto matemático de las tablas utilizada por Parra (2015, pág. 76) y de Pino-Fan y colaboradores (2013, pág. 141).

Finalmente, la conceptualización del concepto de función para comprender su significado dependerá del contexto que el docente o la rama de la matemática le otorguen más valor, no solamente desde un punto de vista epistemológico se puede configurar el concepto de función o desde la propia definición en el rigor de la matemática pura. Por lo tanto, está tabla permite consignar los registros de representación, ramas de la matemática y paradigmas epistemológicos, para posteriormente dar un significado integral del concepto de función que estará condicionado a su contexto donde sea manifestado.

4.2. Detección de errores conceptuales

En este segundo estudio de caso se estudiaran los documentos ligados al ámbito educacional chileno que involucren explícitamente el concepto de función en donde el estudiante de octavo básico, primero medio y segundo medio tiene relaciones, entre ellos se analizaran los programas de estudios propuestos por el Ministerio de Educación de Chile, Textos de estudios, planificaciones de profesores de matemática, evaluaciones estandarizadas y los primeros apuntes de estudios que se puedan acceder desde el buscado de Google.

Antes de presentar los errores conceptuales de cada uno de estos documentos se categorizará mediante la

Tabla 6. Instrumento de Conceptualizar el concepto de función consignando los elementos explícitos que permitirán dar significado implícito de estos documentos a estudiar.

4.2.1. El Currículum Nacional

En este apartado se presentarán los Objetivos de Aprendizaje (OA) correspondientes al concepto de función de forma explícita. Se clarificará el significado implícito del concepto de función y posteriormente se detectarán los errores conceptuales que se pueden hallar en los programas propuestos por el Ministerio de Educación de Chile para Octavo básico, 1° y 2° medio. Y finalmente, se realizará un análisis de estos errores conforme a lo detectado mediante la triangulación de datos; todo esto conforme a lo explicitado en los OA.

4.2.1.1. Octavo Básico

De acuerdo con el plan de estudio para matemática propuesto por el Ministerio de Educación de Chile el concepto de función tiene su primer acercamiento formal, donde el estudiante comprende la noción de función (Ministerio de Educación, 2016, pág. 100). Esto es complementado con la definición de función lineal y función afín.

OA 7 Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: › Utilizando tablas. › Usando metáforas de máquinas. › Estableciendo reglas entre x e y. › Representando de manera gráfica (plano cartesiano, diagramas de Venn), de manera manual y/o con *software* educativo.	› Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente ("constante de proporcionalidad"). › Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa. › Descubren que la inclinación (pendiente) de la gráfica depende de la constante de la proporcionalidad. › Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica. › Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes, basados en ecuaciones de funciones lineales $f(x) = a \bullet x$ ($y = a \cdot x$). › Representan la linealidad $f(kx) = kf(x)$ y $f(x1 + x2) = f(x1) + f(x2)$ en tablas y gráficos. › Identifican la pendiente del gráfico $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de la función $f(x) = a \bullet x$ con el factor a. › Verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación $f(x) = a \bullet x$. › Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones lineales.

Figura 6. OA 7 Octavo básico[5]

[5] Objetivo de aprendizaje 7 tomado de programa de matemática de octavo básico (Ministerio de Educación, 2016)

OA 10 Mostrar que comprenden la función afín: › Generalizándola como la suma de una constante con una función lineal. › Trasladando funciones lineales en el plano cartesiano. › Determinando el cambio constante de un intervalo a otro, de manera gráfica y simbólica, de manera manual y/o con *software* educativo. › Relacionándola con el interés simple. › Utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas.	› Representan, completan y corrigen tablas y gráficos pertenecientes a cambios con una base fija y tasa de cambio constante. › Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín: $f(x) = a \bullet x + b$. › Determinan las regiones en el plano cartesiano cuyos puntos p(x,y) representan soluciones (x,y) de las inecuaciones: $y < a \bullet x + b$ o $y > a \bullet x + b$. › Diferencian modelos afines, lineales y de proporcionalidad inversa. › Modelan situaciones de la vida diaria o de ciencias con funciones afines. › Identifican, en la ecuación funcional, el factor a con la pendiente $\frac{\Delta y}{\Delta y}$ de la recta y el sumando b con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen $o(0,0)$ › Elaboran gráficos de funciones afines a y b dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación $f(x) = a \bullet x + b$. › Resuelven problemas de la vida diaria o de ciencias que involucran el cambio constante expresado mediante ecuaciones recursivas de la forma $f(x + 1) - f(x) = c$.

Figura 7. OA 10 Octavo básico[6]

4.2.1.2. Primero medio

En este curso se da por conocido lo que es el concepto de función, pues en la unidad dos correspondiente al eje de Álgebra y Funciones se ve la función lineal en dos variables y un estudio detallado de lo que corresponde a la ecuación de la recta (Ministerio de Educación , 2016, pág. 102).

[6] Objetivo de aprendizaje 10 tomado de programa de matemática de octavo básico (Ministerio de Educación, 2016)

OA 5 Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x,y) = ax + by$; por ejemplo: un haz de rectas paralelas en el plano cartesiano, líneas de nivel en planos inclinados (techo), propagación de olas en el mar y la formación de algunas capas de rocas: • Creando tablas de valores con *a, b fijo* y *x, y variable.* • Representando una ecuación lineal dada, por medio de un gráfico, de manera manual y/o con *software* educativo. • Escribiendo la relación entre las variables de un gráfico dado; por ejemplo, variando c en la ecuación $ax + by = c$; $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (decimales hasta la décima).	• Elaboran tablas y gráficos para ecuaciones de la forma $ax + by = c$ con a, b valores fijos y c con valores variables. • Reconocen el cociente $-\frac{a}{b}$ como pendiente de la recta con la ecuación $ax + by = c$. • Confeccionan modelos 3D (figuras rectangulares o poligonales en niveles equidistantes) y los proyectan al plano para identificar la proyección de los bordes como líneas de la forma $ax + by = c$. • Reconocen que las líneas con mayor densidad en el plano de proyección representan mayor cambio (pendiente) en el modelo 3D. • Confeccionan un haz de gráficos de funciones afines, sobre la base de la función $f(x, y) = ax + by$ (con a y b fijo). • Resuelven en el plano cartesiano problemas geométricos que involucren ecuaciones de la forma $ax + by = c$. • Representan fenómenos geográficos y cotidianos mediante funciones lineales $f(x, y)$ en dos variables.

Figura 8. OA 5 Primero Medio[7]

4.2.1.3. Segundo medio

Ya en este nivel, se estudian en mayor detalle las funciones de acuerdo con el currículum nacional, se realiza un estudio exhaustivo de la función cuadrática, se estudian raíces, logaritmos, inversa de una función y función de probabilidad. Por lo que es pertinente tener conocimiento de lo que es el concepto de función y características de funciones de manera adecuada a lo que ameritan las exigencias pretendidas por el currículo (Ministerio de Educación, 2016).

[7] Objetivo de aprendizaje 5 tomado de programa de matemática primero medio (Ministerio de Educación , 2016)

OA 3 Mostrar que comprenden la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$: $(a \neq 0)$ • Reconociendo la función cuadrática $f(x) = ax^2$ en situaciones de la vida diaria y otras asignaturas. • Representándola en tablas y gráficos de manera manual y/o con *software* educativo. • Determinando puntos especiales de su gráfica. • Seleccionándola como modelo de situaciones de cambio cuadrático de otras asignaturas, en particular de la oferta y demanda.	• Reconocen representaciones de la función cuadrática en curvas de la vida cotidiana (balísticas, caída de pelotas, caída de agua, etc.). • Grafican funciones cuadráticas a partir de una tabla de valores en la cual están dados los diferentes parámetros a, b, c. • Elaboran gráficos de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, considerando $a > 0$ o $a < 0$ (variando respectivamente b y c). • Grafican y derivan la función para distintos valores de sus parámetros, obteniendo la forma canónica $y = a(x - d)^2 + e$. • Analizan las variaciones de la gráfica mediante diferentes medios de representación. • Marcan y encuentran numéricamente la intersección de la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, con el eje x. • Determinan en el plano cartesiano las regiones cuyos puntos $P(x,y)$ representan soluciones (x,y) de las inecuaciones cuadráticas $y < ax^2 + bx + c$ o $y > ax^2 + bx + c$. • Modelan situaciones de cambio cuadrático de la vida cotidiana y de las ciencias, por medio de la función cuadrática.

Figura 9. OA 3 Segundo Medio[8]

OA 5 Mostrar que comprenden la inversa de una función: • Utilizando la metáfora de una máquina. • Representándola por medio de tablas y gráficos, de manera manual y/o con *software* educativo. • Utilizando la reflexión de la función representada en el gráfico en un plano cartesiano. • Calculando las inversas en casos de funciones lineales y cuadráticas.	• Elaboran tablas de valores de una función y de su inversa, reconociendo el intercambio de los valores en los pares (x,y). • Representan una función de manera concreta (metáfora de máquinas, gráficos, etc.) y representan de manera adecuada la función inversa (máquinas que funcionan en sentido contrario, reflexiones del gráfico, etc.). • Conjeturan sobre la reflexión en la recta $y = x$ para obtener la inversa de una función. • Determinan las ecuaciones de las funciones inversas de funciones lineales y cuadráticas. • Reconocen la función inversa de una función dada, en representaciones pictóricas y simbólicas. • Resuelven problemas de la vida cotidiana y de otras ciencias, que involucren el concepto de la función inversa.

Figura 10. OA 5 Segundo Medio[9]

4.2.1.4. Significado del concepto de función en el currículum nacional

Para la compresión respecto del significado implícito otorgado al concepto de función por parte del currículum nacional se consignarán los elementos explícitos de éste respecto a cada

[8] Objetivo de aprendizaje 3 tomado de programa de matemática segundo medio (Ministerio de Educación, 2016)

[9] Objetivo de aprendizaje 5 tomado de programa de matemática segundo medio (Ministerio de Educación, 2016)

uno de los OA presentados en las figuras correspondientes a cada nivel. Posteriormente se tabularan (ver Tabla 9. Significado implícito del concepto de función otorgado por el currículum nacional) para poner de manifiesto visualmente estos significados.

La rama predominante en este estudio es el Álgebra, esto de manera explícita, pues este contenido corresponde al eje de Álgebra y Funciones, no obstante, que esté categorizado en este eje no de garantiza que su definición implícita sea estrictamente una definición algebraica. Sin embargo, antes de manifestar las ramas de la matemática implícitas en el currículum se partirá detectando los registros pretendidos que el estudiante quiere que aprenda. Para esto se consignaran en la Tabla 7. Registros de representaciones en el currículum nacional de los registros de representaciones de la función. Que, como resultado, muestra que el currículum nacional en lo declarado explícitamente posee una cobertura total de los registros de representación del concepto de función en cada uno de los niveles a estudiar en esta investigación.

Tabla 7. Registros de representaciones en el currículum nacional

Registros de representación	**8° Básico**	**1° Medio**	**2° Medio**
Verbal	●	●	●
Tabular	●	●	●
Gráfico	●	●	●
Algebraico	●	●	●
Algorítmico	●	●	●

En segundo lugar, se procede a constatar si estos registros de representaciones están alineados a una rama de la matemática o responden a más de una de éstas. Como por ejemplo, se cree que la tabulación está ligado a conjuntos discretos, por ende a la aritmética ya que el tener una tabla que permita tomar registro de cada par ordenado de una función cuadrática es imposible, sino que también se relaciona, en lo expresado, con la Geometría, pues los datos tabulados permite graficar los puntos y posteriormente tener una gráfica de esta. Por tanto, no solo se deben asociar a una sola rama en particular.

Tabla 8. Ramas de la matemática en los registros de representaciones pretendidos por el currículum

	8° Básico					1° Medio					2° Medio				
	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico
Aritmética	●	●			●		●					●			●
Álgebra		●	●	●					●			●	●	●	
Geometría			●		●	●		●	●	●	●		●	●	
Análisis				●										●	●
Probabilidad y Estadística															

Para un análisis profundo de lo que la Tabla 8. Ramas de la matemática en los registros de representaciones pretendidos por el currículum muestra es que a pesar de que el currículum tenga una cobertura exhaustiva de lo que respecta a los fundamentos de la enseñanza aprendizaje del concepto de función no condice a los requerimientos de estudios en las ramas de la matemática. Para esto se analizarán las ramas de la matemática estudiados explícitamente con el concepto de función en cada nivel.

Octavo básico

En primer lugar, no se explicita el conjunto numérico en el que el concepto de función se trabajará, de acuerdo a la definición aritmética del concepto de función no es necesario tener un conjunto explicitado, por tanto el establecer una regla entre x e y responden a un registro Verbal asociado a la aritmética, junto con la tabulación y el proceso algorítmico que llega a realizar los cálculos de la regla existente entre x e y.

Segundo, en el tabular los datos no solo se realizan de forma aritmética, sino que también desde un punto de vista algebraico al momento de establecer una relación entre función y una ecuación, este último siendo de gran estudio dentro del Álgebra, teniendo la herramienta auxiliar la tabulación para hallar soluciones a ecuaciones, como también el representar la ecuación de la recta en el plano cartesiano, cobrando un registro de representación gráfico; y también un registro propiamente algebraico al generalizar reglas entre valores x e y.

Por otra parte, se realiza una de las primeras aproximaciones la geometría analítica, determinando la curva descrita por una función lineal y el proceso algorítmico de graficar esta curva, donde se tabulan datos para posteriormente trazar esta recta en el plano cartesiano.

Finalmente, el Análisis hace una aparición implícita dentro del concepto de función, exponiendo una asociación entre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y con el coeficiente a de una función$f(x) = a \cdot x$.

Primero medio

Sin duda la Geometría prima bastante en el concepto de función de acuerdo a lo enseñando en primero medio, a pesar de que existe una cobertura total de los diferentes tipos de registros de representaciones. Al explicitar que un haz de rectas paralelas es semejante a las olas en el mar constituye un registro verbal del comportamiento de la función. Por otra parte, el registro gráfico es netamente desde la geometría analítica ligada a su expresión algebraica en términos de la ecuación de la función lineal de dos variables. De este mismo modo, los procesos de intercambios de registros de representación responden a la comprensión de la ecuación de la recta y familias de rectas, por ende a cuestiones geométricas.

En el registro tabular solo se explicita "*Creando tablas de valores con a, b fijo y x e y varable"* esto queda bajo una solo reglas arimeticas que permiten reemplazar valores, calcular y para posteriormente tabular.

Segundo medio

En este nivel se estudian todo los tipos de registros de representaciones del concepto de función. Al igual que en primero medio el estudio de la función cuadrática es caracterizada por el estudio de la curva de ésta, que es una parábola. Se presenta verbalmente que la función cuadrática describe situaciones como la balística, solo por nombrar una, junto con su expresión analítica que permite la conversión desde el plano cartesiano a una expresión algebraica (a pesar del fuerte grado otorgado a la geometría analítica implícitamente no se define lo que es un lugar geométrico para sustentar fuertemente las intenciones del currículum), y viceversa.

El Análisis realiza nuevamente protagonismo al incorporar tópicos como vértice, que se asocia con máximos y mínimos junto con el procedimiento algorítmico de hallar estos puntos y valores relacionados a estos puntos.

El Álgebra muestra fuertemente afianzado en la notación propia de un lenguaje algebraico apropiado para hallar la función inversa. Por otra parte, la tabulación de datos para luego realizar el intercambio de estas para inferir en su función inversa.

Finalmente, la Aritmética toma protagonismo al tabular los valores relacionados a la función cuadrática y en lo diversos algoritmos que se asocian para determinar los valores a los elementos de la parábola, como también al momento de determinar la inversa de una función dada.

Significado del concepto de función en el currículum

A continuación se presenta la Tabla 9. Significado implícito del concepto de función otorgado por el currículum nacional con la tabulación respectiva que definirá el significado del concepto de función que le otorga el currículum nacional, integrando los paradigmas epistemológicos, las ramas de la matemática y los registros de representaciones relacionados que conjugaran este significado por parte del currículum nacional en torno al concepto de función.

Tabla 9. Significado implícito del concepto de función otorgado por el currículum nacional

	Aritmética					Álgebra					Geometría					Análisis					Probabilidad y Estadística				
	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico
La función como correspondencia	●	●			●		●																		
La función como relación entre magnitudes	●							●			●														
La función como representación gráfica								●			●		●		●				●	●					
La función como expresión analítica									●				●	●					●						
La función como correspondencia arbitraria																									
La función a partir de la teoría de conjuntos																									

[10]

[10] El orden de mayor a menor predominancia en los textos se da de la siguiente forma: *La función como representación gráfica, la función como correspondencia, la función como representación analítica y la función como relación entre magnitudes.*

Según lo consignado en la Tabla 9. Significado implícito del concepto de función otorgado por el currículum nacional se evidencia que el currículum nacional concibe el concepto de función en la Aritmética, Álgebra, Geometría y Análisis; y en los paradigmas de *la función como correspondencia, la función como relación entre magnitudes, la función como representación gráfica y la función como expresión analítica*. Por tanto, el currículum nacional no tiene incorporado todas las ramas de la matemática dentro de lo que explicita como concepto de función, dejando de lado la Probabilidad y Estadística, la que por cierto es útil al momento de comprender ejemplos de contexto cotidiano. Por otra parte, el currículum no toma en cuenta los paradigmas que están a la vanguardia respecto a la definición del concepto de función. Así también, no se explicita en ningún momento el uso de un determinado conjunto numérico en donde se realizan las aplicaciones o reglas que asocian a un x con un valor y.

4.2.1.5. Errores detectados en el currículum nacional

i. Falta la formalización conceptual de la noción de función.
ii. Representación gráfica mediante un diagrama de Venn.
iii. No discriminación entre lo que es una ecuación y una función.
iv. Alto grado de abstracción presentados y expresiones analíticas de elevada complejidad en la notación expuesta en los indicadores de evaluación
v. Se plantean que la función lineal puede ser representada por dos variables.
vi. Se manifiesta la ecuación de la recta como función lineal de manera deliberada.
vii. No definir las condiciones para la existencia de la inversa de una función.
viii. Usar la reflexión de la función identidad para determinar los puntos de la función inversa, sin conocer la función identidad.

4.2.1.6. Análisis de los errores

i. No hay un formalización de teoría de conjuntos en este curso ni cursos previos, no se definen conceptos claves, como relación, dominio, recorrido, imagen, preimagen, no se define el conjunto en cual se trabajará la función, se subentiende que lo pares se ven solo como puntos aislados que siguen una regla y no como una continuidad que en la gráfica forma la curva completa.

ii. Propone el uso de diagrama de Venn-Euler para representar una función, sin embargo, el uso para visualizar una función con su dominio y recorrido representados como conjuntos finitos es pertinente utilizar un diagrama Sagital.

iii. El término función y ecuación suelen confundir a los estudiantes, manipulando una función como una ecuación, llevando la función a interpretarla como puntos aislados y no como una curva. Lo que también causa problemas en este mismo sentido es la ecuación de la recta con la función afín, ya que toman los elementos de la ecuación de la recta como la pendiente y punto de corte con el eje Y. En este mismo sentido, se hace abuso de expresar el término ecuación de la función sin estimar diferencia entre ambas.

iv. Desde el punto de vista de los paradigmas epistemológicos del concepto de función, se presenta *la función como correspondencia* como la más básica, sin embargo, para ser este un nivel donde por primera vez es definido explícitamente el concepto de función se presenta con la visión de *la función como expresión analítica* obviando el alto grado de apropiación que les hace falta de la notación algebraica que permite expresar analíticamente este concepto.

v. Como bien se presenta en el apartado anterior, lo que en si el currículum propone, no es en rigor una función lineal con dos variables, pues se tendría $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de modo que teniendo una función del tipo $f(x,y) = ax + by$ solo se obtiene un plano al momento de representar gráficamente esta expresión analítica.

vi. Lo que se analiza en más detalle son las familias de rectas según lo pretendido por el OA 5 es lo que se denomina como familias de rectas, por ende, existe un error al denotar la ecuación de la recta a una función lineal.

vii. Si bien, desde octavo básico se viene con el contenido de funciones, en el cual no se ha visto una sugerencia para un estudio riguroso del concepto de función, pues no se toma en cuenta el dominio de una función, la condición de la existencia de una única imagen para cada preimagen, por lo que se infiere no se ha realizado un estudio de la inyectivdidad, sobreyectivodad ni biyectividad de una función. Por tanto, es inadecuado estudiar la inversa de una función si no se sabe la condicional de base para la existencia de esta.

viii. Por otra parte, desde que se explícita el concepto de función en el currículum no se logra visualizar un estudio acabado de esta para que los estudiantes puedan conjeturar sobre la reflexión de una función para hallar su inversa mediante la función identidad, ni mucho menos se conocen sus propiedades como por ejemplo $f \circ f^{-1} = Id$.

Por otra parte, se puede tomar en cuenta el uso de la metáfora de máquinas como una potencial desventaja para la comprensión del concepto de función.

4.2.1.7. Resumen de errores detectados

Al contraste del significado Holístico del concepto de función se detectan falencias, pues el currículum de matemática para los cursos de Octavo Básico, Primero Medio y Segundo Medio, no es posible determinar el paradigma epistemológico en el cual se espera que el estudiante pueda desempeñarse, pues desde un primer contacto con el concepto de función se espera que el estudiante comprenda este objeto matemático a partir de *la función como expresión analítica*, sin embargo, en este nivel no se cuenta con el conocimiento apropiado para manipular expresiones analíticas con estas notaciones sofisticadas.

De otro modo, resultaría útil presentar el concepto de función no solo teniendo cobertura de los diversos registros de representación de este, sino que también los paradigmas epistemológicos para que el estudiante pueda aumentar la rigurosidad matemática que es necesaria para desarrollar competencias que estén a la vanguardia de los requerimientos actuales en diversos contextos.

Por lo tanto, se interpreta como un gran error que el concepto de función sea planteado sin una orientación epistemológica clara que permita comprender el concepto de función en situaciones de contexto cotidiano que le permita al estudiante modelar en base de la cultura actual y las competencias que son altamente demandantes en la sociedad actual.

4.2.2. Textos del estudiante

El análisis en el texto del estudiante se torna con un grado de complejidad mayor, pues estos textos se otorgan a los estudiantes cada año donde varía la editorial que cada establecimiento acoja, no así el currículum nacional, el cual tiene mayor periodo de vigencia. Por tanto, este suele tener mejora, configurándose con mayor precisión en cada entrega. Como consecuencia de lo estudiado en el currículum, el formato de este análisis se realizará con referencia de tres textos de estudio para el estudiante, donde cada uno de ellos es representativo para cada nivel a estudiar, es decir, un texto de octavo básico, un texto para primero medio y un texto para segundo medio. Este análisis está fundado bajo el cuidado de detectar las atribuciones que asigna el texto del estudiante al concepto de función, no así su didáctica, metodologías o ejercitación de lo aprendido de esta, vale decir, todo aquello que se relacione a la definición y caracterización propia al concepto de función..

4.2.2.1. Octavo Básico

Para este nivel estudiamos Texto del estudiante Matemática 8° Básico (Catalán Navarrete, Pérez Ureta, Prieto Córdoba, & Rupin Gutiérrez, 2015, págs. 150-191). La circulación de este texto se en el plano escolar inicia desde el año 2016 y con evidencia de hasta el periodo escolar del año 2019, por lo que este libro estuvo en aulas de octavo básico por 4 años seguidos. Cabe destacar que este texto es un complemento en la enseñanza-aprendizaje de los estudiantes propuesto por el Ministerio de Educación, por lo tanto, se halla la totalidad de los contenidos que el currículum contempla como necesarios en el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

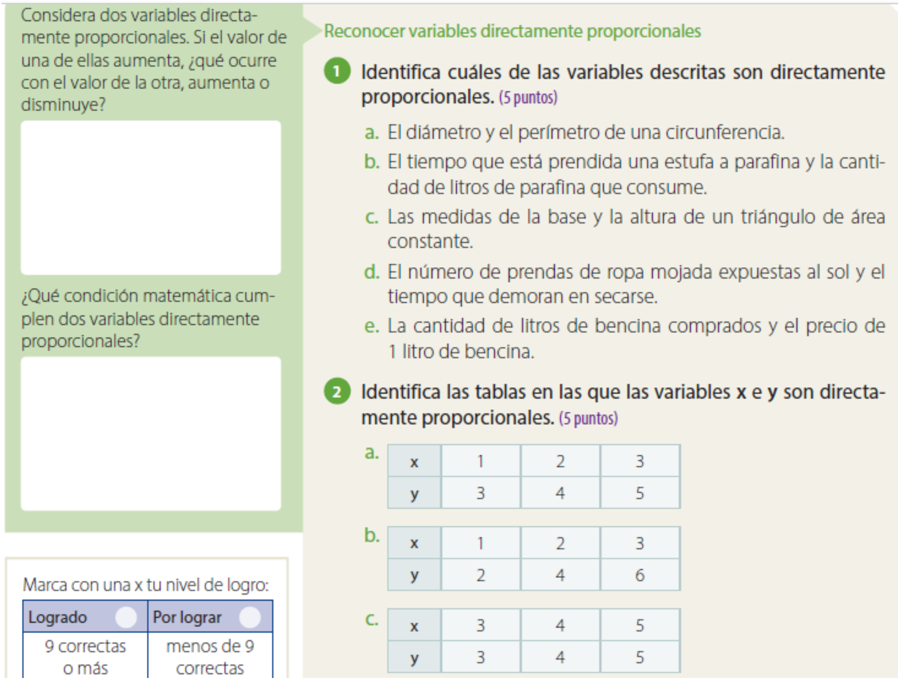
Cabe destacar que este análisis no estudia las metodología de enseñanza, ni mucho menos la didáctica de fondo en la aprendizaje del concepto, sino que caracterizar la definición del concepto de función y a partir de este evidenciar errores, es decir, detectar si el concepto de función que trata el texto es adecuado conforme lo más fidedigno posible con esta herramienta matemática.

El acercamiento del concepto de función en el texto escolar se realiza en la unidad 2, sección 6. Para realizar un análisis preliminar de lo que trata el texto acerca del concepto de función es dar una mirada a lo que refiere el índice de éste mismo, donde proporciona los tópicos a estudiar, con lo cual inserta al estudiante en un escenario donde afianza sus conocimientos a partir del orden en que se enseña (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

Figura 11. Índice Texto de Octavo Básico

En una lectura inicial se detecta inmediatamente que el paradigma de *la función como correspondencia* y/o *la función como relación entre magnitudes,* esta categorización surge de la importancia que se le asigna proporcionalidad directa como precursor de la función lineal y en general de esta sección. De este modo el estudiante asume el concepto de función desde la aritmética y no como una herramienta algebraica. Y para cerrar la lectura e interpretación de este punteo de temas a estudiar en el texto finaliza con modelar situaciones con funciones lineales y afín. Para validar estas afirmaciones es necesario corroborar lo que se asigna explícitamente en las páginas que el texto ha dedicado al estudio de funciones.

La sección 6 del texto inicia con una premisa de "Activo conceptos previos", estos conceptos previos se refiere en la categorización de variables, activando esto con ejercicios donde el estudiante debe categorizar si una variable es dependiente o independiente, y con el recordar fuertemente lo que es la proporcionalidad directa, contenido que es enseñado en el nivel anterior (ver Figura *12*. Ejercicios de activación de conceptos previos. Por lo que reafirma nuevamente, que *la función como relación entre magnitudes.*


Considera dos variables directamente proporcionales. Si el valor de una de ellas aumenta, ¿qué ocurre con el valor de la otra, aumenta o disminuye?

¿Qué condición matemática cumplen dos variables directamente proporcionales?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
9 correctas o más	menos de 9 correctas

Reconocer variables directamente proporcionales

1 **Identifica cuáles de las variables descritas son directamente proporcionales.** (5 puntos)

a. El diámetro y el perímetro de una circunferencia.
b. El tiempo que está prendida una estufa a parafina y la cantidad de litros de parafina que consume.
c. Las medidas de la base y la altura de un triángulo de área constante.
d. El número de prendas de ropa mojada expuestas al sol y el tiempo que demoran en secarse.
e. La cantidad de litros de bencina comprados y el precio de 1 litro de bencina.

2 **Identifica las tablas en las que las variables x e y son directamente proporcionales.** (5 puntos)

a.

x	1	2	3
y	3	4	5

b.

x	1	2	3
y	2	4	6

c.

x	3	4	5
y	3	4	5

Figura 12. Ejercicios de activación de conceptos previos

El texto continúa conforme a su estructura denominadas lecciones, donde la lección 23 continúa con el énfasis en la proporcionalidad directa como precursor de la función lineal, de esto da cuenta la Figura 13. Lección 26.

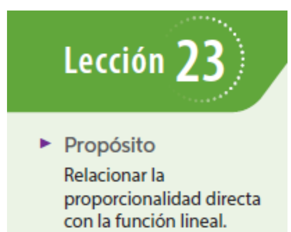


Figura 13. Lección 26

Para evidenciar que la lectura de la predominancia del concepto de función se halla la definición de función lineal (Figura 14. Definición de Función Lineal, donde predomina lo aritmético y algorítmico que se clasifica el concepto de función en este texto escolar.

Para concluir

Dos variables tienen una relación de **proporcionalidad directa** cuando el cociente entre cada par de sus valores es constante. A esta constante se le llama constante de proporcionalidad. Esta relación puede ser descrita por la ecuación

$$y = mx$$

donde **x** e **y** representan las variables relacionadas y el valor **m** es la constante de proporcionalidad.

A una relación que se puede escribir de esta forma se le llama función lineal, que puede ser escrita como:

$$f(x) = y = mx$$

Figura 14. Definición de Función Lineal

Continuando con en la misma sección el lector se encuentra con la formalización de la representación algebraica de ésta, esto sin haber expuesto lo que es el concepto de función de manera completa, esto dado el punto de vista actual que tiene el concepto de función en la matemática. No obstante, integra definiciones claves en el estudio de funciones como es el término de Dominio de una función (Figura 15. Mención de Dominio de una función, sin tener un estudio formal de teoría de conjuntos.

Ampliando

Para una función f(a), se define su dominio como el conjunto de todos los valores que puede asumir la variable independiente **a**. Y se define su recorrido como el conjunto de todos los valores que puede adquirir la función f(a).

Figura 15. Mención de Dominio de una función

En conformidad con la asignación que tiene la función lineal respecto al rigor matemático que se logra interpretar, ésta tributando una aparición en la matemática como una nueva denominación a lo que el estudiante conoce como proporcionalidad directa es que surge de manera semejante la función afín, que luego de un tratamiento de una actividad guiada por el docente, se expone el siguiente esquema:

Para concluir

Una **función afín** puede definirse como una función lineal trasladada en el plano cartesiano a lo largo del eje Y. La ecuación que la modela es de la forma

$$f(x) = y = mx + n$$

Al coeficiente m se le llama pendiente de la recta y a n se le llama coeficiente de posición.

Figura 16. Definición Función Afín

La explicación de una definición matemática no debiese constituir una definición formal en la conclusión del proceso de aprendizaje y construcción de la función afín, pues no de acuerdo con lo que menciona incurre a un error que limita al estudiante a entender que el trasladar la función lineal a lo largo del eje Y conforma a la función afín, no mencionando que también esta puede ser trasladad en el eje X o conforme a algún otro vector que posicione la función lineal como una nueva función afín.

El final de la sección de este libro termina con aplicaciones de función lineal y función, esperando que se trate de modelaciones con estas funciones, pues solo presentan de manera algorítmica esta habilidad y competencia fundamental en la matemática que es alcanzable con el conocimiento adecuado del concepto de función. Solo para corroborar esta afirmación se evidencia en el siguiente procedimiento sugerido al estudiante al momento de desarrollar un ejercicio de aplicación de estas funciones. También incurre a utilizar herramientas para la construcción de la ecuación de la recta, sin tener fundamentos ni nociones previas de lo que es la ecuación de la recta.

Para concluir

La **función afín**, al igual que la función lineal, es una **herramienta útil para modelar muchas situaciones** de nuestro entorno. Para hacer este modelamiento se debe determinar la expresión que define la función afín adecuada a partir del valor de la pendiente y del coeficiente de posición de la recta que la representa en el plano cartesiano.

Figura 17. Modelación

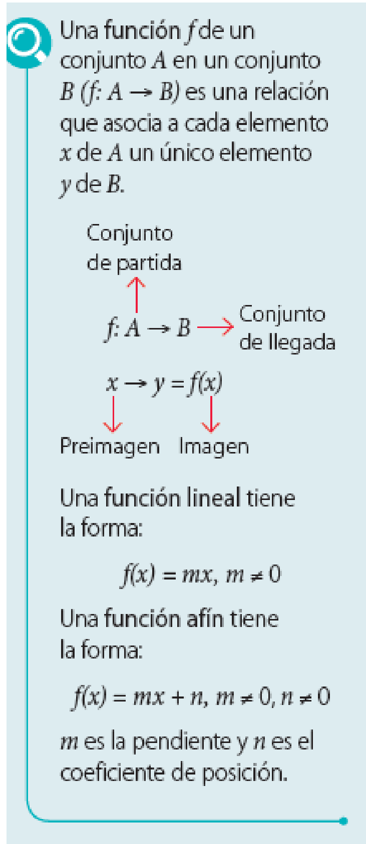
4.2.2.2. Primero Medio

El texto del estudiante Matemática Primero Medio (Equipo Editorial Santillana, 2017, págs. 122-133). La circulación de este libro es desde el año 2018 en las aulas de nuestro país a la actualidad. Al igual que el análisis realizado con el texto de octavo básico se realizó conforme a lo explicitado respecto a definiciones del concepto de función y no su didáctica o metodologías de enseñanza.

En conformidad de lo entregado por el currículum de Matemática para primero medio, que éste señala que el estudiante debe conocer una función del tipo $f(x, y) = ax + by$ categorizándola como una función lineal. Este texto hace el alcance desde el índice que dicha expresión es una relación entre dos variables que conforman una relación lineal. Por tanto, en este texto introduce un concepto matemático que según lo estudiado en los programas de octavo básico a segundo medio no hace mención de este (ver Figura 18. Índice texto de Primero Medio.

Figura 18. Índice texto de Primero Medio

En el inicio de este tema se plantea un problema a estudiar respecto de formaciones geológicas, donde el estudiante debe relacionar lo aprendido en el nivel anterior, en donde hace mención de la definición del concepto de función, esto adecuado al paradigma de *la función a partir de la Teoría de conjuntos.* Esto interpretado de que es pertinente definir formalmente el concepto de función conforme al paradigma contemporáneo que rigen a esta herramienta. Se expone un alto grado de notación simbólica atribuida al paradigma de *la función como expresión analítica*, insertando la notación $f: A \longrightarrow B$ que es propia del álgebra moderna. Saca desde su concepción el término de variable por imagen y preimagen de la función, esto asociados a un conjunto de llegada y conjunto de partida. Esto al estudiante que inicio su estudio de funciones con el texto analizado en octavo básico hace un quiebre importante, pues pasa de un paradigma a otro con gran prisa. A continuación se presenta el esquema (ver Figura 19) donde se sintetiza la más relevante del concepto de función y de lo que debió haber aprendido el lector de los textos otorgados por el Ministerio de Educación de Chile.



Una **función** f de un conjunto A en un conjunto B (f: $A \rightarrow B$) es una relación que asocia a cada elemento x de A un único elemento y de B.

Conjunto de partida

$f: A \rightarrow B$ Conjunto de llegada

$x \rightarrow y = f(x)$

Preimagen Imagen

Una **función lineal** tiene la forma:

$$f(x) = mx,\ m \neq 0$$

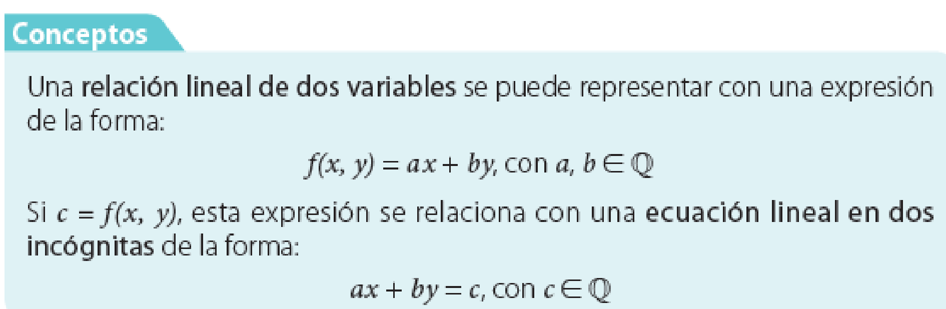
Una **función afín** tiene la forma:

$$f(x) = mx + n,\ m \neq 0,\ n \neq 0$$

m es la pendiente y n es el coeficiente de posición.

Figura 19. Esquema que define el concepto de función

La definición de esta variable a estudiar, pareciera que está desconectada con el concepto de función, pues el lector, en este caso el estudiante, desconoce el significado matemático de una relación. Por lo que resulta conveniente no asignar a este tipo de relación la categoría de función. Por otra parte, resulta interesante y la vez asertivo el asignar la pertenencia de las constantes a un conjunto determinado (ver Figura 20).



Conceptos

Una **relación lineal de dos variables** se puede representar con una expresión de la forma:

$$f(x, y) = ax + by, \text{ con } a, b \in \mathbb{Q}$$

Si $c = f(x, y)$, esta expresión se relaciona con una **ecuación lineal en dos incógnitas** de la forma:

$$ax + by = c, \text{ con } c \in \mathbb{Q}$$

Figura 20. Relación de dos variables

A pesar de tener la denominación de relación de dos variables se asignan con notaciones características al ámbito de las funciones. Se interpreta esta denominación de relación pues la función de dos variables está dada por $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, y hasta el momento al estudiante no se le han enseñado el producto cartesiano ni menos el representar este tipo de funciones dentro de un espacio, limitándose a la representación gráfica dentro del plano cartesiano (ver Figura 21).

Conceptos

Una **relación lineal de dos variables** de la forma $f(x, y) = ax + by$, con $a, b \in \mathbb{Q}$ y $f(x, y) = c$, con $c \in \mathbb{Q}$ se puede graficar con una recta en el plano cartesiano.

Figura 21. Representación gráfica de una relación de dos variables

De acuerdo con Parra (2015) propone en su tesis definir las pretensiones del currículum de matemática respecto al concepto de función es que pone énfasis en la dupla texto y programas, esta mención es dado que en la presentación curricular de matemática para primero medio se infiere que la orientación está pretendida para que el estudiante estudie las familias de rectas, esta afirmación e interpretación del currículum se valida con la siguiente representación que adopta el éste texto.

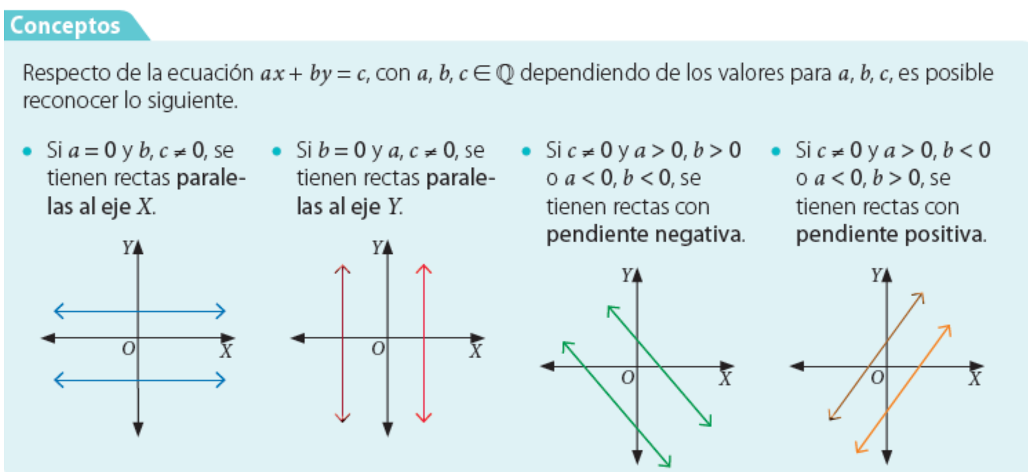


Figura 22. Representaciones en el plano cartesiano de relaciones de dos variables

Con una lectura a simple vista es evidente que el texto tuvo la precaución de no incurrir en el término de función, pues el segundo gráfico (de izquierda a derecha) no representa lo que es en esencia una función, pues se evidencia que para todo valor de x le corresponde el mismo valor de y.

4.2.2.3. Segundo Medio

Se tiene en posesión el texto del estudiante Segundo Medio (Equipo Editorial SM, 2017, págs. 122-125), éste texto tiene circulación en el aula desde el año 2018 a la fecha en nuestro país. Es importante volver a destacar que solo se realizará un análisis y recopilación de aquellos datos relevantes en la detección de errores conceptuales del concepto de función, para posteriormente contrastarlos a la definición construida de este mismo.

Lo que señala el índice pareciera ser extenso, no obstante lo que compete para esta investigación está bajo el resguardo de seleccionar aquello que es relevante. Pues conforme al programa de Matemática propuesto por el Ministerio de Educación para este nivel está en dos temas importantes, que es el de ecuación cuadrática y el de función inversa.

Figura 23. Índice texto de Segundo Medio

Respecto al estudio de la función cuadrática se centra en el estudio de la parábola en general, más que de la función cuadrática, asignándole protagonismo al término parábola que a función cuadrática al momento de realizar modelación de ésta. Esta es presentada de forma algebraica, mostrando su fórmula general y lo demás es conocer las características propias de la parábola que se puede describir con esta expresión analítica, dado que se estudia su orientación, eje de simetría, vértice, intersección con el eje Y e intersecciones con el eje X. Donde suele relacionarse con lo estudiado en ecuación cuadrática. Esto es posible corroborar en el momento cuando se formaliza la función cuadrática, dejando de lado su carácter funcional y tributando a su representación gráfica en el plano cartesiano.

- Se dice que una función es **cuadrática** cuando se puede escribir de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$
  Se puede distinguir el término cuadrático ax^2, el término lineal bx y el término independiente c.
- La gráfica en el plano cartesiano de una función cuadrática es una **parábola**, curva simétrica que se observa en la figura. Una parábola se dice cóncava hacia arriba si la curva se abre hacia arriba y cóncava hacia abajo si se abre hacia abajo.
- Toda parábola posee un punto máximo o mínimo llamado **vértice**, por donde pasa el eje de simetría de la parábola. Este punto será máximo cuando la parábola es cóncava hacia abajo y mínimo cuando es cóncava hacia arriba.

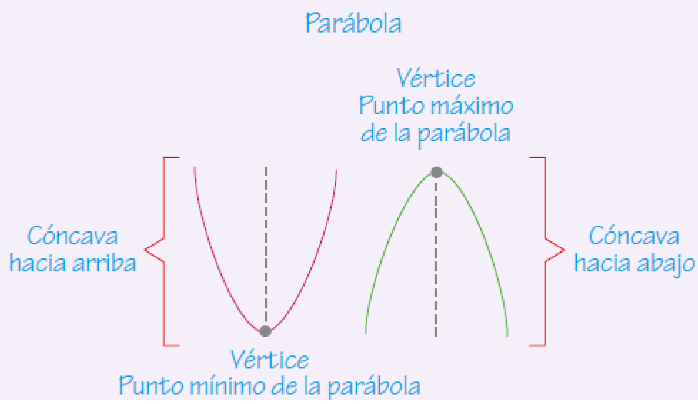


Figura 24. Forma general de la función cuadrática y parábola

- Ubicando los **principales puntos** de la gráfica, que luego se unen a mano alzada.

Intersección con el eje Y: se ubica en el punto $(0, c)$, donde c corresponde al término independiente de la función.

Intersección con el eje X: se ubican en los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, donde x_1 y x_2 son soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.
Existen dos, uno o ningún punto de intersección, dependiendo de las soluciones en los números reales de la ecuación.

Vértice de la parábola: es el punto máximo o mínimo de la parábola. Sus coordenadas están dadas por $\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{a}\right)$.

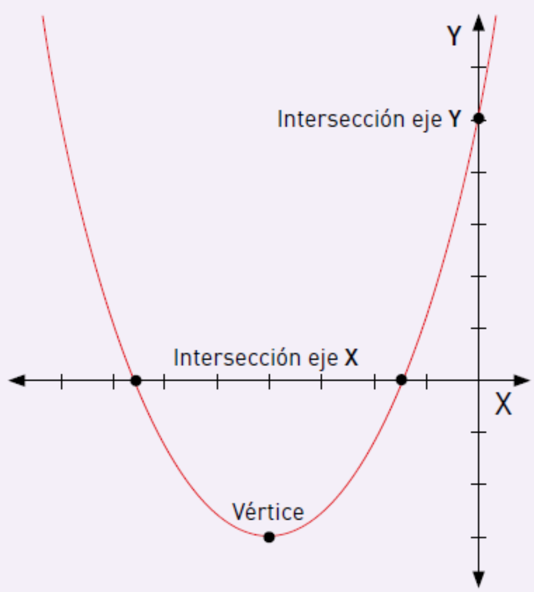
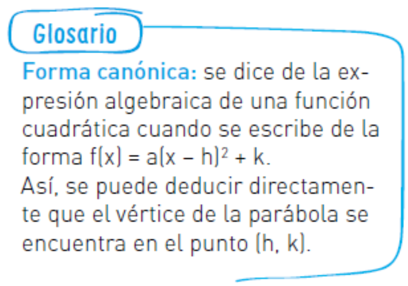


Figura 25. Puntos principales de la parábola a partir de la forma general

Por tanto, el uso de la función cuadrática en el texto escolar, en específico su forma general, es como herramienta que describe una parábola en el plano cartesiano, donde esposible identificar y definir puntos principales de esta. En otras palabras, el enfoque geométrico es notorio en esta sección. Una observación importante es evidenciar que la expresión para hallar el vértice de esta parábola está fundamentada en lo que se conoce como derivada de la función cuadrática, esto como contenido en textos y cursos de análisis. En otro sentido, se otorga al estudiante otro mecanismo algorítmico donde puede determinar el vértice mediante completación de cuadrados de binomio, como se evidencia en Figura 26, donde se determina hallar la forma canónica.


Glosario

Forma canónica: se dice de la expresión algebraica de una función cuadrática cuando se escribe de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.
Así, se puede deducir directamente que el vértice de la parábola se encuentra en el punto (h, k).

Figura 26. Forma canónica de una función cuadrática

Por otra parte, la exposición de la función inversa en el texto se describe sin realizar formalizaciones del algebra de funciones, como por ejemplo que la función inversa a una función dada existe si y solo si esta es biyectiva. Por tanto, el estudio de la función inversa viene dado por procesos algorítmicos donde los estudiantes deben sustentarse en la metáfora de la función como una máquina. Es decir, la función inversa se entiende como el proceso inverso de lo que se realiza desde un punto de partida a un punto de llegada (o producto final), o más bien, como el antónimo de una acción realizada mediante máquinas en concreto (ver Figura 27). Esto debe ser por el bajo contenido del rigor matemático tributando a la representación algorítmica del concepto de función.

Esto puede inferirse a que las funciones tratadas hasta este curso han sido funciones biyectivas las cuales si es posible determinar su función inversa, no obstante, en este mismo curso se estudia función cuadrática y esta no es una función biyectiva, por lo tanto no posee inversa, en cambio, si se define la función cuadrática cuyo dominio sea los reales positivos, entonces esta si poseerá inversa (ver Figura 28).

Máquina	Función	Función inversa
Automóvil	Avanza 15 km	
Escáner		Aumenta al doble
Aire acondicionado	Baja la temperatura en 15 °C	
Cajero automático	Realiza un giro de $ 50 000	
Ascensor		Baja la cabina por 12 m

Figura 27. Metáfora de la máquina para funciones

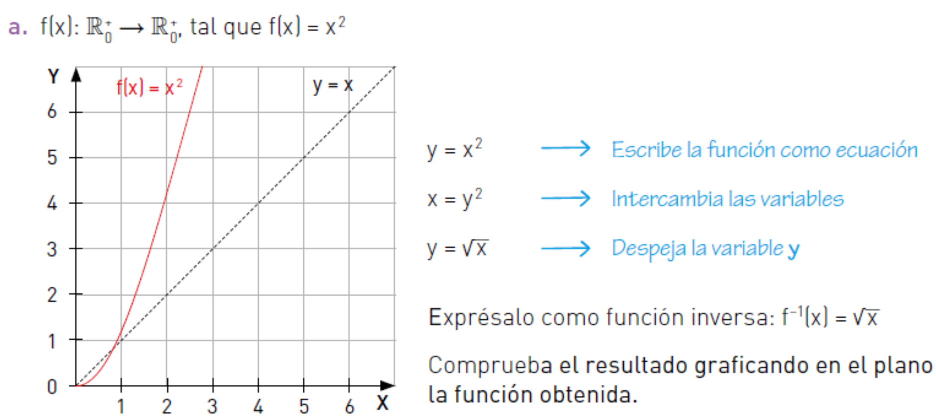


Figura 28. Inversa a una función cuadrática

Por tanto, no existe una definición que formalice el rigor matemático de fondo del estudio de funciones y el tipo de función que esta sea para verificar si efectivamente corresponde a una función inversa o no. En este mismo sentido de utilizar teoremas esenciales en el álgebra de funciones se utilizan como aplicaciones sin fundamentación algebraica la función identidad, como herramienta auxiliar la función identidad para hallar la función inversa (ver Figura 29), esto es de:

$$f \circ f^{-1} = id_B \text{ y } f^{-1} \circ f = id_A$$

Donde B es el conjunto de llegada y A el conjunto de partida, sin embargo, como en este curso el conjunto numérico en que se aplican las funciones está de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, por lo tanto se utiliza la representación gráfica de la función identidad y este como reflexión de la función.

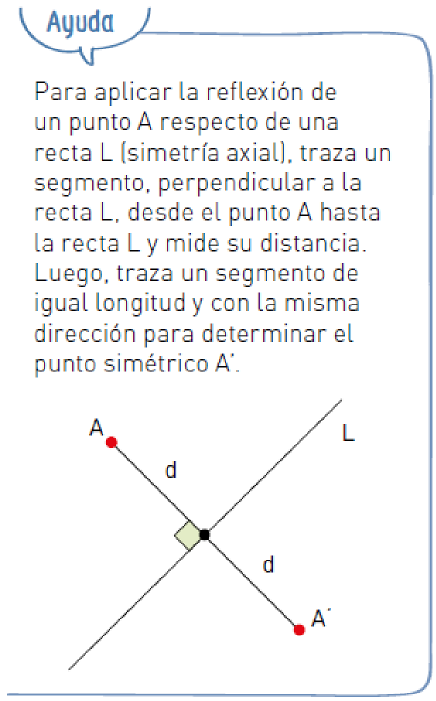


Figura 29. Función identidad como herramienta para hallar la inversa a una función dada

4.2.2.4. Significado del concepto de función en los textos del estudiante

En primer lugar, de acuerdo con los fundamentos de la enseñanza-aprendizaje de funciones se evidencia lo siguiente:

Tabla 10. Registros Representativos detectados en los textos del estudiante

Registros de representación	**8° Básico**	**1° Medio**	**2° Medio**
Verbal	●	●	●
Tabular	●	●	●
Gráfico	●	●	●
Algebraico	●	●	●
Algorítmico	●	●	●

Conforme lo que determina Rico (2000), que el estudiante tiene comprensión del concepto de función siempre y cuando este sea capaz de traducir de un registro a otro, por lo tanto, no es evidente detectar esta traducción de los textos estudiados; sino que es evidente que los textos escolares integran todos y cada uno de los registros.

A diferencia del significado implícito del concepto de función detectado en el currículum nacional, en los textos de estudios se evidencian de manera explícita, pues en este se definen en algunos casos formalmente. Es evidente que la rama predominante en la enseñanza de función está repartida entre tres, Aritmética, Geometría y Algebraica, de momentos existen unos matices de Análisis, donde se estudia el comportamiento de la función en base de los parámetros de la expresión algebraica en el caso de la función cuadrática (ver Tabla 11). No obstante, en todas las ramas de la matemática se halla predominantemente el registro algorítmico, esto da a interpretar que lo mecánico y procedimental es primordial en los textos de estudios.

Hasta el momento se tiene la construcción en el ámbito educación con las ramas de las matemáticas que se busca potenciar el concepto de función a nivel escolar con los tres textos estudiado. Por tanto, es necesario realizar la construcción del concepto de función con los antecedentes que se tiene versus las concepciones epistemológicas que se tienen del concepto de función, para así poder definir concretamente el significado de función que los textos escolares otorga a esta herramienta matemática.

A continuación se estudiarán las orientaciones epistemológicas ligadas frente a cada nivel de los textos estudiados de modo que el análisis sea construido con mayor rigor posible.

Octavo Básico

Con lo analizado se evidencia casi textualmente de que la construcción de la función en el texto de octavo básico inicia desde la concepción de *la función como correspondencia* y fuertemente *la función como relación entre magnitudes*, pues se le otorga valor predominante al uso auxiliar de la proporcionalidad directa como precursor del surgimiento de la función lineal, por ende no está cercano a las orientaciones contemporáneas de lo que se conoce como función en la comunidad matemática actual. Sin embargo, se hacen intentos de entregar herramientas de linealidad (representada por: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)\ y\ f(\alpha x) = \alpha f(x)$) que en el rigor matemático está asociado a espacios vectoriales; esto potencialmente le puede ayudar al estudiante, sin embargo con las herramientas que tiene el estudiante hasta el curso mencionado pareciera no tener sentido.

Tabla 11. Ramas de la matemática en los registros de representaciones pretendidos por los textos del estudiante

	8° Básico					**1° Medio**					**2° Medio**				
	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico
Aritmética	●	●			●		●			●	●	●			●
Álgebra				●	●				●	●			●	●	●
Geometría			●		●	●		●	●	●	●		●	●	●
Análisis					●					●				●	●
Probabilidad y Estadística															

Primero Medio

En este nivel el texto escolar enfrenta una transición entre lo conceptualizado de la función lineal en octavo básico fundamentado en la proporcionalidad directa, sin embargo, en el texto de primero medio realiza un salto mayor introduciendo el término de relaciones, dando un sentido mayor predominancia al ámbito algebraico, por lo que se espera que el enfoque epistemológico sea de *la función expresión analítica* o bien *la función a partir de la Teoría de conjuntos*.

Al continuar con la lectura del libro se pierde nuevamente esta riqueza que puedo haber ofrecido el potenciar el término de relación lineal. Se aprecian los alcances en definiciones no explicitadas, sino que en los bordes del texto se define formalmente la función lineal, menciona el dominio y recorrido de la función, se define el conjunto que relaciona la función estudiada en este nivel. Por lo tanto, se hace esfuerzo de afianzar conceptos nacidos luego de *la función a partir de la Teoría de conjuntos.*

Por otra parte, el énfasis no en el enfoque de *la función a partir de la Teoría de Conjuntos,* sino que se encuentra enmarcada y categorizada dentro de la función inserto en la geometría analítica, por tanto, sus enfoque principal es *la función como representación gráfica*, y en segundo lugar *la función como expresión analítica.*

Segundo Medio

Conforme los lineamientos que dejaba el texto de primero medio, el texto de segundo medio vuelven a los enfoques de *la función como correspondencia* y *la función como relación entre magnitudes.* Pues la tabulación y representación metódica de lo que refiere el análisis de funciones cuadráticas y la determinación de funciones inversas a funciones, en este caso se estudian las funciones inversas a la lineal y cuadrática, no se realizan menciones ni a la logarítmica, racional o raíz.

La poca profundización de contenidos propios del concepto de función que nacen con el enfoque de *la función a partir de la Teoría de Conjunto,* no especifica métodos de para fundamentar ni mucho menos argumentar la existencia de la función inversa. Por lo tanto, los paradigmas que se detectan en el texto del estudiante para segundo medio se hallan fundados en *la función como correspondencia, la función como expresión analítica y la función como representación gráfica.*

Significado del concepto de función en los textos del estudiante

Sin duda, el texto correspondiente para primero medio muestra algunos matices importantes en *la función como a partir de la Teoría de Conjuntos*, sin embargo no concretan adecuadamente en el texto del estudiante de su siguiente nivel.

Por otra parte, el significado predominante es el de *la función como correspondencia* pues se centra en los procedimientos algorítmicos que permiten el llenado de tablas, asociándolos a pares ordenados dentro del plano cartesiano. De igual modo *la función la función como expresión analítica*, dado que el identificar los coeficientes numéricos da nociones de la gráfica de la curva representada por la expresión que le corresponde. Y por último, *la función como representación gráfica* toma el espacio suficiente para que el estudiante asocie a la función lineal una recta y la función cuadrática una parábola.

No se identifica en ningún texto el enfoque de *la función como correspondencia arbitraria,* por lo que sutilmente somete al estudiante al estudio de la función lineal y la función cuadrática como candidatos representativos del concepto de función.

Por lo tanto, el significado pretendido por los textos del estudiante para los cursos de octavo básico, primero medio y segundo medio corresponde a enfoques holísticos de la *la función como correspondencia, la función como relación entre magnitudes, la función como como representación gráfica y la función como expresión analítica*; sin dejar de mencionar que el enfoque de *la función a partir de la Teoría de Conjuntos* se ve pretendido en el texto, con la salvedad que se trabaja bajo la premisa de relaciones lineales y no de funciones; por tanto, se considera solo como un matiz dentro de la definición pretendida por los textos de estudios.

Cabe señalar, que los equipos editoriales no son los mismos de cada textos al igual que los editores, por tanto es posible la el significado pretendido no sea intencionado por parte de las editoriales, sino que como como consecuencias de los textos y editoriales que acepta el ministerio de educación. Por ende, puede que las pretensiones de los significados que los textos para el estudiante no sean las que espera los equipos editoriales que las construyen.

Finalmente, conforme con la tabla que asigna la definición dinámica del concepto de función, pensando que este no es propio de la de un enfoque epistemológico, sino que la cohesión y articulación de estos permiten vislumbrar un mejor significado (ver .

Tabla 12. Significado implícito del concepto de función otorgado por los textos del estudiante

	Aritmética					Álgebra					Geometría					Análisis					Probabilidad y Estadística				
	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico	Verbal	Tabular	Gráfico	Algebraico	Algorítmico
La función como correspondencia	●	●			●		●						●		●				●						
La función como relación entre magnitudes	●				●						●		●		●										
La función como representación gráfica					●			●		●															
La función como expresión analítica									●	●				●					●	●					
La función como correspondencia arbitraria																									
La función a partir de la teoría de conjuntos									●	●															

[11]

[11] El orden de mayor a menor predominancia en los textos se da de la siguiente forma: *la función como correspondencia, la función como relación entre magnitudes, la función como expresión analítica, la función como representación gráfica y la función a partir de la Teoría de Conjuntos.*

Conforme a lo consignado en la tabla 12 se determina la definición implícita del concepto de función bajo el paradigma de *la función como correspondencia*, bajo el registro algorítmico y con notoriedad en el Álgebra, se determina lo pretendido por los textos escolares bajo la enseñanza-aprendizaje del concepto de función; se dice enseñanza-aprendizaje, pues el texto es complementario a la labor docente en aula.

4.2.2.5. Errores detectados en el texto del estudiante

i. No existe definición formal del concepto de función.
ii. No hay inducción respecto a lo que es la ecuación de la recta como herramienta auxiliar en la construcción y modelación de la función lineal.
iii. Uso del término "Relación lineal de dos variables" con notaciones característica de funciones.
iv. Presentar una gráfica de rectas paralelas al eje Y como parte de la ecuación "$ax + by = c$".
v. Función inversa expresada como la operación inversa que realiza una máquina.
vi. Omisión de la biyectividad como condición necesario de la existencia de la función inversa a una función dada.

4.2.2.6. Análisis de los errores detectados

i. Al igual que en la detección de errores del currículum nacional no se evidencia la formalización matemática del teoría de conjuntos y no se define el conjunto donde está su dominio y su recorrido. En ese mismo sentido, no se determinan las condiciones necesarias e intrínsecas que definen a una función como tal.
ii. Conforme las bases curriculares no hay Objetivos de Aprendizaje que definan dentro de la geometría analítica la ecuación de la recta, por tanto, el texto se ve en la obligación de tomar herramientas de la geometría analítica para por der construir la función lineal, indicando que la función lineal posee pendiente, por ende, no existe argumentación teórica, ni mucho menos activación de conocimientos previos para determinar la expresión analítica de la función lineal.
iii. De acuerdo con las definiciones de la matemática las relaciones son subconjuntos del producto cartesiano de dos conjuntos, y que conforme a las definiciones algebraicas el concepto de función es una relación con condiciones necesarias que debe tener para que se determine como una función. Como consecuencia no existe esta acotación en cuanto

a la terminología matemática que se utiliza en este curso. Por cierto, en este texto es evidente que se utiliza la notación característica de función "f" que en contradicción en su premisa de estudio se clasifica como relación.

iv. Con la utilización de la geometría analítica para determinar la pendiente de la ecuación de la recta, se exponen gráficas donde aparece la expresión analítica asociada a esta recta, donde por lo cierto, no corresponde a una función lineal, pues para cada elemento del dominio de la función le corresponde un único elemento del conjunto de llegada.

v. La metáfora de la máquina es un expresión recurrente al momento de exponer temas asociados a funciones, en el texto de segundo medio se ve como el estudiante debe llenar una tabla donde especifica las acciones que realiza una determinada máquina, por ende, el estudiante debe determinar el antónimo a una acción para de este modo introducir a lo que es la función inversa. Lamentablemente la definición de función inversa no está dada a los antónimos, pues estos responden al significado opuesto aproximado de un concepto o acción a un determinado contexto.

vi. El determinar la función inversa con la gráfica de la función identidad hace que el estudiante realice operaciones algorítmicas donde con el uso reiterado de esta técnica él pueda hallar la gráfica a una función determinada, donde posteriormente debe asignarle una expresión analítica. En otras palabras, el texto no presenta los argumentos algebraicos correspondientes de la existencia de la función inversa y solo se limita a presentar la función inversa de forma gráfica principalmente.

4.2.2.7. Resumen de errores detectados

Existen variadas discrepancias en los textos del estudiante, donde se evidencia errores conceptuales, que potencialmente el estudiante que en su transitar por los cursos estudiados se encuentre en su formación con estos textos se hallará sin duda con obstáculos, como por ejemplo el estudiante que en el año 2017 tuvo libro de octavo, hasta que llegado el 2019 con el texto de segundo medio analizado; ahora, solo por mencionar algún obstáculo, es el alto grado de formalización que existe en el texto de primero medio versus a los aportes a función lineal y función afín en el texto de octavo básico.

El uso indiscriminado de herramientas de la geometría analítica con modelaciones que aparentaran ser propias de las funciones. Como consecuencia de lo analizado en el currículum confusiones considerables se producen al asignar el mismo significado a ecuación de la recta y función lineal, o en el caso de función cuadrática con parábola, por ende no hay una cohesión discursiva ni expositiva de lo que realmente es una función.

De este análisis, se determina que a pesar de la existencia de los diversos registros representativos de funciones no garantiza el aprendizaje acabado de funciones, pues se evidencia que la escases en la definición de los elementos propios de los enfoques epistemológicos se incurren a errores. En otras palabras, no se caracterizan las técnicas de traducción de un registro a otro, pese a que estos estén presentes tanto en el currículum como en los textos del estudiante.

4.2.3. Planificaciones de Matemática

En este apartado se analizaran dos planificaciones creadas por profesores al momento de enseñar el concepto de función en el aula. Se entiende que los análisis de estos documentos no serán analizados minuciosamente como fue en el currículum y en los textos del estudiante. De modo que el análisis no podrá evidenciarse el significado pretendido por el profesor respecto a definir esta herramienta matemática, pues una sola clase no es muestra suficiente para inferir en el significado que el creador de la planificación le otorga al concepto de función; pero si se realizará la detección de los errores evidenciados conforme a lo explícito que demuestren.

4.2.3.1. Planificación 1

En esta planificación (ver anexo 1) hallada se hace un estudio preliminar de la clase a desarrollar, asignando los siguientes detalles:

Clase de productos notables- Primero Medio
OA3: Desarrollar los productos notables de manera concreta pictórica y simbólica: ➢ Transformando productos en sumas y viceversa. ➢ Aplicándolos a situaciones concretas ➢ Completando el cuadrado de binomio ➢ Utilizándolos en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas
Objetivo de la clase Encontrar un modelo para resolver productos de dos binomios con un término igual.
OAh: Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.
OAA: Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria de la sociedad en general o propios de otras asignaturas.

Esta es una sección planificación de una clase de productos notables, donde la persona que construye esta clase detecta los Objetivos de Aprendizaje (AO3), las habilidad (OAh) y las actitudes (OAA) del currículum, donde el docente debe seleccionar aquellos que sean pertinentes y que cohesionen adecuadamente con la clase.

En esta sección se evidencia que el docente para realizar una clase de productos notables toma como habilidad matemática el modelar, la cual está dada por "Usar modelos, utilizando lenguaje funcional…" en donde los productos notables, conforme a lo que el currículum de matemática establece no debe de trabajarse como expresiones bajo lenguaje funcional y tampoco los productos notables no responden a un proceso bajo los parámetros de una función; teniendo en cuenta que los productos notables responden a la distributividad, esto es válido para los conjuntos que hasta este nivel los alumnos han estudiado.

Finalmente, se evidencia el error de caracterizar los productos notables bajo un rotulo de lenguaje funcional. Que en otras palabras una relación de expresiones algebraicas equivalentes es imposible determinarlas bajo los fundamentos de una función.

4.2.3.2. Planificación 2

La planificación 4 (ver anexo 2, semana 15) presenta la planificación para octavo básico, asociado al **OA7**, teniendo como objetivo de la clase la siguiente expresión "*Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente ("constante de proporcionalidad"). Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa.*"

Con la afirmación expuesta como objetivo de clase, se distingue claramente la influencia curricular de determinar la función lineal bajo la proporcionalidad. Sin embargo, en esta clase determina como objetivo que los estudiantes deben descubrir el concepto de función mediante la proporcionalidad directa.

Por tanto, no existe una coherencia entre la definición de función respecto a la proporcionalidad directa, que si bien se puede asociar a la función lineal, pero no garantiza la apropiación del concepto de función. Por tanto, el error es declarar que la noción de función se puede descubrir con las propiedades de proporcionalidad directa.

4.2.3.3. Errores detectados en las planificaciones

i. Relacionar el lenguaje funcional a la identificación de patrones que se interpretan de los productos notables.
ii. Descubrir la noción de función mediante la proporcionalidad directa.

4.2.3.4. Análisis de los errores

Estos errores cometidos en las planificaciones se pueden interpretar como consecuencias en las sugerencias de los programas del ministerio de educación, pues es allí donde se establece que, por ejemplo, la función lineal se construya a partir de la proporcionalidad directa, este hecho en lo empírico es coincidente de que el estudiante puede obtener una función lineal a partir de nociones de proporcionalidad directa, sin embargo, jamás podrá asociar con esta lógica funciones cuadráticas, pues la proporcionalidad lleva como lema emblema "si una variable crece entonces la otra variable también crece".

Por otra parte, el error de asignar lenguaje funcional a lo que se etiqueta como productos notables, que en el rigor es la distributividad de la multiplicación respecto a la suma. Por lo tanto, un análisis de este error está en mal interpretar usos algebraicos con aplicaciones funcionales que permiten la modelación.

4.3. Recopilación de errores detectados

A continuación se presenta la tabla que muestra los errores detectados en el currículum Nacional, en los textos del estudiante y en planificaciones de matemática.

Tabla 13. Errores detectados

Currículum Nacional	i. Falta la formalización conceptual de la noción de función. ii. Representación gráfica mediante un diagrama de Venn. iii. No discriminación entre lo que es una ecuación y una función. iv. Alto grado de abstracción presentados y expresiones analíticas de elevada complejidad en la notación expuesta en los indicadores de evaluación v. Se plantean que la función lineal puede ser representada por dos variables. vi. Se manifiesta la ecuación de la recta como función lineal de manera deliberada. vii. No definir las condiciones para la existencia de la inversa de una función.

	viii.	Usar la reflexión de la función identidad para determinar los puntos de la función inversa, sin conocer la función identidad.
Textos del estudiante	i.	No existe definición formal del concepto de función.
	ii.	No hay inducción respecto a lo que es la ecuación de la recta como herramienta auxiliar en la construcción y modelación de la función lineal.
	iii.	Uso del término “Relación lineal de dos variables” con notaciones característica de funciones.
	iv.	Presentar una gráfica de rectas paralelas al eje Y como parte de la ecuación “$ax + by = c$”.
	v.	Función inversa expresada como la operación inversa que realiza una máquina.
	vi.	Omisión de la biyectividad como condición necesario de la existencia de la función inversa a una función dada.
Planificaciones de matemática	i.	Relacionar el lenguaje funcional a la identificación de patrones que se interpretan de los productos notables.
	ii.	Descubrir la noción de función mediante la proporcionalidad directa.

Entre lo recurrente se halla que la formalización del concepto de función no es la adecuada conforme a significado matemático, holístico y educativo del concepto de función. No obstante, conforme a los fundamentos de aprendizaje del concepto de función se detectan que en cada uno de las muestras de estudio se detectan los diferentes registros representativos del concepto de función.

El no discriminar entre lo que es una función versus a una ecuación de la recta o productos notables en el caso de una planificación; vale decir, erróneamente se espera que todo lo algebraico sea expresado en lenguaje funcional y esto no es así, pues no todo lo algebraico constituye a una función, como muestra de esto es que la función es un tipo especial de relación sin embargo, no toda relación es función, por ende no todo lo algebraico es una función.

El uso indiscriminado de la construcción de una función mediante herramientas algebraicas y geométricas, otras palabras, no hay explicitación de lo que es únicamente correspondiente a funciones y no de otra rama.

El usar herramientas propias del algebra de funciones (como composición de funciones para una función y su inversa) como herramientas de manipulación técnica en lo algorítmico, como es el ejemplo de las funciones inversas sin saber si su existencia es cierta o no.

5. Conclusiones y Proyección

Conforme a la pregunta de investigación que se propone, dice: *¿Existen errores conceptuales en la enseñanza del concepto de función presente en los documentos asociados a la enseñanza-aprendizaje de estudiantes de educación media?* Y la respuesta es sí, ya que se han detectado los errores presentes en los documentos orientadores en la enseñanza aprendizaje del concepto de función. Es pues, al seguir cada uno de los objetivos de la investigación

o1. Gracias a la comprensión del origen evolutivo del concepto de función, desde los intentos más primitivos a las modelaciones y representaciones de situaciones más avanzadas, se determina en qué contexto histórico se encuentran actualmente el concepto de función.

o2. En el mismo análisis de la comprensión evolutiva del concepto de función se muestran fuertemente las luces del conflicto epistemológico que tenía el concepto de función hasta llegar a su definición formal hasta los matices que es posible utilizar como herramienta interdisciplinaria.

o3. El concepto de función independiente de su epistemológica y evolución histórica presenta un carácter educativo, académico, inserto en la misma matemática como objeto matemático potente para cada una de las ramas de ésta. Por tanto, el sentido formalizado que se conozca depende del ámbito educativo donde esté, pues no es idéntica la definición de función para el Análisis que para el Álgebra. De modo que este carácter se obtiene bajo la construcción de este mismo rubro.

o4. A raíz de conocer el carácter que la educación le asigna al concepto de función y de como las concepciones epistemológicas varían de una a otra es que resulta ser, la función, un objeto matemático interesante para la didáctica de la matemática, pues desde allí se plantean que la comprensión del concepto de función viene dada por conocer cada uno de sus registros representativos y de cómo se traduce de uno a otro.

o5. Por otra parte, luego de comprender el significado del concepto de función es que nace la necesidad de recopilar documentación asociada a la enseñanza-aprendizaje de estudiantes de enseñanza media, de ello se tomaron tres elementos característicos de la docencia, como es el currículum, en específico el programa de matemática de los niveles de octavo básico, primero medio y segundo medio; los textos escolares; y por último, dos planificaciones de relacionadas a funciones.

o6. Luego de estudian los documentos seleccionados con el objetivo de comprender su definición implícita de fondo, a fin de contrastar la definición construida del concepto de función con cada una de sus vertientes, de modo que al no triangular adecuadamente la información es que surgen los errores en los documentos señalados.

o7. Por último, el señalar la recurrencia de estos errores permite evidenciar que tan robustos son estos y que con la persistencia de ello signifiquen un aprendizaje mal logrado.

Por tanto, luego de estudiar llevar acabo cada uno de los objetivos específicos se construyen los objetivos generales de esta investigación que están dados por:

O1. Conceptualizar el concepto de función en tres niveles, dimensión matemática, significado curricular y significado Holístico, para comprender su significado como objeto matemático.

O2. Detectar errores conceptuales en la enseñanza-aprendizaje del concepto de función documentos asociados a la enseñanza-aprendizaje para estudiantes de enseñanza media.

O3. Evidenciar errores conceptuales en la enseñanza-aprendizaje del concepto de función hallados en documentos insertos en el plano educativo de educación media.

Este trabajo da aportes respecto de que la enseñanza de funciones no está siendo adecuadamente correcta, pues se presentan errores recurrentes, que de acuerdo con los aportes de la didáctica de la matemática se puede superar, pues la persistencia de errores a posterior constituye en obstáculos epistemológicos.

De igual forma, este trabajo puede tomar en conciencia que los procesos de enseñanza aprendizaje están alineados de forma errónea, con lo cual es necesario realizar cambios curriculares, que como consecuencia traería mejoras en la edición de textos de estudio y mejoramiento en la planificación del quehacer docente.

Referencias

Ministerio de Educación . (2016). *Matemática. Programa de estudio 1° medio.* Santiago: Ministerio de Educación.

Apostol, T. M. (2001). *Calculus, Volumen I. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* Barcelo: EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En R. D. Michèle Artigue, *Ingeniería Didáctica En Educación Matemática* (pág. 109). México, D.F.: Iberoamérica, S.A. de C.V.

Ávila Godoy, R., Ibarra Olmos, S., & Grijalva Monteverde, A. (2010). El contexto y el significado de los objetos matemáticos. *Relime*, 337-354.

Bagni, G. T. (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 7(1)*, 5-24.

Barahona Droguett, M. (2002). *Desde el caos bíblico al monstruo de Mandelbrot.* Copiapó: Ediciones de la Universidad De Atacama.

Boyer, C. (1986). *Historia de las Matemáticas.* Madrid: Alianza Universidad.

Catalán Navarrete, D., Pérez Ureta, B., Prieto Córdoba, C., & Rupin Gutiérrez, P. E. (2015). *Texto del estudiante Matemática 8° Básico (Mineduc).* Santiago: SM S.A.

Crespo, C., & Ponteville, C. (2003). EL concepto de función: su comprensión y análisis. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16 (1)*, 235-241.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2005). *The Sage Handbook of Qualitative Research.* Londres: Sage.

Díaz Gómez, J. L. (2013). EL Concepto de Función: Ideas pedagógicas a partir de su historia e investigaciones. *El Cálculo y su Enseñanza*, 13-25.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, Vol 9. n°1*, 143-168.

Equipo Editorial Santillana. (2017). *Matemática 1° medio Texto.* Santiago: Santillana del Pacífico S.A.

Equipo Editorial SM. (2017). *Texto del Estudiante Matemática 2° medio. Mineduc 2018.* Santiago: SM S.A.

Farfán, R., & García, M. (2008). El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 18*, 489-494.

Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la Parábola. *Revista EMA*, 180-200.

Font, V., & J., A. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de Metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las ciencias*, 405-418.

Godino, J., & Batanero, M.-C. (1994). Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 325-355.

Herstein, I. N. (1980). *Álgebra Moderna.* México D.F.: Editorial Trillas.

Ingeniería Matemática Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas Universidad de Chile. (2013). *Apuntes de Álgebra.* Santiago: Universidad de Chile.

Jaimes, N. (2012). *La noción de función, acercamiento a su comprensión. (Tesis de Maestría).* Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Jiménez Chaves, V., & Comet W., C. (2016). Los estudios de casos como enfoque metodológico. *ACADEMO, Revista de Investigación en Ciencias Sociales y Humanidades*.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, 282-300.

Larson, R., R., H., & B., E. (1999). *CÁLCULO Y GEOMETRÍA ANALÍTICA. Vol 1.* Mc Graw Hill.

Latorre, A., Rincón, D., & Arnal, J. (2003). *Bases metodológicas de la investigación educativa.* Carcelona: Ediciones Experiencia.

Lehmann, C. (1989). *Geometría Analítica.* Mexico D.F.: Editorial Limusa.

Matínez C., P. (2006). El método de estudio de caso. *Pensamiento y Gestión*, 165-193.

Mena Lorca, A. (2010). *Acerca de la importancia de la Didáctica de la Matemática para nuestro país.* Valparaiso: Edtorial UV.

Ministerio de Educación. (2016). *Matemática. Programa de estudio 2° medio.* Santiago: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación. (2016). *Matemática. Programa de estudio octavo básico.* Santiago: Ministerio de Educación.

Ministerio de Educación. (2020). *Programa de Estudio Límites, Derivadas e Integrales 3° y 4° medio.* Santiago: Ministerio de Educación de Chile.

Okuda Benavides, M., & Gómez-Restrepo, C. (2005). Métodos en investigación cualitativa: triangulación. *Revista Colombiana de Psiquiatría*, 118-124.

Parra, Y. E. (2015). Significados pretendidos por el Currículo de Matemáticas chileno sobre la noción de función. *Tesis de Magíster en Educación Matemática. Universidad de Los Lagos*. Santiago.

Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los Objetos Matemáticos: Representación y Significado. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 121-134.

Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., Godino, J. D., & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, 123-150.

Quintero, C. P., & Cadavid, L. A. (2009). Construcción del Concepto de Función en estudiantes de octavo grado. *Comunicación presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009).*

Ramos, A. B. (2005). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambios institucionales. EL caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales.* España: Universidad de Barcelona.

Rey, G., Boubée, C., Sastre, P., & Cañibano, A. (2009). Aportes didácticos para abordar el concepto de función. *Revista Iberoameticana de educación Matemática*, 153-162.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. . *SEIEM*, 219-231.

Rodríguez G., D., & Valldeoriola R., J. (2009). *Metodología de la Investigación.* Barcelona: Eureca Media, SL.

Sastre Vázquez, P., Boubée, C., Rey, G., S., M., & Villacampa, Y. (2008). Evolución histórica de las metáforas en el concepto de función. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 19*, 22-27.

Sastre, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 141-155.

Shílov, G. E. (2004). ¿Qué es una función? *2004ko Azaroa*, 137-147.

Sierpinska, A. (2000). *On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra.* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Spiegel, M. R., & Moyer, R. E. (2007). *Álgebra Superior.* Mexico D.F.: McGraw-Hill Iberoamericana.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. *: N. K. Denzin;Y. S. Lincoln (eds.). The Sage Handbook of Qualitative Research (3.ª ed.)*, 273-285.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de Varias Variables. Trascendentes Tempranas.* Cuidad de Mexico: CENGAGE Learning.

Torres Jeldes, C. V., & Caroca Toro, M. V. (2019). *Matemática. Texto del Estudiante 8° Básico.* Santiago (Chile): Santillana.

Wilhelmi, M., Godino, J., & Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. *SEIEM*, 573-582.

Yin, R. (1994). *Case Study esearch: Design and Methods.* Thousand Oaks, CA.: Sage Publications.

Yin, R. (2009). *Case Study Research: design and methods (4° ed.).* Thousand Oaks, CA: Sage.

Youschkevitch, A. P. (1975). The Concept of Function up to the middle o the 19th Century. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, 37-85.

Anexos

1. Planificación 1

Inicio- Desarrollo-Cierre de una clase

Clase de Productos notables -Primero Medio
OA 3 : Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica: • Transformando productos en sumas y viceversa. • Aplicándolos a situaciones concretas. • Completando el cuadrado del binomio. • Utilizándolos en la reducción y desarrollo de expresiones algebraicas
Objetivo de la clase
Encontrar un modelo para resolver productos de dos binomios con un termino igual
H. h: Usar modelos, utilizando un lenguaje funcional para resolver problemas cotidianos y para representar patrones y fenómenos de la ciencia y la realidad.
A. A. Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas.
Inicio
Posterior a una clase de operatoria algebraica. El inicio se realiza con la siguiente consigna "Hoy veremos **Productos Notables**". Se pregunta qué es producto y qué es notable. A partir de ello, se llega a la conclusión que son multiplicaciones comunes, que continuamente vemos en las distintas tamas de la matemática, etc. Se explica que la idea no es invertir tiempo en ellas, sino trabajar de manera eficaz, eficiente y efectiva y por ello el objetivo es buscar la forma de no desarrollar el algoritmo, pero encontrar el resultado
Desarrollo
Se solicita a los estudiantes que resuelvan las siguientes multiplicaciones $(x+3)(x+4)$ $(x+2)(x+5)$ $(x-3)(x-2)$ $(x-7)(x-4)$ $(x+5)(x-1)$ $(x-3)(x+4)$ Dependiendo del curso, a medida que avanzan, se le pide a los estudiantes que vayan observando si los resultados, tienen, o no, la misma forma. ¿Qué deben observar? a) Que los resultados tienen la forma x^2+bx+c b) x es el término común de los polinomios, entonces si tenemos $(a+3)(a+4)$ el resultado será de la forma a^2+ba+c, porque *a* es el término común. c) Hay que observar que b es la suma de los términos distintos al común. d) Hay que observar que c es el producto de los terminos distintos al común.
Se propicia un trabajo colaborativo, se podría trabajar en grupo y ellos deberían escribir los resultados en la pizarra. El profesor debe observar el orden para distinguir los patrones. De esta forma, si tenemos una multiplicación de la forma $(x+p)(x+q)$ el resultado será $x^2+(p+q)x+pq$

2. Planificación 2

					• Representan el conjunto solución de inecuaciones lineales.	
15	**Tema 3:** Funciones	Concepto de función (páginas 144 y 145)	2	Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal: • utilizando tablas • usando metáforas de máquinas • estableciendo reglas entre x e y • relacionándola con el interés simple	• Elaboran, completan y analizan tablas de valores y gráficos, y descubren que todos los pares de valores tienen el mismo cociente ("constante de proporcionalidad"). • Descubren el concepto de función mediante la relación de proporcionalidad directa.	Cuaderno de actividades (páginas 62 a 71) Aula Virtual
		Representación de una función (páginas 146 a 149)	4	Representar funciones de manera gráfica (plano cartesiano, diagrama sagital)	• Representan la noción de función de manera concreta (utilizando metáforas de máquinas), pictórica o simbólica.	
16		Función lineal (páginas 150 y 151)	2	Mostrar que comprenden la noción de función por medio de un cambio lineal y utilizándola para resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas	• Elaboran las tablas de valores y gráficos correspondientes basados en ecuaciones de funciones lineales $f(x) = a \cdot x$ ($y = a \cdot x$). lineales. • Representan la linealidad $f(kx) = kf(x)$ y $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ en tablas y gráficos.	

					• Modelan situaciones de la vida cotidiana o de ciencias con funciones.	
		Gráfico de la función lineal (páginas 152 a 155)	4	Representar funciones lineales en el plano cartesiano: • realizando traslaciones • determinando el cambio constante de un intervalo a otro	• Descubren que la inclinación (pendiente) de la gráfica depende de la constante de la proporcionalidad. • Identifican la pendiente del gráfico de la función $f(x) = ax$ con el factor a. • Verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación $f(x) = ax$.	
17		Función afín (páginas 156 y 157)	2	Mostrar que comprenden la función afín generalizándola como la suma de una constante con una función lineal	• Representan, completan y corrigen tablas y gráficos pertenecientes a cambios con una base fija y tasa de cambio constante. • Diferencian modelos afines, lineales y de proporcionalidad inversa. • Modelan situaciones de la vida diaria o de ciencias con funciones afines. • Resuelven problemas de la vida diaria o de	

					ciencias que involucran el cambio constante expresado mediante ecuaciones recursivas de la forma *f(x+1) – f(x) = c.*	
		Gráfico de la función afín (páginas 158 a 161)	4	Representar una función afín en el plano cartesiano	• Elaboran, basados en los gráficos, la ecuación de la función afín *f(x) = ax + b.* • Identifican, en la ecuación funcional, el factor *a* con la pendiente de la recta y el sumando *b* con el segmento entre el punto de intersección del gráfico con el eje vertical y el origen *o*(0|0) • Elaboran gráficos de funciones afines *a* y *b* dadas o con dos puntos dados y verifican que las coordenadas de puntos pertenecientes al gráfico son soluciones de la ecuación *f(x) = a · x + b.* • Determinan las regiones en el plano cartesiano cuyos puntos p(x|y) representan soluciones (x|y) de las	

					inecuaciones $y < a \cdot x + b$ o $y > a \cdot x + b$.	
18		Uso de *software* (páginas 162 y 163)	4	Representar diferentes funciones en el plano cartesiano	• Representa funciones lineales y afines, comparan sus puntos de intersección con los ejes y su pendiente.	
		Taller de habilidades matemáticas (páginas 164 y 165)	1	Desarrollar paso a paso una habilidad disciplinar.	• Desarrollan la habilidad de representar resolviendo un problema en el plano cartesiano.	
		Resolución de problemas (páginas 166 y 167)	1	Desarrollar paso a paso la resolución de problemas.	• Resuelven un problema que involucra el uso de funciones para modelar.	