UNIVERSIDAD METROPOLITANA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CONSTRUCCIÓN DE UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA SOBRE LA DEFINICIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL EN UN PUNTO.

TESINA PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTORES

José Alberto Rosales Sáenz

Sebastián Andrés López Silva

PROFESORA GUIA

María Cecilia Tapia Corvalán

SANTIAGO, CHILE, DICIEMBRE DE 2020

Dedicamos esta tesis a:

Nuestros padres, por todo el apoyo brindado.

Agradecimientos

Es difícil expresar los agradecimientos a todas las personas que nos han acompañado durante este proceso, debido a que han sido diversas instancias las que hemos compartido con cada una. Al finalizar esta etapa nos quedan muchos aprendizajes obtenidos, tanto en la formación disciplinar como personal, esto debido a las conexiones que generamos durante el desarrollo de la carrera. Por esto, agradecemos primero que todo a nuestras familias y amigos, por el inmenso apoyo que nos brindan cada día y por siempre confiar en nosotros. También, agradecemos a nuestros profesores, por instruirnos siempre de la mejor manera posible, siempre entregando lo mejor de cada uno; más especialmente, agradecemos a nuestra profesora guía, María Cecilia Tapia Corvalán, por todo el apoyo y motivación brindada durante el desarrollo de nuestra carrera y de esta investigación, además de la paciencia con cada uno de nosotros, gracias por todo.

Sebastián López Silva y José Rosales Sáenz

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Lista de imágenes

Resumen

El estudio del límite es un proceso que se lleva a cabo en la carrera de pedagogía en matemática dentro de cualquier universidad, más específicamente en el curso de Cálculo Diferencial o semejante y dentro del estudio de éste se puede encontrar la definición de límite de funciones reales de variable real en un punto. En este trabajo se plantea la necesidad que tiene el profesor de matemática de manejar un conocimiento extenso y profundo de la definición de límite de una función real de variable real en un punto. En pos de satisfacer tal necesidad, en el trabajo se desarrolla una secuencia de actividades tomando como marco para su construcción la teoría de la Ingeniería Didáctica y la Teoría del Aprendizaje Significativo. En la etapa de análisis preliminar se obtuvo que los estudiantes en su mayoría tienen un conocimiento procedimental de la definición del límite de una función. Sin embargo, al evaluar a estudiantes que participaron en la Secuencia de Actividades, se observó una comprensión más profunda de aspectos estructurales de la definición de límite

Palabras clave: Límite, actividades, definición, ingeniería, significativo.

Abstract

The study of the limit is a process that is developed within the mathematics pedagogy career in every university, more specifically in the course of Differential Calculus or similar fields, and in this study the definition of the limit of Real Functions of Real Variable in a given point is found. This thesis presents the necessity of mathematics teachers to have vast knowledge of the definition of the limit of a Real Function of Real Variable in a given point. In order to meet this necessity a sequence of activities is proposed taking the theory of Didactic Engineering and the Theory of Significant Learning as foundations. In the Preliminary Analisys stage it was found that most students possess a procedural knowledge of the definition of the limit of a function. However, when evaluating students that participated in the sequence of activities mentioned earlier it could be observed a deeper understanding of structural aspects of the definition of limit.

key words: limit, activities, definition, engineer, significant

1. Introducción

Uno de los conceptos fundamentales del cálculo es el límite, puesto que este es la base de otros conceptos como lo son el de derivada e integral, sin embargo, su definición es uno de los conceptos que más complicaciones genera a los estudiantes comprender, debido a las nociones que deben manejar, la manera de trabajo de esta, la abstracción inicial, etc. Ahora, es preciso que un profesor de matemática domine la definición de límite, debido a que el profesor debe manejar los temas que va a enseñar con un nivel superior al que enseña. Por esto, ve la necesidad de aportar una forma de esquematizar el trabajo de la definición de límite de una función real de variable real un punto.

En este trabajo se utiliza la teoría de la ingeniería didáctica como base para construir actividades que favorezcan el aprendizaje de la definición de límite de una función real de variable real en un punto, tomando en consideración también que estas actividades deben seguir un orden lógico, para así ser potencialmente significativas para el estudiante. De la teoría se obtienen 4 fases de trabajo, las cuales sirven como estructura para el desarrollo y validación de estas actividades, estas llevan el nombre de análisis preliminares, concepción y análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori.

2. Planteamiento del problema

Esta tesina tiene como fin desarrollar una secuencia didáctica de actividades asociadas a la construcción de la definición de límite de una función real de variable real en un punto, considerando como foco principal la formación de profesores de matemática. Con esto, se espera que los estudiantes de pedagogía en matemática de la UMCE logren profundizar sus conocimientos sobre los temas asociados a este concepto, y comprendan su proceso de construcción.

Un conocimiento detallado de este tema es relevante porque entre el conocimiento especializado que debe poseer un profesor de matemáticas, debe estar el dominio del contenido a enseñar, eso sí, con un nivel de profundización, organización y estructuración superior al que van a recibir los estudiantes (Carrillo, Contreras y Montes, 2015). Específicamente, la definición de límite de una función, por ser una definición, pertenece al subdominio del conocimiento de los temas (KoT) del modelo del conocimiento especializado del profesor de matemática (MTSK), más particularmente a la categoría de propiedades y fundamentos; pues aquí están tanto los procesos matemáticos que enuncian definiciones, propiedades y teoremas, como también sus demostraciones; se incluye también aquí todo lo referente a la axiomática, a esos resultados que son principios fundamentales y evidentes que no requieren demostración (Carrillo et al; 2015).

Como el conocimiento del profesor es relevante, y dado que el nuevo currículum incorpora la enseñanza del concepto de límite para uno de los cursos electivos de enseñanza media, es necesario profundizar en su formación y dominio de conocimientos que tiene sobre la definición de límite. Este nuevo currículum fue elaborado entre los años 2018 y 2019, y promulgado a mediados del 2019. Este responde a la ley 20.397, también conocida como la Ley General de Educación (LGE).

Uno de los nuevos cursos electivos, que lleva el nombre de Límites, Derivadas e Integrales; específicamente en la unidad número 2, que se llama "Reconocimiento de un Patrón Infinito y la Noción del Límite", encontramos los siguientes indicadores:

Contenido

"OA2: Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales" (MINEDUC, 2020, p. 67)

Habilidades

"OA d: Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g**:** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación." (MINEDUC, 2020, p. 67)

Actitudes

"Pensar con autorreflexión y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar." (MINEDUC, 2020, p. 67).

Allí también se encuentran los siguientes indicadores de evaluación asociados a dichos objetivos:

1. Conjeturan acerca del valor del límite de sucesiones, series o funciones.
2. Determinan límites de funciones de forma algebraica.
3. Analizan la existencia o el valor de límites usando aproximaciones por la derecha y la izquierda.
4. Analizan la continuidad de las funciones en un punto utilizando representaciones y el cálculo de límites.
5. Argumentan sobre la convergencia de sucesiones, series o funciones, utilizando representaciones y el cálculo de límites. (MINEDUC, 2020, p. 97)

Respecto a estos indicadores, si bien en este trabajo no se analizarán específicamente cada uno de ellos en detalle, todos se basan en los objetos matemáticos y lenguaje necesario para la construcción del concepto de límite.

2.1.Recopilación de datos en el Departamento de Matemática

Para obtener una mirada de las posibles dificultades en el curso Cálculo Diferencial en una Variable del plan de estudios de la carrera Pedagogía en Matemática del Departamento de Matemática de la UMCE, se solicitó a estudiantes que ya cursaron dicha asignatura a responder una encuesta en línea

Se considera relevante la opinión de dichos estudiantes, ya que ellos pueden dar una visión de las dificultades que existen en el aprendizaje del contenido.

En esta encuesta participaron cuarenta y ocho estudiantes que estuvieron dispuestos a responder. Las dos primeras preguntas son cerradas con opción única, y las dos últimas son abiertas. La información obtenida se esquematiza en las siguientes tablas.

Tabla 1.

Respuesta a la pregunta "¿Hace cuánto tiempo cursaste el curso de cálculo diferencial en una variable?"

Tiempo	N° de estudiantes	Porcentaje de estudiante
Se cursa actualmente	3	6%
Hace un semestre	15	31%
Dos o más semestres	30	63%

fuente: elaboración propia

Nota: las personas que indicaron estar cursando la asignatura actualmente son estudiantes que rinden el curso por segunda oportunidad.

Tabla 2.

Respuestas a la pregunta "¿Qué tema te complicó más comprender en el curso de cálculo diferencial en una variable?"

Tema	N° de estudiantes	Porcentaje de estudiante
Axiomas de los números reales	14	29%
Topología en IR	26	54%
Límites y continuidad	4	8%
Derivadas	4	8%

Fuente: elaboración propia

Tabla 3.

Respuestas a la pregunta "¿Qué concepto le fue más complicado comprender, o aplicar en el curso de cálculo diferencial en una variable?

Concepto asociado al tema	N° de estudiantes	Porcentaje de estudiantes
Axioma del supremo o propiedad arquimediana	17	33%
Punto de acumulación o vecindades	20	42%
Definición de límite	7	15%

razón de cambio	4	8%
Otro	1	2%

Fuente: elaboración propia

Como se observa, el 57% de los estudiantes de pedagogía en matemática de la UMCE declaran tener complicaciones respecto a la comprensión de conceptos previos y de dominio indispensable para apropiarse de la definición límite. Esto representa un problema, pues indica que ese porcentaje de estudiantes que respondieron la encuesta no comprenden los conceptos íntimamente relacionados a la definición de límite; cuestión que deben dominar, ya que como mencionamos anteriormente, el profesor debe tener un conocimiento profundo de los temas que va a enseñar.

Ahora, en un análisis más específico, se obtiene que, de los 26 estudiantes que marcaron “Topología en $\mathbb{R}$”, en la segunda pregunta 15 estudiantes mencionaron el concepto de “punto de acumulación”, en la tercera pregunta (esto representa al 58% dentro de los que marcaron topología en la pregunta 1), concepto que tiene principal importancia en la definición de límite de una función real de variable real.

Continuando con la justificación de la última pregunta: “¿Por qué cree que le fue más complicado aplicar, o comprender el concepto mencionado en la pregunta anterior?”, algunas de las respuestas (contando sólo a los estudiantes que eligieron el tema de topología o límite) fueron:

- Porque son conceptos más abstractos, difíciles de visualizar.
- Porque se encuentra poca información del contenido y ejercicios en los textos de cálculo.
- Porque su definición es compleja, y llevarlo a un ejercicio también.

Aquí podemos notar que los problemas planteados por los estudiantes fueron la escasez de material de estudio para poder practicar lo aprendido, la falta de representaciones; y la abstracción misma del contenido (esto último referente al concepto topológico de punto de acumulación). Respecto a esto, debemos aclarar que, si bien en varios libros de texto se presenta la definición formal de límite de una función, por lo general esta no se trabaja a mayor profundidad, ya que pasan rápidamente a tratar otros conceptos relacionados. En los libros de texto de Apóstol (1984), Stewart (2017) y Spivak (2012), que son unos de los libros más utilizados y citados en la bibliografía de cálculo diferencial en una variable dentro del departamento, se observan las siguientes definiciones:

Apostol

"El simbolismo $\lim_{x \to p} f(x) = A$ (o $f(x) \to A$ cuando $x \to p$) significa que para todo entorno de $N_1(A)$ existe un cierto entorno $N_2(p)$ tal que $f(x) \epsilon N_1(A)$siempre que $x \epsilon N_2(p)$y $x \neq p$" (p.157)

Justo antes de introducir esta definición, también define lo que es un entorno como "cualquier intervalo abierto que contenga un punto p como su punto medio" (p.157) para posteriormente explicar los entornos en términos de desigualdades y valor absoluto. En el texto también se nota que, si bien se demuestran teoremas usando la definición, solo se presentan 2 ejemplos de demostración del límite mediante la definición, y éstos son los de la función constante y la función identidad. Además, en el apartado de ejercicios se les da mayor importancia a otros aspectos, como los mismos teoremas, o el concepto de continuidad, habiendo solo un ejercicio que pida demostrar un límite, siendo este uno mucho más complicado que el de los ejemplos.

Spivak

"La función f tiende hacia el límite l en a significa que: para todo ε>0 existe algún δ>0 tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$" (p. 99)

Antes de llegar a la definición formal del límite el autor entrega una definición provisional, la que dice que "la función f se aproxima al límite l cerca de a, si $f(x)$ se aproxima tanto como se quiera a l si x se aproxima suficientemente a a pero es distinto de$a$" (Spivak, 2012, p.90). A partir de esta definición intuitiva el autor va poco a poco trabajando con algunos ejemplos, demostrando límites en un punto, para luego mencionar que esta definición provisional no es lo suficientemente precisa, por lo que a partir de algunas deducciones entrega la definición formal y dice que "sería inútil continuar sin conocerla. Si es necesario el lector puede memorizar como un poema" (p. 99). Luego, se observa que a partir de los ejemplos y ocupando su definición provisional, se demuestran varios límites de funciones en un punto, pero una vez ya formalizada la definición, el autor solo realiza una demostración utilizando dicha proposición. Además, se observa en el apartado de ejercicios la presentación de una gran variedad de problemas referentes a la demostración utilizando la definición, pero la dificultad de éstos es bastante elevada.

Stewart

"Sea f una función definida sobre algún intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces, se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L, y se expresa como $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$" (p. 106).

En este libro se encuentran cuatro ejemplos relacionados a la demostración de un límite por definición, y en algunos ejercicios del apartado de problemas se solicita de igual manera demostrar un límite por definición, por lo que este libro aporta más que los dos anteriores en este tema.

Considerando los tres libros estudiados, a continuación, se pueden observar algunas similitudes y diferencias encontradas, además de un complemento planteado por nosotros.

Tabla 4.

Similitudes, diferencias y complementos entre los libros de Apostol, Spivak y Stewart respecto a la definición de límite de una función real

Similitudes	Diferencias	Complementos
Se utilizan otros conceptos necesarios para comprender la definición de límite, como son las funciones, lógica proposicional (cuantificadores, proposiciones y conectivos), desigualdades, valor absoluto e intervalos abiertos (o entornos).	En Apostol se da casi nula importancia a la demostración de límites por definición, mientras que en Spivak se dan ejemplos de cómo calcular límites de funciones en un punto, pero ocupando su definición provisional (aunque estos ejemplos son bastante formales). Además, solo da un ejemplo utilizando su definición formal del límite de una función en un punto. En el apartado de ejercicios hay problemas de nivel bastante elevado, siendo en Spivak más complejos que en Apostol. Por otro lado, en Stewart hay más ejemplos sobre la definición del límite; y el apartado de ejercicios tiene otros de nivel similar.	En ninguno de los tres libros se le da mayor importancia a que el punto en el que se calcula el límite debe ser un punto de acumulación del dominio de la función. Se entregan comentarios de que posiblemente la función no esté definida en el punto para el cual se desea calcular el límite, pero no se especifica por qué.

Fuente: elaboración propia

Lo anterior indica que además de relacionar conceptos propios de la actividad curricular de cálculo diferencial en una variable, y para lograr comprender la definición de límite, los estudiantes deben ser capaces de vincular conceptos tratados en cursos anteriores. Este es un punto clave para lograr un verdadero aprendizaje, pues el alumno debe manifestar una disposición para relacionar sustancial, y no arbitrariamente el nuevo material con su estructura cognoscitiva. Por tanto, el nuevo conocimiento que aprende debe ser potencialmente significativo para él, es decir, relacionable a otros conocimientos anteriores (Ausubel, 1983), y “la activación de los conocimientos y experiencias previas que posee el aprendiz en su estructura cognitiva facilitará los procesos de aprendizaje significativo de nuevos materiales de estudio” (Díaz, Barriga y Hernandez citados en Palmero, 2011, p.44). Ahora bien, aun logrando las conexiones necesarias para la comprensión de un contenido, puede ocurrir que la falta de ejemplificación lleve a que un estudiante no logre interiorizar la definición de límite, por lo que, a pesar de comprender el concepto, podría no ser capaz de utilizar la definición para resolver problemas que la requieran. Respecto a esto, en el subdominio KoT del MTSK anteriormente mencionado, podemos encontrar una categoría referente a los espacios de ejemplos, por lo que ellos se pueden considerar como relevantes también, ya que, en términos particulares, se dice que los ejemplos

> ilustran conceptos y principios, para indicar una clase o categoría superior, para motivar, para mostrar la variación y el cambio, para ilustrar técnicas o procedimientos; o ejemplos para la construcción o refutación de pruebas. (…) El espacio de ejemplos de una persona es el conjunto de ejemplos de los que dispone y las relaciones entre ellos, que constituyen una trama organizada a disposición del individuo en un momento determinado y sobre un concepto o procedimiento concreto. (Watson y Mason citados en Carrillo et al; 2015, p.16).

Por lo que, proporcionar ejemplos podrá ayudar en gran medida a mejorar el tratamiento de la definición de límite, puesto que aumentará la comprensión y facilitará la resolución de los problemas que posteriormente puedan presentarse.

La construcción de la secuencia didáctica se sustenta en la ingeniería didáctica de Michèle Artigue, “la ingeniería didáctica es singular (...) por las características de su funcionamiento metodológico” (Artigue, 1995, p.38), la cual se sustenta en cuatro fases, que son:

- Análisis preliminares

- Concepción y análisis a priori
- Experimentación
- Análisis a posteriori

En resumen, en la primera etapa de análisis preliminares se realiza el planteamiento teórico, en este caso sobre la definición de límite de una función real de variable real en un punto (análisis epistemológico, análisis sobre la enseñanza tradicional, análisis sobre las concepciones de los estudiantes y análisis de los conocimientos necesarios para la construcción del concepto).

Artigue (1995), en relación a la concepción y análisis a priori, dice que “este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori” (p. 45), por lo que en la concepción se esquematiza la secuencia didáctica en función de los análisis preliminares previamente establecidos y en el análisis a priori se formulan hipótesis sobre las posibles dificultades que puedan surgir.

En la etapa de experimentación se aplica la secuencia didáctica a estudiantes, en este caso, de cálculo diferencial en una variable en el aula.

Finalmente, en la etapa de análisis a posteriori se contrastan los resultados con las hipótesis planteadas en el análisis a priori para validar la secuencia didáctica propuesta, y/o mejorarla.

3. Justificación y objetivos de la investigación

3.1.Justificación

Existen muchos estudios enfocados al aprendizaje del concepto de límite, algunos de estos los podemos ver en las tesis de De la Torre (1994), Rendon (2017) y Analco (2019), en donde se plantea la importancia del límite en el aprendizaje que deben tener los estudiantes. A continuación, se presentan algunas consideraciones sobre esto:

Primero, se debe tener en cuenta que el concepto de límite de una función es la idea central del Cálculo, y también puede ser la más importante y difícil de asimilar o comprender (Pinzon citado en De la Torre, 1994); porque por un lado, sirve como pieza fundamental para construir conceptos que se tratan posteriormente, como son la derivada o la integral, y por otro, genera confusiones a los estudiantes; esto se puede notar por ejemplo en la noción del límite, que representa a menudo una barrera que no se puede cruzar, la cual puede ser alcanzable o inalcanzable (De la Torre, 1994).

Por otro lado, Rendon (2017) detalla la importancia de considerar la historia del desarrollo de conceptos matemáticos, ya que a partir de ella se puede generar un aprendizaje más completo de los contenidos, pues "la historia de la matemática a la hora de enseñar un concepto posibilita el uso de distintas representaciones del objeto, producto de su evolución histórica, hecho que amplía la comprensión de los estudiantes sobre el objeto en cuestión" (Bagni citado en Rendon, 2016, p. 299).

Por último basándose en la idea de la dificultad sobre el concepto de límite, Analco (2019) presenta una secuencia de actividades sobre el concepto de límite utilizando la teoría APOE, sin embargo, al momento de aplicar las actividades diseñadas pudo notar que "es necesario diseñar y aplicar actividades que favorezcan la construcción de la concepción métrica" (Analco, 2019, p. 56), esto dado que sus actividades no fueron enfocadas a este tema, pero dio cuenta que tenían relevancia al momento de lograr un aprendizaje completo del concepto de límite.

Si bien los tres autores nos dan evidencia de la importancia del concepto de límite, éstos se enfocan más en el concepto en sí mismo que en la definición de límite; por lo que en este trabajo se planea desarrollar a fondo esto último para así generar una secuencia didáctica de actividades sobre el tema. Debido a que la investigación será realizada en la UMCE, la pregunta de investigación es:

¿Cómo los estudiantes de pedagogía en matemática de la UMCE comprenden la definición del límite de una función real de variable real en un punto?

Los objetivos de esta investigación se pueden apreciar a continuación.

3.1.1. Objetivo general

- Elaborar una secuencia didáctica de actividades para la construcción de la definición de límite de una función real de variable real en un punto, que sirva para la formación de profesores de matemática.

Aquí se hace referencia a la secuencia en su forma final, es decir, ya aplicada, evaluada y con las posibles mejoras de las dificultades que se puedan presentar.

3.1.2. Objetivos específicos

A partir del objetivo general se desprenden los siguientes objetivos específicos:

- Determinar los conocimientos necesarios para la comprensión de la definición de límite de una función real de variable real en un punto.

Se entiende por conocimientos al conjunto de habilidades necesarias que deben tener los estudiantes, los contenidos que deben dominar, y otros aspectos que les permitan comprender de manera adecuada la definición de límite de una función real de variable real en un punto.

- Diseñar una secuencia didáctica de actividades de la definición de límite de una función real de variable real en un punto, creando un análisis a priori de su aplicación a partir del análisis teórico de la ingeniería didáctica.

A diferencia del objetivo general, el diseño de la secuencia se basa netamente en aspectos teóricos basados en los conocimientos de los análisis preliminares anteriormente mencionados. Una vez concluido el diseño de la secuencia, se establece el análisis a priori como la formulación de hipótesis sobre las posibles dificultades de la aplicación.

- Aplicar la secuencia didáctica de la definición de límite de una función real de variable real en un punto a estudiantes que se encuentren cursando cálculo diferencial en una variable.
- Contrastar las hipótesis formuladas en el análisis a priori con el análisis a posteriori de los resultados obtenidos.

4. Marco referencial

4.1. Conceptualización de límite en la literatura disciplinar

Anteriormente se ha mencionado la manera en que los libros de cálculo de Apostol (1984), Spivak (2012) y Stewart (2017) abordan el tema de la definición de límite de una función real de variable real en un punto y se dieron algunos comentarios respecto al enfoque de estos libros, donde se mencionan también los tipos de ejemplos que aparecen. En este apartado se expondrán de manera explícita dichos ejemplos para comentar el uso que le dan a la definición entregada en cada libro y contrastar dicho uso en los comentarios.

4.1.1. Apostol

Imagen 1.

Ejemplos del libro de Apostol

EJEMPLO 1. *Límite de una función constante.* Sea $f(x) = c$ para todo x. Es fácil demostrar que para todo p, tenemos $\lim_{x \to p} f(x) = c$. En efecto, dado un entorno $N_1(c)$, la relación (3.1) se satisface para cualquier $N_2(p)$ porque $f(x) = c$ para todo x, cualquiera que sea $N_1(c)$. Con la notación de los límites, escribimos

$$\lim_{x \to p} c = c\,.$$

EJEMPLO 2. *Límite de la función identidad.* Ahora es $f(x) = x$ para todo x. Podemos probar muy simplemente que $\lim_{x \to p} f(x) = p$. Para cualquier entorno $N_1(p)$ se toma $N_2(p) = N_1(p)$. Entonces la relación (3.1) se realiza trivialmente. Con la notación de límite, escribimos

$$\lim_{x \to p} x = p\,.$$

Fuente: Calculus Apostol (1984), p. 159

Nota: La relación (3.1) nombrada se refiere a la definición de límite entregada anteriormente.

Nótese que los ejemplos entregados son bastante básicos, pero además no se precisan lo suficiente las ideas utilizadas en las demostraciones, por lo que un estudiante que no posee suficiente conocimiento sobre el tema puede no apreciar la importancia de los entornos (vecindades) que aparecen en las demostraciones. Por ejemplo, puede no comprender por qué es necesario que $x \neq p$.

4.1.2. Spivak

Imagen 2.

Ejemplos del libro de Spivak con la definición provisional

La función $f(x) = x^2$ es más interesante. Seguramente deberíamos ser capaces de demostrar que $f(x)$ se aproxima a 9 cerca de 3. Esto significa que debemos conseguir que se verifique la desigualdad

$$|x^2 - 9| < \varepsilon$$

para cualquier número positivo ε, si $|x-3|$ es suficientemente pequeño. Es obvio que el primer paso consiste en escribir

$$|x^2 - 9| = |x-3| \cdot |x+3|,$$

ya que así se obtiene el factor útil $|x-3|$. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurría en el caso de los ejemplos anteriores, aquí el factor extra es $|x+3|$, que no es una constante conveniente como 3 ó 3 000 000. Ahora bien, todo consiste en asegurarse de acotar convenientemente el valor de $|x+3|$, de manera que lo primero que vamos a hacer es exigir que $|x-3| < 1$, es decir, que $2 < x < 4$, y por tanto que $5 < x+3 < 7$, lo cual nos asegura que $|x+3| < 7$. Por tanto, obtenemos

$$|x^2 - 9| = |x-3| \cdot |x+3| < 7|x-3|,$$

lo que demuestra que $|x^2 - 9| < \varepsilon$ si $|x-3| < \varepsilon/7$, con la condición de que $|x-3| < 1$. O, para dar una respuesta más formal: debemos exigir que $|x-3| < \text{mín}(\varepsilon/7, 1)$.

La especificación inicial $|x-3| < 1$ la hicimos simplemente por conveniencia. Podríamos haber exigido también que $|x-3| < \frac{1}{10}$ ó que $|x-3| < 10$, o cualquier otro valor conveniente. Para asegurarse de que entiende el razonamiento del párrafo anterior, el lector debería seguir los mismos pasos, suponiendo que $|x-3| < 10$.

El argumento que hemos utilizado para demostrar que f se aproxima a 9 cerca de 3 servirá también para demostrar que f se aproxima a a^2 cerca de a para cualquier a, aunque en este caso va a ser algo más laborioso obtener la acotación apropiada para $|x+a|$. Exigiremos primero que $|x-a| < 1$, confiando nuevamente en que esto asegure que $|x+a|$ no sea demasiado grande. De hecho, en el Problema 1-12 se demuestra que

$$|x| - |a| \leq |x-a| < 1,$$

y por tanto

$$|x| < 1 + |a|,$$

de lo que se deduce que

$$|x+a| \leq |x| + |a| < 2|a| + 1,$$

obteniendo

$$\begin{aligned} |x^2 - a^2| &= |x-a| \cdot |x+a| \\ &< |x-a| \cdot (2|a|+1), \end{aligned}$$

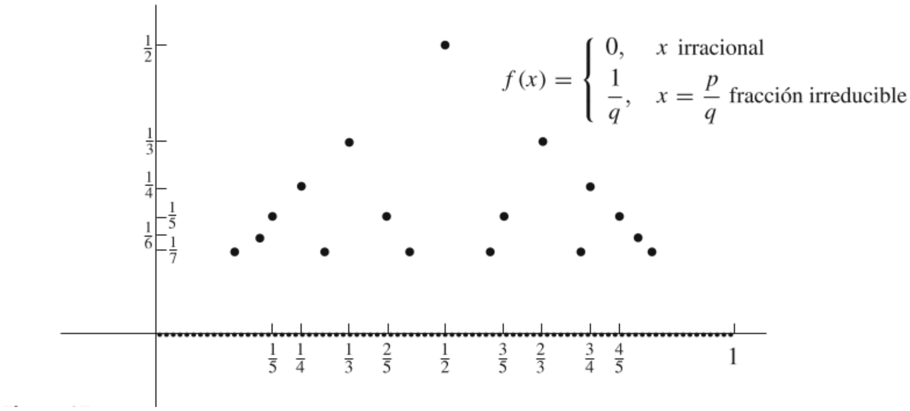
de manera que $|x^2 - a^2| < \varepsilon$ si $|x-a| < \varepsilon/(2|a|+1)$, con la condición de que $|x-a| < 1$. Más formalmente: exigimos que $|x-a| < \text{mín}(\varepsilon/(2|a|+1), 1)$.

Fuente: Calculus, Spivak (2012), p. 92-93

Imagen 3.

Ejemplo del libro de Spivak con la definición formal

Como ilustración final del uso de la definición de una función que tiende a un límite, hemos reservado a la función que se muestra en la Figura 15, la cual constituye un ejemplo clásico y uno de los más complicados:



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irracional, } 0 < x < 1 \\ 1/q, & x = p/q \text{ fracción irreducible, } 0 < x < 1. \end{cases}$$

(Recordemos que p/q es una fracción irreducible si p y q son enteros sin divisores comunes y $q > 0$.)

Para cualquier número a, con $0 < a < 1$, la función f tiende a 0 en a. Para demostrarlo consideremos cualquier número $\varepsilon > 0$. Sea n un número natural suficientemente grande, de manera que $1/n \leq \varepsilon$. Observemos que los únicos números x para los que $|f(x) - 0| < \varepsilon$ podría ser falso son:

$$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; \ldots; \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}.$$

(Si a es racional, entonces a podría ser uno de estos números.) Sin embargo, a pesar de que pueden ser muchos, tan sólo existe un número finito de ellos. Por tanto, de todos ellos existe uno que es el que más se aproxima a a; es decir $|p/q - a|$ es mínimo si p/q es uno de estos números (si a fuese uno de ellos, entonces basta considerar tan sólo aquellos valores $|p/q - a|$ tales que $p/q \neq a$). Esta mínima distancia puede elegirse como δ, ya que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces x *no* es ninguno de los números

$$\frac{1}{2}, \ldots, \frac{n-1}{n}$$

y por tanto $|f(x) - 0| < \varepsilon$ es *cierto*. Esto completa la demostración. Observemos que la descripción que hemos dado de δ, la cual es válida para cualquier ε, es totalmente suficiente; no es necesario hallar una fórmula que exprese δ en función de ε.

Fuente: Calculus, Spivak (2012), p. 99-100

Anteriormente se pudo observar que existe una diferencia entre las definiciones provisional y formal que entrega el autor, pero al momento de aplicar estas definiciones a los ejemplos se trabaja siempre rigurosamente, e incluso se puede suponer que los ejemplos desarrollados con la definición "provisional" están siendo trabajados con la definición formal, ya que posee simbolismos propios de esta (como el "ε" o las desigualdades). Además, se puede agregar que el ejemplo que presenta el autor respecto a la definición formal puede resultar difícil de comprender a un estudiante que estudia por primera vez la definición, dada la complejidad de la función, y el argumento entregado; ya que además no es muy convencional, pues en general se acostumbra a encontrar una expresión de δen función de ε para probar el límite.

4.1.3. Stewart

Imagen 4.

Ejemplo del libro de Stewart

EJEMPLO 2 Pruebe que $\lim_{x\to 3}(4x-5)=7$.

SOLUCIÓN

1. *Análisis preliminar del problema (intuir un valor para δ).* Sea ε un número positivo dado. Encuentre un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0<|x-3|<\delta \quad \text{entonces} \quad |(4x-5)-7|<\varepsilon$$

Pero $|(4x-5)-7| = |4x-12| = |4(x-3)| = 4|x-3|$. Por tanto, se quiere una δ tal que

$$\text{si} \quad 0<|x-3|<\delta \quad \text{entonces} \quad 4|x-3|<\varepsilon$$

$$\text{esto es,} \quad \text{si} \quad 0<|x-3|<\delta \quad \text{entonces} \quad |x-3|<\frac{\varepsilon}{4}$$

Esto sugiere que debe elegir $\delta = \varepsilon/4$.

2. *Demostración (demostrar que esta δ funciona).* Dado $\varepsilon>0$, elija $\delta=\varepsilon/4$. Si $0<|x-3|<\delta$, entonces

$$|(4x-5)-7| = |4x-12| = 4|x-3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

Fuente: Cálculo trascendentes tempranas, Stewart (2017), p. 108

Imagen 5.

Ejemplo del libro de Stewart

EJEMPLO 3 Utilice la definición 4 para demostrar que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

SOLUCIÓN

1. *Infiera un valor para δ.* Sea ε un número positivo dado. Aquí $a = 0$ y $L = 0$, por lo que se quiere encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

esto es,
$$\text{si} \quad 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad \sqrt{x} < \varepsilon$$

o, elevando al cuadrado ambos lados de la desigualdad $\sqrt{x} < \varepsilon$, se obtiene

$$\text{si} \quad 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad x < \varepsilon^2$$

Esto sugiere que se debe elegir $\delta = \varepsilon^2$.

2. *Demuestre que esta δ funciona.* Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon^2$. Si $0 < x < \delta$, entonces

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

así,
$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

De acuerdo con la definición 4, esto demuestra que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$. ■

Fuente: Cálculo trascendentes tempranas, Stewart (2017), p. 110

Nótese que, respecto a los ejemplos aportados por los otros dos libros, en que una vez encontrado el δ, se comprueba que efectivamente se cumple la definición con dicho δ; además, el libro presenta ejemplos más sencillos de seguir para cualquier persona que recién está partiendo en el estudio de los límites; y estos van en concordancia con los que los estudiantes están acostumbrados a ver cuándo cursan cálculo diferencial en una variable por primera vez.

4.2.Dificultades sobre la enseñanza del límite.

Como se mencionó antes, es sabido que el límite es un concepto difícil de enseñar, esto puede deberse a distintos factores, como pueden ser las ideas primitivas de algo no alcanzable, de aproximación, cercanía, etc. Ahora, dentro del concepto de límite, podemos decir que unas de las cosas que genera más problemas es la definición de límite de una función, tanto por su nivel de abstracción, su manejo simbólico, o porque por lo general los estudiantes interpretan esta de forma inversa al proceso que deben realizar (De la torre, 1994), forma de pensar que muchas veces no es común para estudiantes que toman el curso de cálculo diferencial por primera vez. A su vez, Hitt (2004) plantea una serie de dificultades que se pueden presentar en la enseñanza del concepto de límite. De éstas, algunas de las que tienen relación directa con la definición son:

- Significado y uso de los cuantificadores.

Aquí se hace referencia a que, durante la investigación, Hitt encontró problemas con la interpretación de los cuantificadores, especialmente con el de existencia de un δ, ya que se confundía este con la existencia de un único δ válido para un ϵ dado (cuando el límite existe). En la imagen 4, lo anterior equivaldría a pensar que para un ϵ dado, solo el valor $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ es válido para decir que el límite es 7, cuando en verdad cualquier otro valor positivo menor que dicho delta sirve para concluir la afirmación.

- Aprendizaje memorístico de la definición, sin relacionarlo con su significado geométrico.

Con esto Hitt quiere decir que es común que los estudiantes solo se aprendan la definición de manera textual, sin interpretar lo que representa cada símbolo de la definición para la función en un gráfico, como, por ejemplo, la interpretación de los valores absolutos como distancias. Esto puede deberse a que para demostrar que el límite de una función es cierto número, muchas veces solamente hace falta saber manipular de manera algebraica los términos que aparecen en la definición, por lo que no se pone demasiado énfasis en la interpretación geométrica. Sin embargo, esto puede generar dificultades a futuro, ya que es muy posible que, al aprenderse la definición de memoria, al pasar el tiempo ella sea olvidada.

- El proceso de demostración en contraste con la intuición.

En este punto se señala la dificultad que existe para demostrar ciertas afirmaciones que en principio son bastante intuitivas. En su artículo, Hitt señala que se le dio la función $f(x) = \begin{cases} 1, & si\, x \in \mathbb{Z} \\ 0, & si\, x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ a un profesor de matemática y se le preguntó cuál es el límite cuando $x \to 2$, respondiendo este fácilmente que el límite es 0; pero luego cuando se le pidió demostrar que el límite no era 1, no pudo concretar la demostración. Podría decirse que esta es una de las dificultades más comunes al momento de aprender cálculo, ya que muchas veces se logra comprender el concepto de manera intuitiva y a veces hasta se es capaz de demostrar que un límite de una función en un punto es cierto número; pero como no se conoce la interpretación geométrica, no se es capaz de probar que otro número no puede ser el límite de la misma función en dicho punto.

4.3. El aprendizaje significativo.

Para relacionar conocimientos previos que se necesitan para la definición del límite de una función real de variable real en un punto se va a considerar la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, el cual se puede ver como un proceso en donde a partir de conocimientos previos, considerando a los factores y condiciones que poseen los estudiantes, ellos construyen nuevos conocimientos. Esta teoría se construye desde un enfoque organicista del individuo y que se centra en el aprendizaje generado en un contexto educativo (Palmero, 2008), es decir, que se centra en las estructuras y la organización mental que tenga el estudiante, respondiendo a los aprendizajes que surgen de su contexto educacional.

A partir de esto se puede definir este aprendizaje como un proceso en donde se relaciona un nuevo conocimiento o una nueva información con la estructura cognitiva de la persona que lo aprende de forma no arbitraria, sustantiva y no literal (Palmero, 2008), teniendo en consideración que este proceso no es solo la unión de diferentes conocimientos, sino más bien es el proceso en donde los nuevos contenidos que se adquieren tienen significado para el sujeto a partir de una transformación de los subsumidores o ideas de anclaje de su estructura cognitiva (Palmero, 2008).

Para que pueda surgir el aprendizaje significativo se tiene que cumplir con dos condiciones fundamentales, que son:

- Actitud potencialmente significativa de aprendizaje por parte del aprendiz, o sea, predisposición para aprender de manera significativa.

Respecto a este punto, es necesario tener en cuenta que el estudiante debe tener, como se declara, una predisposición a aprender; ya que sin ella será muy difícil que se logre este aprendizaje, puesto que, si no existe una motivación de parte del estudiante de aprender, no se podrá lograr que el aprendizaje sea significativo para él.

Sin embargo, no se debe entender que el aprendizaje significativo depende solo de la actitud del estudiante, sino que también del segundo punto:

- Presentar un material potencialmente significativo.

Debemos tener la consideración de que todo material que se construya debe tener una secuencia que siga un orden lógico para facilitar el aprendizaje, ya que a partir de ello se hace más natural comprender los contenidos que se presenten, facilitando la construcción de una estructura cognitiva. Para que esto ocurra, dentro de la secuencia deben existir ideas de anclaje o subsumidores adecuados en el sujeto que permitan la interacción con el material nuevo que se presenta.

4.4.Conocimientos que debe poseer el profesor de matemática

Como se mencionó en el planteamiento del problema, el MINEDUC establece ciertos objetivos de aprendizaje que deben lograr los estudiantes respecto al contenido de límites para demostrar que tienen conocimientos sobre el tema. Según el MINEDUC (2020), estos objetivos se han fijado para que los estudiantes tengan su primera aproximación al cálculo.

Por otra parte, también existen estándares orientadores sobre los conocimientos que debe tener un profesor de matemática. Cada uno de estos estándares "se entiende como aquello que todo docente debe saber y poder hacer para ser considerado competente en un determinado ámbito" (MINEDUC, 2012, p.7). Un estándar relativo a este contenido es el 6: "demuestra competencia disciplinaria en el cálculo diferencial y aplicaciones" (MINEDUC, 2012, p.103), que tiene varios requerimientos para asegurar su cumplimiento. Los relacionados al contenido de límites son:

- Calcula límites y los utiliza para resolver problemas.
- Establece y analiza la continuidad de funciones de una variable real.

Aquí no se hace referencia a la definición de límite que es el objeto de estudio de este trabajo, sin embargo, "el docente de matemática debe desarrollar, además, conocimientos que le permitan entender el orden lógico de los contenidos matemáticos según la percepción de los matemáticos puros y acorde con los libros de texto" (Fonseca y Castillo, 2013, p.5), dado que el profesor debe evidenciar un conocimiento profundo de los temas que va a enseñar. Ahora, debe contar también con herramientas conceptuales y didácticas que le faciliten anticipar situaciones en el aprendizaje de temas específicos, para poder así diseñar modelos alternativos o explicaciones que le permitan mediar con dichas situaciones (Fonseca & Castillo, 2013).

5. Marco metodológico

Esta investigación sigue una metodología cualitativa, ya que es aplicada solamente a nivel del departamento de pedagogía en matemática de la UMCE, más específicamente, a pesar de que se toma en cuenta la opinión y participación de ciertos estudiantes que ya hayan cursado cálculo diferencial en una variable, la secuencia se aplica solo a estudiantes que cursen por primera vez dicha actividad curricular el segundo semestre del año 2020. Además, es del tipo descriptivo e interpretativo ya que por un lado se reseña el desarrollo de las actividades y las respuestas a un cuestionario durante la experimentación, mientras que por otro se realizan contrastes al finalizar la implementación para obtener conclusiones sobre lo ocurrido.

Como se mencionó en el planteamiento del problema, este trabajo se sustenta en la ingeniería didáctica de Michèle Artigue para la creación de una secuencia didáctica de actividades para la definición de límite de una función real de variable real en un punto. En este apartado se presentan aspectos generales de la ingeniería didáctica como metodología de investigación, y se detallan las fases de ella en función del concepto a trabajar; esto para dar al lector una visión más amplia referente a la teoría que será utilizada y cómo será aplicada.

La ingeniería didáctica como metodología de investigación se caracteriza por su enfoque experimental de creación, aplicación, observación y contraste de una secuencia de enseñanza (Artigue, 1995) y por la validación interna que esta proporciona, a partir del contraste entre el análisis a priori y a posteriori de la experimentación realizada (De Faria, 2006); esto último nos indicaría que la ingeniería didáctica no necesita de comparaciones o investigaciones externas para la validación de una secuencia didáctica, ya que posee un mecanismo propio para realizarla.

“El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de manera coherente por un profesor-ingeniero, con el fin de realizar un proyecto de aprendizaje para una población determinada de alumnos” (Artigue, 1995, p. 61). Estas secuencias de enseñanza se basan en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, porque dicha teoría sienta las bases de la ingeniería didáctica. Esto se puede ver cuando Artigue (1995) nos menciona que las consecuencias metodológicas de la teorización de las situaciones didácticas de Brousseau condujeron a desarrollar, en oposición con los paradigmas comparativos clásicos de experimentación en clase, la metodología específica de la ingeniería didáctica.

Hay dos niveles en los que la ingeniería didáctica puede realizarse, dependiendo si se busca abarcar aspectos globales o particulares de la enseñanza en la investigación; estos niveles se designan por los nombres de macro-ingeniería y micro-ingeniería respectivamente.

La micro-ingeniería tiene como objetivo el estudio de un tema u objeto específico. Este será el nivel de ingeniería didáctica utilizado en este trabajo, ya que se busca abarcar el objeto particular de la definición de límite de una función real de variable real en un punto. Respecto a la macro-ingeniería, Sampaio & Batista (2018) dicen que permite expresar la complejidad de una investigación de micro-ingeniería como un fenómeno relacionado con la duración de la relación enseñanza-aprendizaje, en resumen, la investigación de macro ingeniería se centra en temas externas al aula de clase, como pueden ser el reglamento del colegio, la dirección, etc.

5.1.Fases de la ingeniería didáctica.

Las fases de la ingeniería didáctica que guían esta investigación, como se mencionó en el planteamiento del problema, son cuatro (Artigue, 2015), y se detallan a continuación.

5.1.1. Análisis preliminares

Esta se considera como la fase de concepción teórica de la ingeniería didáctica, como bien dice el nombre, aquí se realizan análisis de antecedentes que pueden ser relevantes en el transcurso de la investigación. Los antecedentes considerados en este trabajo son:

- Análisis epistemológico del contenido

  Aquí se tocan temas como la evolución histórica del concepto a enseñar, en nuestro caso, de la definición de límite de una función real de variable real en un punto; los fundamentos matemáticos necesarios para su formulación, y algunas de las implicaciones a las cuales lleve el concepto a largo plazo.

- Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.

En este punto se toca la forma en que se enseña habitualmente la definición de límite de una función real de variable real en un punto. En este caso, se basa solamente en la parte teórica a través de los textos de cálculo ya mencionados en el planteamiento del problema, ya que, al momento de redactar estas frases, en la actividad curricular de cálculo diferencial en una variable de la UMCE, los temas asociados al límite ya fueron evaluados.

- Análisis de las concepciones de los estudiantes: sobre las dificultades y obstáculos que determinan la evolución del concepto.

  Este apartado busca considerar las posibles complicaciones o problemas que presenten los estudiantes respecto a la comprensión de la definición del límite de una función real de variable real en un punto. Para esto, se elabora un cuestionario de temas ligados al aprendizaje de tal contenido para algunos de los participantes de la encuesta presentada en el planteamiento del problema, junto a otros estudiantes que accedieron voluntariamente a responder esta segunda encuesta; para luego analizarlas y distinguir las dificultades más relevantes como punto a considerar más adelante en la construcción de la secuencia didáctica.

- Análisis de campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva

  En este punto, se considera el entorno donde se lleva a cabo la aplicación de la secuencia didáctica, que en este caso será en el contexto de clases virtuales debido a la situación nacional de pandemia del COVID-19. Se analizan las posibles complicaciones que esto implica y los efectos que puede producir en el desarrollo y aplicación de la secuencia.

5.1.2. Concepción y análisis a priori

En la etapa de concepción, se inicia la construcción de la secuencia didáctica de actividades de la definición de límite de una función real de variable real en un punto a partir de los análisis preliminares realizados en la primera fase. Esta secuencia se conforma de actividades que sirven como situaciones de enseñanza planificadas de manera intencional, con el fin de que los estudiantes logren un conocimiento específico, es decir, se planifican en base a actividades problematizadoras, cuya resolución o abordaje implique la emergencia del conocimiento matemático que da sentido a la clase. Ahora bien, estas situaciones están interconectadas y relacionan conocimientos nuevos a los ya adquiridos, puesto que el nuevo conocimiento debe tener significado lógico, esto es, que sea potencialmente relacionable con la estructura cognitiva del que aprende, a través de ideas ya conocidas; de manera no arbitraria y sustantiva (Rodríguez, 2013).

Una vez elaborada la secuencia didáctica de actividades, se inicia la formulación de las hipótesis sobre los sucesos que puedan ocurrir durante la fase de experimentación, tanto a nivel de dificultades, como de los posibles resultados a obtener, ya que "el análisis a priori es el momento donde el diseñador de la situación didáctica, antes de la clase, explicita supuestos referidos a: los procesos de enseñanza aprendizaje que se generarán en la situación y los resultados que desea producir" (García, 2007, p. 134), para luego contrastar dichas hipótesis con los resultados reales obtenidos de la experimentación, que se examinan en el análisis a posteriori.

5.1.3. Experimentación

En esta fase se implementa la secuencia didáctica de actividades, ya elaborada en la etapa de concepción, a estudiantes que se encuentren cursando la actividad curricular de cálculo diferencial en una variable. Esta se aplica en una clase y se trabajan desde aquí las actividades planteadas en la secuencia.

Al finalizar la implementación de las actividades de la secuencia, se pedirá a los estudiantes que respondan un cuestionario de preguntas sobre los contenidos tratados a lo largo de la secuencia, para evaluar y posteriormente contrastar los resultados obtenidos con las hipótesis planteadas durante el análisis a priori en la fase de análisis a posteriori.

5.1.4. Análisis a posteriori

Finalmente, como se mencionó en los apartados anteriores, en esta fase se analizan y esquematizan los resultados obtenidos, esto a partir de un contraste con las hipótesis planteadas en el análisis a priori para ver el cumplimiento o no de éstas respecto a los resultados. Con esto se hace uso de la validación interna que nos proporciona la teoría a través de este contraste, enfatizando aspectos que hayan contribuido al aprendizaje de la definición de límite de una función real de variable real en un punto, u otros que no hayan sido considerados en las primeras etapas y que también se evalúan como variables influyentes al momento de lograr dicho aprendizaje.

6. Análisis Preliminares

6.1.Introducción.

Como se mencionó en el marco metodológico, aquí se revisan diversos aspectos que puedan servir de referencia y así facilitar la construcción de la secuencia didáctica de actividades de la definición de límite de una función real de variable real en un punto.

6.2.Análisis Epistemológico del Contenido.

Se inicia este apartado con una revisión histórica de la evolución que ha tenido la definición de límite de una función real de variable real en un punto. Para esto, se consideran los trabajos de Rendón (2017) y Sánchez (2012), ya que estos autores realizaron un trabajo sobre el concepto de límite.

6.2.1. Análisis histórico.

En su tesis, Rendón (2017) hace una reconstrucción histórica acerca del límite como un concepto general, considera diversos aspectos de este para su trabajo, como las aplicaciones que tiene, su surgimiento desde la antigua Grecia, los objetos matemáticos con los cuales se puede relacionar el límite (funciones, sucesiones y series), etc. Mientras que Sánchez (2012) en sus primeros apartados también realiza una revisión histórica del concepto de límite. En este caso, solo se mencionan algunos de los hitos que guardan relación con la definición de límite de funciones reales en un punto.

A pesar de que el concepto de límite tiene sus orígenes en la antigua Grecia, es recién en la época de Newton (s. XVII) cuando se puede vislumbrar lo que serían los primeros esfuerzos por entregar una definición formal de límite, en el momento en que publica su obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, que contiene el lema I:

> **Definición de Newton (Lema I)**. Las cantidades, y también las proporciones de las cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden constantemente a la igualdad, y que antes del final de ese tiempo se acercan tan cerca unas de otras que su diferencia es menor que cualquier cantidad dada, se vuelven finalmente iguales (Newton citado Rendón, 2017, p. 61).

Aquí hay que hacer una pausa, pues las cantidades y las razones de cantidades a las que se hace referencia, se acercan a otras que Newton llama razones últimas, las cuales define como "los límites hacia los cuales se aproximan constantemente las razones de cantidades, que decrecen sin límite, y hacia los cuales pueden aproximarse tanto como cualquier diferencia dada, pero sin sobrepasarlos o alcanzarlos antes de que las cantidades disminuyan indefinidamente" (Sánchez, 2012, p. 20).

Otro matemático que hizo aportes a la definición de límite fue D' Alembert (s. XVIII), quien dice:

> **Definición de D'Alembert.** Una cantidad (...) es el límite de otra cantidad si la segunda se puede aproximar la primera más que cualquier otra cantidad dada que sea tan pequeña como se pueda suponer, siempre que la cantidad no supere a la cual se está acercando, tal que la diferencia entre la cantidad y su límite es absolutamente indeterminable (D'Alembert citado en Rendón, 2017, p 58).

Se puede apreciar que esta definición guarda estrecha similitud a la idea entregada por Newton un siglo antes, con la diferencia de que aquí se explicita que la diferencia entre la una cantidad y su límite debe ser positiva, ya que esta cantidad no puede superar el valor del límite al cual se está acercando. Esto es algo llamativo, por cuanto puede llevar a pensar que la evolución de la definición de límite durante dicho siglo no presentó cambios significativos, a pesar de haber distintos trabajos relacionados con el concepto.

Posteriormente, a inicios del siglo XIX, se destaca la figura de Cauchy, quien se basa en la definición de D'Alembert, pero tomando un aspecto más aritmético para formular su propia definición, evitando así la geometría de los infinitesimales y las razones de cambio para entregar mayor rigurosidad a dicha definición (Sánchez, 2012). Su definición es:

> **Definición de Cauchy.** Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás" (Boyer citado en Sánchez, 2012, p.22).

Respecto a la definición de Cauchy, se debe señalar que en su época, Cauchy trabajó con límites de variables, no de funciones; es más, Rendón (2017) señala que en su libro de análisis, Cauchy nunca define el límite de funciones, solamente el límite de variables (la señalada anteriormente), quien entiende por variable a aquellas cantidades que pueden tomar un número distinto de valores.

También, otra cuestión que se le puede atribuir a Cauchy respecto a la definición de límite es que define lo que son los infinitésimos o infinitesimales como el estado de las variables que tienen límite cero (Rendón, 2017), sin embargo, evita considerar el carácter geométrico que representan, para darles una visión más aritmética en su trabajo.

Luego, se llega a las contribuciones de Weierstrass y Heine (s. XIX), que inician la llamada aritmetización del análisis al entregar su definición de límite:

> **Definición de Heine-Weierstrass.** Si dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para 0< η <η_0, la diferencia $f(x \pm \eta) - L$es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x = x_o$(Boyer citado en Sánchez, 2012, p. 23)

Esta definición es importante porque, como se puede ver, traduce los conceptos matemáticos de palabras a símbolos aritméticos, cuestión que no se había evidenciado hasta el momento. También vale decir que esta definición, añadiendo unas modificaciones, es la que suele usarse actualmente como definición formal de límite de una función real de variable real en un punto. Estos cambios son: reemplazar η_0 por δ pedir que ε sea un valor positivo y la inclusión de los valores absolutos como distancias.

Por último, se menciona que, a partir del Siglo XX, con el alto grado de abstracción logrado por los matemáticos, el concepto de límite fue generalizado a conjuntos que no son necesariamente numéricos, sino a estructuras más generales llamadas espacios topológicos; los que permitieron expandir varias ideas del cálculo a funciones más generales entre dichos espacios, por las características que estos poseen (Sánchez, 2012).

6.3.Fundamentos matemáticos necesarios para la formulación de la definición de límite.

Por lo ya mencionado, se puede decir que a pesar de que la definición formal de límite de una función real de variable real en un punto fue formulada varias veces durante la historia, fue durante el siglo XIX donde se llegó a una definición con símbolos aritméticos en forma preliminar y posteriormente pasó a convertirse en la definición que actualmente es utilizada en los cursos de cálculo.

Ahora, se mencionan los elementos que son necesarios para la formulación y comprensión de esta definición:

Primero que todo, se necesita un conocimiento claro acerca de los símbolos lógicos que aparecen en ella, como el conectivo condicional y los cuantificadores. También es necesario el saber trabajar con estos símbolos, ya que para probar un límite usualmente se parte buscando una equivalencia de la distancia de $f(x)$ al límite L para encontrar un delta adecuado para la hipótesis.

El concepto de distancia en la recta real, que se define como el valor absoluto de la diferencia entre dos puntos (o números) a y b, es decir, $|a-b|$ o $|b-a|$ aparece tanto en el antecedente, como en el consecuente de la definición ($|x-a|$y $|f(x)-L|$). Además, esta definición también es necesaria para la interpretación de las proposiciones$|x-a|<\delta$ y $|f(x)-L|<\varepsilon$ como distancias menores que un valor numérico, que posteriormente podrán también ser usadas para definir vecindades de centro en a y L con radio δ y ε respectivamente.

Comprender el concepto de punto de acumulación, puesto que, en la definición del límite de una función real de variable real en un punto, es una condición indispensable. El punto debe ser punto de acumulación del dominio de la función para asegurar que todos los elementos de la vecindad tengan imagen por f, que se espera demostrar que están tan cerca como se quiera de L. Esto es importante en el sentido de que no es necesario que la función esté definida en un punto específico para buscar el límite en dicho punto, pero tampoco basta con que solamente esté definida en dicho punto. Dicha condición se puede visualizar también en la hipótesis $0<|x-a|<\delta$; pues como la distancia entre x y $a$debe ser positiva, x es distinto de a.

6.3.1. Implicaciones a las cuales lleva la definición de límite.

La noción de límite distingue al Cálculo de otras ramas de la matemática, a tal punto es su importancia, que se puede decir que el Cálculo es el estudio de límites. Con este concepto se construyen otros de mucha importancia en la matemática misma como la continuidad, la derivada y la integral definida. El concepto de límites es también primordial para muchos problemas de otras disciplinas, como física, ingeniería y ciencias sociales y otras.

6.4. Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos

En este punto se dispone a realizar un pequeño análisis respecto a la forma en que se enseña la definición del límite de una función real de variable real en un punto en los libros que anteriormente se mencionaron.

Es importante considerar este apartado ya que, como dice Sánchez (2012), la práctica de la enseñanza no está tan determinada por decretos formales como por los libros de texto utilizados para enseñar; más aún en la universidad, donde se puede encontrar una extensa variedad de autores por los cual guiarse para aprender o enseñar.

Delgado (1998) en su tesis explica que existen dos formas de comprender el concepto del límite de una función en un punto; una procedimental, donde, como su nombre lo indica, se espera que los estudiantes sigan una serie de procedimientos para llegar a la solución del problema, mientras que, en la otra, la forma estructural, se abre paso al pensamiento de los procesos, para focalizarse en los elementos esenciales que se requieren para la solución de un problema. A pesar de que aquí Delgado se refiere generalmente al concepto de límite, esto se puede extrapolar también a la definición que se está trabajando; ya que se puede considerar que al tomar la definición del límite de una función real de variable real en un punto como una forma de algoritmo, donde solo se trabaja simplemente la parte $|f(x) - L|$ para llegar a una forma más sencilla (donde comúnmente se encuentra la expresión $|x - a|$) y así encontrar un δ en función de ε, se está trabajando de una forma procedimental. Mientras que se puede considerar el adentrarse en el conocimiento de los conceptos que componen la definición (como las vecindades o el punto de acumulación) como una forma de trabajo estructural.

Teniendo en cuenta lo anterior, y de acuerdo con lo trabajado de los textos en el planteamiento del problema y en el marco referencial, se pueden asociar los libros de Apostol (1984), Spivak (2012) y Stewart (2017) con una forma de comprensión de la definición de límite de una función real de variable real en un punto. Esta se clasifica en la siguiente tabla.

Tabla 5.

Comprensión de la definición de límite de una función real de variable real en un punto en los textos de Apostol, Spivak y Stewart

Apostol	Spivak	Stewart
A pesar de que este libro no presenta la notación $\varepsilon - \delta$ usada habitualmente, se considera que trabaja los ejemplos de forma procedimental, ya que una vez dada la definición en términos de entornos (vecindades), se limita a dar/encontrar un entorno que cumpla con la condición necesaria para demostrar el límite por definición.	En este libro se aprecia un enfoque combinado, ya que inicialmente se trabajan los ejemplos con apoyo de un gráfico y teniendo en consideración la idea de distancia y de vecindades; luego se focaliza en la forma procedimental, donde se encuentra un delta útil para demostrar los límites; esto claro, con un análisis que puede resultar complejo de comprender para estudiantes que están iniciándose en el estudio del límite, debido a que se aplican propiedades que no son muy familiares en algunas ocasiones.	Aquí podemos visualizar un tratamiento similar al libro de Spivak, pues también parte tomando un enfoque estructural, para luego pasar a trabajar los ejemplos de forma procedimental; con la diferencia de que aquí se da todo un apartado para interpretar los símbolos aritméticos que aparecen en la definición, como los valores absolutos en términos de distancias y los intervalos abiertos; también menciona que el punto x al que tiende el límite no debe ser igual a a, pero sin hacer énfasis, ni mencionar que debe ser punto de acumulación del dominio de la función.

Fuente: elaboración propia

Respecto a esto, se debe señalar que el enfoque o forma procedimental no es completamente perjudicial, pues al fin y al cabo esto es algo que se debe saber utilizar para poder demostrar el límite de una función real de variable real en un punto; pero sí puede resultar que los estudiantes que solo manejan una comprensión procedimental no lleguen a desarrollar una percepción completa de la definición, y por tanto, no puedan enfrentar problemas sobre ella que involucren aspectos como el punto de acumulación. Un problema que podría generarse al no dominar una comprensión estructural puede ser también el de no poder probar que cierto número no es el límite de una función, o que una función no tiene límite en un punto.

6.5. Análisis de las concepciones de los estudiantes: sobre las dificultades y obstáculos que determinan la evolución del concepto

Como se estableció en el marco metodológico, luego de tener las opiniones respecto de las dificultades en torno al aprendizaje de este contenido, se diseñó y aplicó un instrumento relativo a la definición de límite de una función en un punto, en el cual participaron treinta estudiantes del departamento de Matemática de la UMCE de manera voluntaria. Se les solicitó responder las preguntas de los ejercicios que se muestran a continuación:

1.- Considerando la función $f(x) = 3x + 1$, responda:

a) Si se sabe que x está a una distancia menor que 0,01 de 2, ¿cuál es el mínimo valor que la distancia de $f(x)$ a 7 no puede sobrepasar?

b) ¿Cuál es el mínimo valor que no puede sobrepasar la distancia de x a 1, para que la distancia de $f(x)$ a 4 sea menor que 0,05? ¿Qué relación existe entre 0,05 y el número encontrado?

c) Respecto al apartado anterior, si la distancia de x a 1 es menor que 0,01, ¿se cumple lo pedido? ¿y si es mayor que 0,5? ¿Cuál es el mayor intervalo de valores que cumple lo pedido?

Recordar: lo pedido es que la distancia de $f(x)$ a 4 sea menor que 0,05.

d) ¿Cuál es el mínimo valor que no puede sobrepasar la distancia de xa 1, para que la distancia de $f(x)$ a 4 sea menor que a con $a > 0$? ¿Se puede encontrar dicha distancia para cualquier a? Argumente.

e) demuestre usando la definición formal del límite que $\lim_{x \to 1} f(x) = 4$.

2.- Sea la función $f(x) = x^2$, con $x \epsilon (0,2) \cup \{3\}$.

a) ¿A qué distancia debe estar $x$de 3 para que la distancia de $f(x)$ a 9 sea menor que 1?

b) ¿Se puede decir qué $\lim_{x \to 3} f(x) = 9$? Argumente su respuesta.

3.- si se tiene la función $f(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x \in \mathbb{Z} \\ 0 \ si \ x \notin \ \mathbb{Z} \end{cases}$. En términos de la definición formal del límite, ¿puede encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ se cumpla que la distancia de xa 1 este entre 0 y δ y la distancia de $f(x)$a 1 sea mayor que dicho épsilon? En caso de afirmación entregue el valor numérico de dicho épsilon. ¿Qué puede concluir de $\lim_{x \to 1} f(x)$ con esto?

Nota: Acotamos aquí que hubo un error en la tercera pregunta, y es que, en realidad, se debió pedir que la distancia de $f(x)$ a 1 sea mayor o igual que épsilon; pero la pregunta no fue eliminada debido a que un estudiante proporcionó una respuesta bastante acertada de ella.

6.5.1. Criterio de evaluación de las respuestas de los estudiantes al instrumento.

El criterio para considerar una respuesta correcta fue el siguiente:

Pregunta 1.

a) Se considera una respuesta correcta si el estudiante expresa lo planteado en la pregunta en un lenguaje simbólico y utiliza propiedades de las desigualdades para entregar una respuesta en términos de distancia.

b) Se considera una respuesta correcta si el estudiante expresa lo planteado en la pregunta en un lenguaje simbólico, utiliza propiedades de las desigualdades para entregar una respuesta en términos de distancia y expresa la relación pedida.

c) Se considera una respuesta correcta si expresa una deducción que le permita afirmar que valores de delta entre 0 y $\frac{0,05}{3}$ cumplen con lo requerido, mientras que para valores mayores que $\frac{0,05}{3}$ no se puede afirmar que se cumple lo pedido.

d) Se considera una respuesta correcta si el estudiante expresa lo planteado en la pregunta en un lenguaje simbólico, utiliza propiedades de las desigualdades para entregar una respuesta en términos de distancia, y establece que para cualquier $a > 0$ se puede encontrar la distancia pedida.

e) Se considera una respuesta correcta si el estudiante demuestra el límite mediante la definición formal, afirmando que delta es un tercio de épsilon.

Pregunta 2.

a) Se considera una respuesta correcta si el estudiante argumenta que la única distancia que cumple lo pedido es cero, puesto que en el dominio de la función el único valor que cumple lo pedido es $x = 3$.

b) Se considera una respuesta correcta si el estudiante argumenta que el límite no existe debido a que x=3 no es un punto de acumulación del dominio de la función, lo que es un requisito para la existencia de límite en un punto (o si en conjunto con esto, considera información de la pregunta anterior para fundamentar su respuesta).

Pregunta 3.

Se considera una respuesta correcta si el estudiante utiliza que cualquier vecindad de 1 de radio positivo contiene números diferentes de 1 que no son enteros, por tanto, la distancia de su imagen (nula) a 1 es 1, y con esto llega a que basta considerar $0 < \varepsilon < 1$para concluir que 1 no es límite de la función cuando x tiende a 1.

En la figura 1 se presenta un gráfico de barras del porcentaje de estudiantes que respondieron correctamente respecto a cada pregunta del cuestionario.

Tabla 6

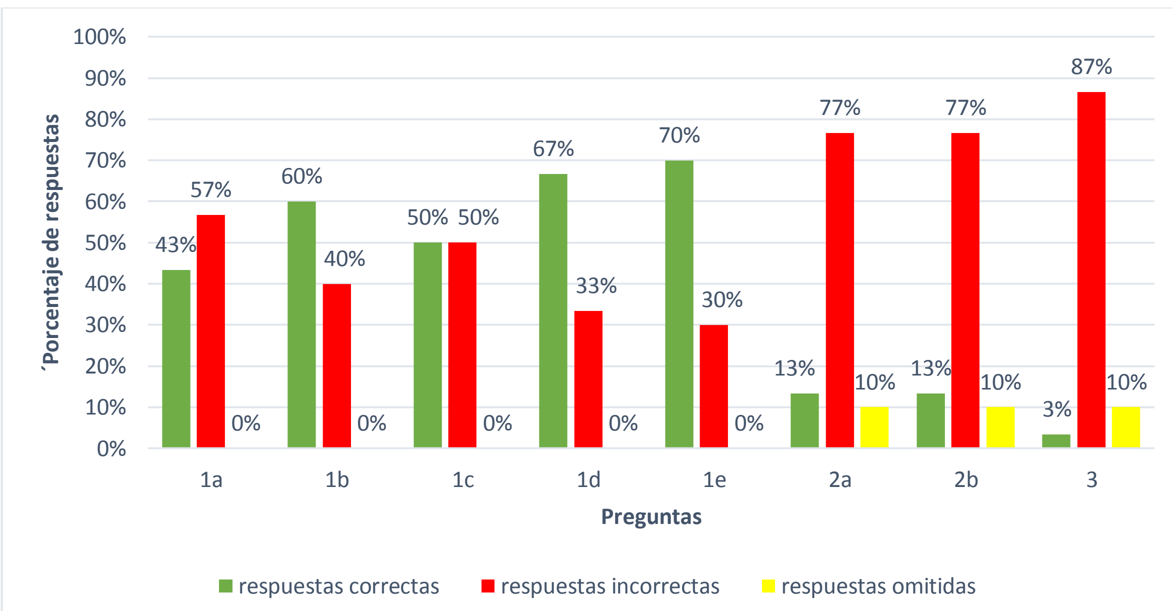
Tabla de frecuencias de las respuestas de los estudiantes al primer *cuestionario*

preguntas	correcto	incorrecto	omitido
1a	13	17	0
1b	18	12	0
1c	15	15	0
1d	20	10	0
1e	21	9	0
2a	4	23	3
2b	4	23	3
3	1	26	3

Fuente: elaboración propia.

Figura 1.

Gráfico Del Porcentaje De Estudiantes Que Respondieron Las Preguntas Del Cuestionario 1



Fuente: Elaboración propia.

El objetivo de los ítems de la primera pregunta era saber si los estudiantes eran capaces de asociar el concepto de distancia a un lenguaje simbólico y lograban utilizar propiedades de las desigualdades (o de los valores absolutos) para responder ~~a~~ las preguntas. También se buscó visualizar si los estudiantes lograban asociar dichos conceptos con la definición formal de límite, yendo de casos particulares a lo más general.

Ahora, teniendo en cuenta lo anterior, en el gráfico se puede apreciar claramente que una gran cantidad de los estudiantes que contestaron la encuesta no son capaces de asociar el concepto de distancia a la definición formal de límite; pues, además de que solo el 70% de estudiantes que realizó el cuestionario hizo correctamente la demostración por definición en la pregunta 1e (y el 67% realizó de manera correcta la pregunta 1d, que es equivalente), sólo el 60% de los participantes contestó de manera correcta la pregunta 1b, que es semejante a la definición del límite, pero con un valor particular de épsilon.

Respecto a la pregunta 1a, se evidencia que hay problemas cuando se le pide a los estudiantes encontrar un valor épsilon dado un delta particular, que es el proceso inverso al cual se acostumbra a trabajar. Se pueden notar a continuación dos tipos de respuestas usuales que entregaron los estudiantes.

6.6.Análisis de respuestas de los estudiantes al cuestionario 1

Imagen 6.

Respuesta del estudiante 2 a la pregunta 1a.

Sabemos que $|x-2|<0{,}01$

Se pide ε que cumple con $|f(x)-7|<\varepsilon$

Luego $|f(x)-7| = |3x+1-7| = |3x-6|$
$= |3(x-2)| = |3| * |x-2|$

Así $|f(x)-7| < a \Leftrightarrow |3| * |x-2| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow 3|x-2| < \varepsilon$

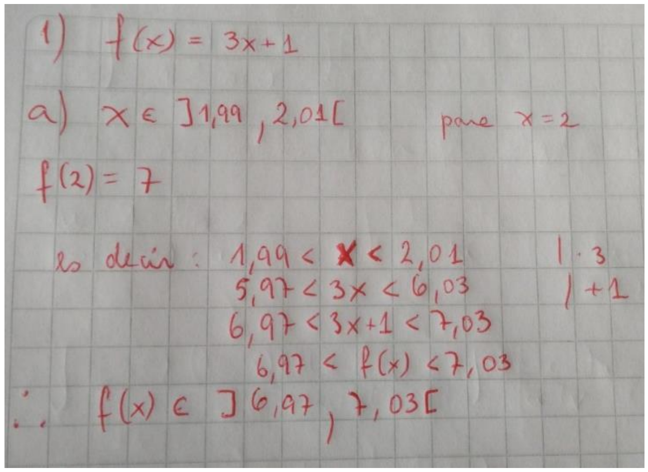
Como $|x-2| < 0{,}01 \Rightarrow 3|x-2| < 3 * 0{,}01$
$\Leftrightarrow |3| * |x-2| < 0{,}03 = \varepsilon$

$\therefore$ el mínimo valor que la distancia de $f(x)$ a 7 no puede sobrepasar, el 0,03.

Se puede apreciar aquí que el estudiante 2 presenta un trabajo correcto con valores absolutos interpretados como distancia; y además de no pedirlo, asocia elementos propios de la definición formal de límite en un punto, como es el símbolo "ε".

Imagen 7.

Respuesta del estudiante 29 a la pregunta 1a.



El estudiante 29 no trabajó explícitamente con valores absolutos, pero sí es capaz de interpretar la información entregada en lenguaje simbólico con desigualdades y entregando intervalos abiertos a los cuáles pertenecen x y $f(x)$. Sin embargo, no entrega una respuesta explícita en términos de distancia, a pesar de que su desarrollo permite entregar la respuesta, aunque incompleta respecto a lo solicitado.

Un error común cometido por algunos estudiantes al desarrollar sus respuestas es despejar $|x-2|$ desde $|f(x)-7|$ y simplemente reemplazar $|x-2|$ por 0,01. Un ejemplo se muestra en las siguientes figuras.

Imagen 8.

Respuesta del estudiante 4 a la pregunta 1a

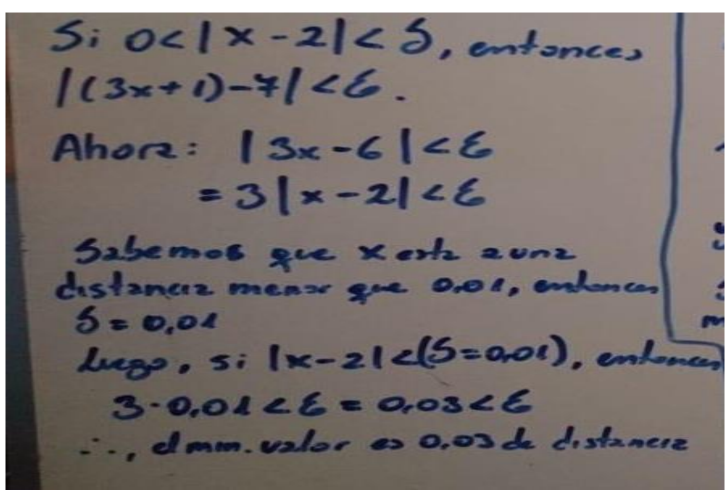
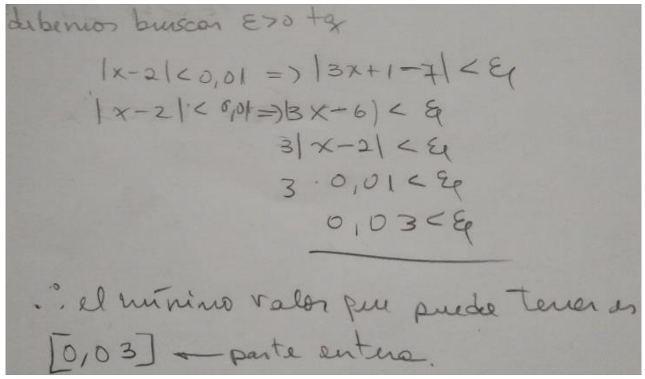


Imagen 9.

Respuesta del estudiante 22 a la pregunta 1a


debemos buscar $\varepsilon > 0$ tq

$|x-2| < 0,01 \Rightarrow |3x+1-7| < \varepsilon$

$|x-2| < 0,01 \Rightarrow |3x-6| < \varepsilon$

$3|x-2| < \varepsilon$

$3 \cdot 0,01 < \varepsilon$

$0,03 < \varepsilon$

∴ el mínimo valor que puede tener es

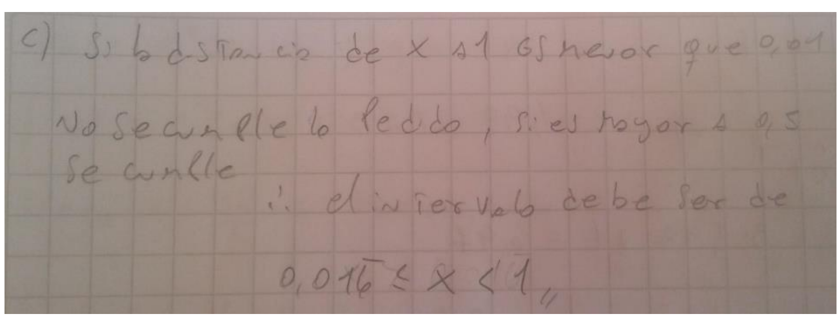
$[0,03]$ ← parte entera.

Con esto, se puede evidenciar que aquellos estudiantes que respondieron de una manera similar y llegaron a qué $0{,}03 < \varepsilon$; si bien son capaces de interpretar distancias en términos de valores absolutos, presentan problemas al momento de utilizar propiedades de las desigualdades y deducciones lógicas.

Se señala que en la pregunta 1c es difícil categorizar los errores cometidos por los estudiantes, ya que dentro del 50% de las respuestas que se consideraron incorrectas, se encuentran errores de carácter muy variado, entregan muy poca información u omiten la pregunta. A continuación, se presentan algunos ejemplos de esto.

Imagen 10.

Respuesta del estudiante 8 a la pregunta 1c


c) Si la distancia de x a 1 es menor que 0,01

No se cumple lo pedido, si es mayor a 0,5

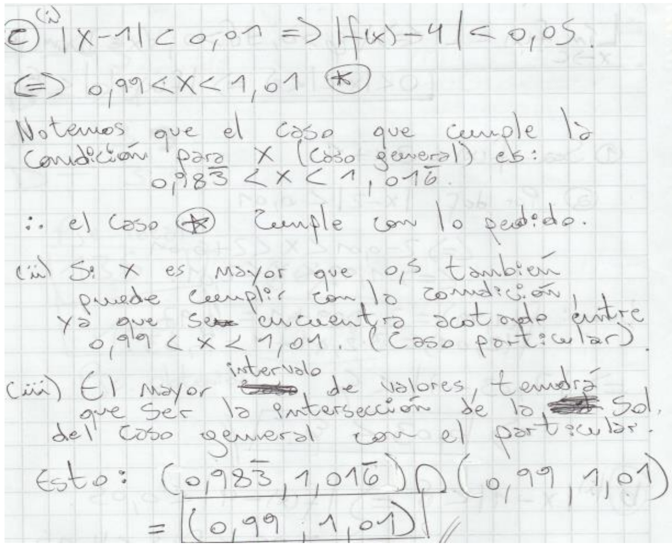
se cumple

∴ el intervalo debe ser de

$0,01\overline{6} \leq x < 1$

Imagen 11.

Respuesta del estudiante 16 a la pregunta 1c



c) (i) $|x-1|<0{,}01 \Rightarrow |f(x)-4|<0{,}05$

$\Leftrightarrow 0{,}99<x<1{,}01$ (*)

Notemos que el caso que cumple la condición para x (caso general) es:

$0{,}98\overline{3} < x < 1{,}01\overline{6}$.

∴ el caso (*) cumple con lo pedido.

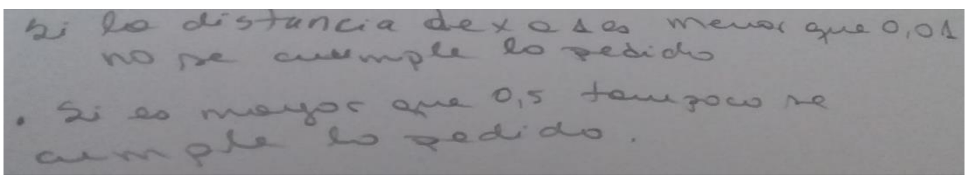
(ii) Si x es mayor que 0,5 también puede cumplir con la condición ya que se encuentra acotado entre $0{,}99 < x < 1{,}01$. (caso particular).

(iii) El mayor intervalo de valores tendrá que ser la intersección de la sol. del caso general con el particular.

Esto: $(0{,}98\overline{3}, 1{,}01\overline{6}) \cap (0{,}99, 1{,}01) = \boxed{(0{,}99, 1{,}01)}$

Imagen 12.

Respuesta del estudiante 17 a la pregunta 1c



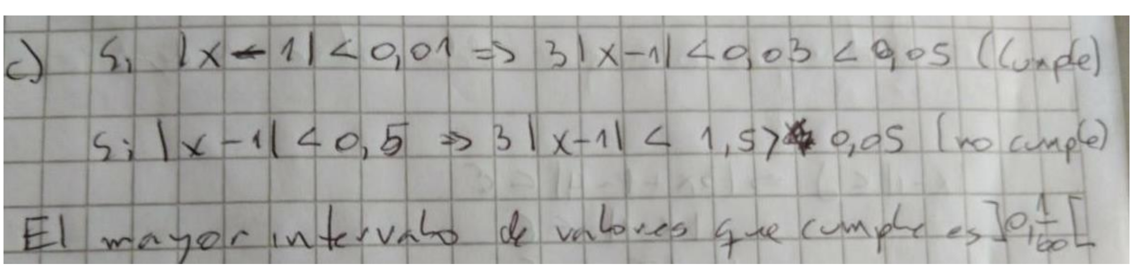
Si la distancia de x a 1 es menor que 0,01 no se cumple lo pedido

• Si es mayor que 0,5 tampoco se cumple lo pedido.

Lo que sí se puede comentar acerca de la pregunta 1c, es que la mayoría de los estudiantes que la respondieron de manera correcta, utilizaron propiedades de los valores absolutos para llegar a la conclusión o utilizaron información del apartado anterior. A continuación, se muestra el desarrollo de un estudiante que, a pesar de no llegar exactamente al intervalo correcto de valores que puede tomar δ, solo le faltó considerar un número (el $\frac{1}{60}$).

Imagen 13.

Respuesta del estudiante 15 a la pregunta 1c



c) Si $|x-1|<0{,}01 \Rightarrow 3|x-1|<0{,}03<0{,}05$ (cumple)

Si $|x-1|<0{,}5 \Rightarrow 3|x-1|<1{,}5>0{,}05$ (no cumple)

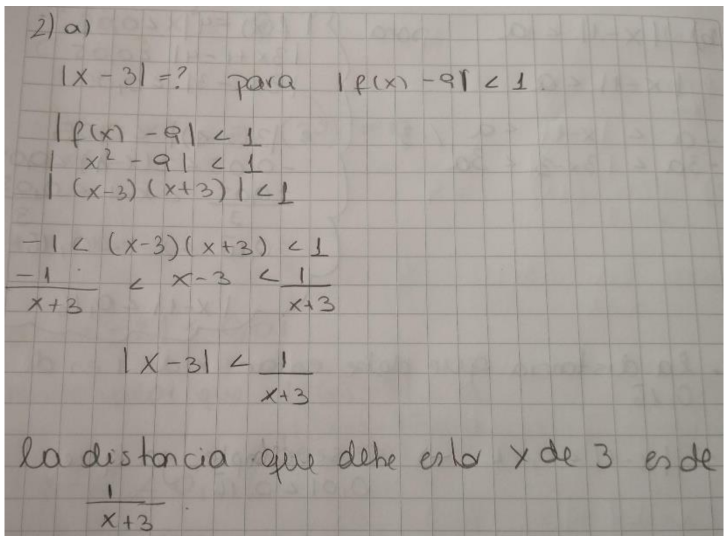
El mayor intervalo de valores que cumple es $]0,\frac{1}{60}[$

Continuando con la pregunta 2, se nota que, en cada apartado, solo un 13% de los estudiantes contestó de manera correcta la pregunta, por lo que ahora se evidencian solamente los errores más usuales.

En la pregunta 2a) un error usual fue el de tomar un delta que contuviera la variable x, como se muestra en la siguiente figura.

Imagen 14.

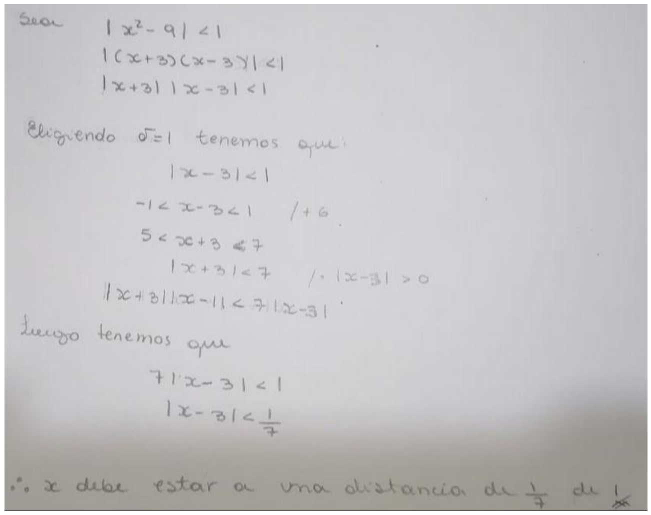
Respuesta del estudiante 6 a la pregunta 2a



También, otra estrategia utilizada de manera frecuente en la respuesta fue elegir un $\delta \leq 1$ para acotar la expresión $|x + 3|$, para luego llegar a que la condición necesaria que se debe cumplir para conseguir lo solicitado es que la distancia de x a 3 sea menor a $\frac{1}{7}$, sin reparar en el hecho que alrededor del número 3 no hay elementos del dominio de la función. - Un caso se presenta a continuación:

Imagen 15.

Respuesta del estudiante 5 a la respuesta 2a



Sea $|x^2-9|<1$

$|(x+3)(x-3)|<1$

$|x+3|\,|x-3|<1$

Eligiendo $\delta=1$ tenemos que:

$|x-3|<1$

$-1<x-3<1 \quad /+6$

$5<x+3<7$

$|x+3|<7 \quad /\cdot |x-3|>0$

$|x+3|\,|x-1|<7\,|x-3|$

Luego tenemos que

$7\,|x-3|<1$

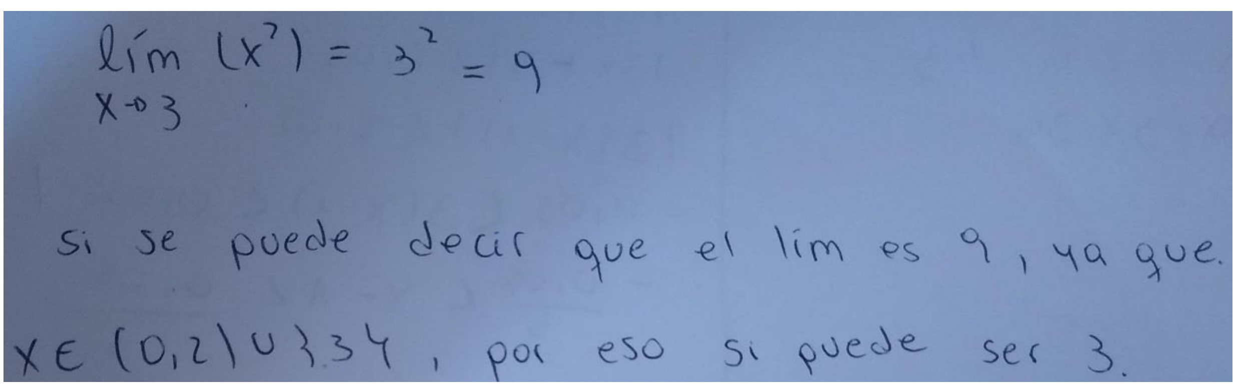
$|x-3|<\frac{1}{7}$

$\therefore$ x debe estar a una distancia de $\frac{1}{7}$ de 1

Para la pregunta 2b se señala que solamente el 63% (19) de los estudiantes la contestaron; y de ellos, el 58% (11 estudiantes) cometió el error de considerar el límite como la función $f(x)$ evaluada en 3, no teniendo en consideración que el punto $x = 3$ no es un punto de acumulación del dominio de $f(x)$, como se muestra a continuación.

Imagen 16.

Respuesta del estudiante 7 a la pregunta 2b



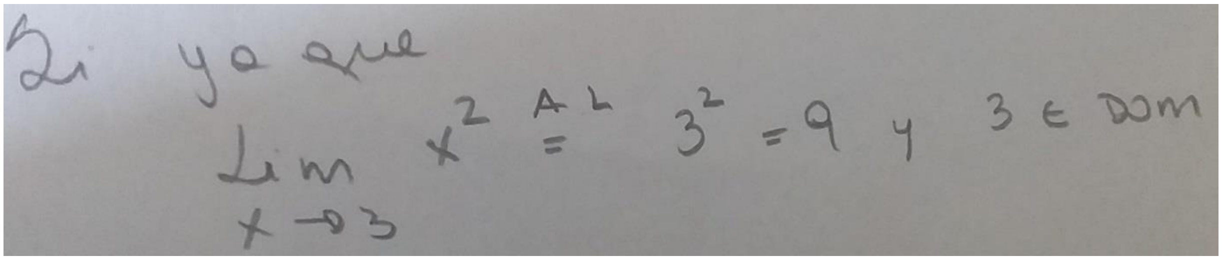
$\lim_{x\to 3}(x^2) = 3^2 = 9$

si se puede decir que el lím es 9, ya que.

$x \in (0,2)\cup\{3\}$, por eso si puede ser 3.

Imagen 17.

Respuesta del estudiante 17 a la pregunta 2b



Finalmente, en la pregunta 3 se añade que sólo cuatro de los estudiantes que participaron en la encuesta enviaron una respuesta, y de ellos, solo uno proporcionó una respuesta completamente correcta, la cual se añade en la siguiente figura.

Imagen 18.

Respuesta del estudiante 27 a la pregunta 3

No se puede encontrar un epsilon mayor que cero que cumpla lo pedido para todo x, pues considerando el contraejemplo cuando delta es igual a 1,1, tenemos que si la distancia entre x y 1 está entre 0 y delta entonces esa distancia podría perfectamente ser igual a 1. En ese caso x sería igual a 0 o a 2, por lo tanto f(x) sería igual a 1. Por lo tanto la distancia entre f(x) y 1 sería igual a cero, en cuyo caso esa distancia no sería mayor a epsilon.
En caso de limitarnos a considerar valores pequeños para delta, podríamos ver que si delta es menor que 1, entonces se cumpliría que cuando x y 1 estan a una distancia positiva menor que delta, la distancia entre f(x) y 1 sería igual a 1, pues si la distancia entre x y 1 es menor que 1, entonces el único valor entero que podría tomar x sería el mismo 1, pero eso no puede ser porque adempas la distancia debe ser mayor a cero. Luego sabemos que x no es entero, por lo que f(x)=0. En este caso, podemos considerar un epsilon cualquiera menor que 1 y se cumpliría lo pedido (por ejemplo epsilon igual a 0,5).
Respecto a la última pregunta, vemos que existen epsilons tales que para todo delta pequeño se cumple que aunque la distancia entre x y 1 sea positiva y menor que delta, la distancia entre f(x) y 1 es mayor a epsilon. Por lo tanto podemos concluir que el límite de f cuando x tiende a 1 NO es 1.

6.7. Análisis De campo de Restricciones Donde Se Va a Situar La Realización Didáctica Efectiva

Como se menciona en el marco metodológico, en este apartado se decide dónde se realizará la secuencia de actividades de aprendizaje, respecto a la definición del límite de una función real de variable real en un punto:

En consecuencia, se decide que la secuencia didáctica de actividades se realizará en la AC (actividad curricular) Cálculo Diferencial en una Variable correspondiente al plan de estudios de la carrera Pedagogía en Matemática de la UMCE, que se dicta el segundo semestre del año 2020 y consta de 13 estudiantes inscritos. Previo a esta asignatura, los estudiantes han aprobado la AC Procesos Infinitos y algunos de ellos están cursando la asignatura de Cálculo en segunda instancia. Esta actividad de secuencia se aplica en un contexto de aula virtual debido a la pandemia de COVID-19 que afecta al país, impidiendo que la secuencia sea aplicada de forma presencial. Esta situación disminuye enormemente la interacción y dinamismo en la clase, además de impedir que el docente observe la concentración, la reacción y seguimiento del desarrollo de actividades propuestas. También es un inconveniente el hecho que los estudiantes deberán responder a las actividades en forma remota y se espera que suban su desarrollo a una plataforma dentro del tiempo adecuado. Se agrega la dificultad de que los estudiantes cuenten con los elementos tecnológicos y conexión a internet para seguir la clase.

Como la asignatura no fue asignada a nuestra profesora guía de tesina, fue necesario apelar a la buena voluntad del docente que dicta el curso, quien tuvo la amabilidad de ceder dos sesiones para la aplicación de este trabajo, por lo cual la secuencia de actividades se adapta al tiempo que nos fue concedido.

6.8.Conclusiones

Como se puede observar en el análisis histórico analizado, desde la época en que empezaron a formarse las ideas centrales para definir el límite, la distancia juega un punto crucial, pues desde la época de Newton hasta la definición entregada por Weierstrass y Heine, si bien se estudia el límite de conceptos distintos, siempre se relaciona la idea de distancia en estos.

Posteriormente, se observó que los libros de Spivak y Stewart presentan un enfoque combinando una comprensión tanto estructural como procedimental, ya que inician vinculando ideas como el de distancia a la de límite, para después seguir con ejemplos realizados de manera más procedimental; el trabajo estructural se ve más claramente en el texto de Stewart, ya que entrega un apartado completo dedicado a la vinculación de ideas como las de desigualdades y distancia a la de límite. Por otro lado, el texto de Apostol abarca una forma de trabajo completamente procedimental, ya que no vincula ninguno de los aspectos mencionados anteriormente de manera explícita a la definición de límite, sino que se limita a resolver los ejercicios cumpliendo los requerimientos entregados de su definición.

En el cuestionario a los estudiantes que ya cursaron cálculo diferencial en una variable, se logró observar un escaso manejo del concepto de punto de acumulación, y la importancia que este tiene dentro de la definición de límite de una función en un punto, además de la poca comprensión de un enunciado que contiene la negación de la definición de límite, por lo que se toman como aspectos a considerar dentro de la construcción de la secuencia.

Se toma en consideración que el profesor del curso introdujo la definición de punto de acumulación de un conjunto cualquiera.

Para finalizar, debido a la limitación del tiempo, solo se consideran aspectos como la distancia, el punto de acumulación y el trabajo con la negación de la definición de límite dentro de la secuencia didáctica de actividades, pero también podría ser de utilidad considerar otros aspectos, como, por ejemplo, el de utilizar los cambios históricos que ha sufrido la definición en alguna actividad; pero esto se deja propuesto para futuras investigaciones.

7. Concepción y análisis a priori

7.1.Concepción de la secuencia didáctica de actividades.

En este apartado, se desarrollan cuatro actividades que se planea realizar a lo largo de las dos sesiones establecidas anteriormente en el análisis de restricciones. Esto mediante una planificación que tiene como fin de detallar las actividades que serán implementadas. Dentro de la secuencia se dan por entendidos los contenidos de lógica y funciones, además de la definición de punto de acumulación y la idea de vecindad; esto pues los primeros temas fueron temas ampliamente tratados en cursos anteriores, y la definición de punto de acumulación con la idea de vecindad fue trabajada con el profesor del curso en una sesión anterior.

Las cuatro actividades están interconectadas para poder ser llevadas a cabo de manera secuenciada a lo largo de las dos sesiones.

La primera actividad trata sobre el punto de acumulación, específicamente sobre la relación que se puede encontrar entre este concepto y el de dominio de funciones reales, para posteriormente dejar en evidencia que para la definición de límite no se requiere que un punto esté en el dominio de la función para poder buscar el límite de la función en dicho punto, sino que este sea un punto de acumulación de su dominio.

Para la segunda actividad, se trabaja con la idea de encontrar una vecindad de las imágenes de cierto radio “D”, dado una vecindad de un punto de acumulación del dominio de una de radio "d", para relacionar los conceptos de intervalos, valor absoluto y distancia; además de encontrar una relación entre dichos radios D y d. Se realiza esta actividad debido a que aquí se trabaja de manera directa con el conectivo condicional, que es como los estudiantes han trabajado usualmente hasta antes de tomar el curso de cálculo diferencial en el transcurso de la carrera.

En la tercera actividad se trabaja de manera inversa a la actividad 2, es decir, se encuentra "d"dado “D”, que es como normalmente se trabaja en la definición de límite, para esto, se utiliza la relación encontrada en la actividad 2. Además, se toma la idea de "d" máximo que compla con lo requerido en el consecuente de la definición, viendo que valores positivos (distancias) menores a dicho d también cumplen con lo requerido, mientras que valores mayores no lo hacen.

Finalmente, en la actividad 4 se entrega la definición formal de límite, reemplazando las letras "d"y "D" por "δ" y "ε" respectivamente. Aquí se trabajan ejemplos de demostración por definición, que es igual a la trabajada anteriormente, pero esta vez de manera más general. También se cierra esta idea de límite con un problema en el que se trabaja implícitamente la negación de la definición, a través de gráficos y palabras.

7.2.Actividades

Tabla 7.

Planificación de la actividad número uno

Actividad 1
Inicio Se da inicio a la actividad recordando la definición del punto de acumulación de un subconjunto A de ℝ, el cual es un valor real "c" que satisface lo siguiente: $\forall\ V\ (c, \delta)$, $[(V(c, \delta) - \{c\}) \cap A] \neq \emptyset$. Esto con la intención de desarrollar el significado de la expresión, la cual es que en toda vecindad de "c" hay otros elementos de A, además de "c" (que puede pertenecer a A o no), es decir, alrededor de "c", y muy cerca de "c", hay otros elementos de A. Según lo anterior, se les pregunta a los estudiantes: ¿Qué ocurre si c es un punto de acumulación del dominio de una función real de variable real f, donde $A = Domf\ \subseteq\ R$ es un intervalo abierto? Esto con la finalidad de llegar a que si "c" es un punto de acumulación de Domf entonces en toda vecindad de "c" hay elementos del dominio de f, es decir, a una distancia pequeña de "c" habrá imágenes reales de la función.
Desarrollo

Luego se trabajan los siguientes ejemplos de funciones para continuar con la idea del punto de acumulación asociado al dominio de estas:

i) $f(x) = \frac{2}{x}$, con $Dom\ f = \mathbb{R} - \{0\}$.

ii) $g(x) = 3x$, con $Dom\ g = \mathbb{R}$.

iii) $h(x) = 3x$, con Dom h = $[2,5[\cup \{6,7\}$.

Para la primera función, se observa que $0 \notin Dom\ f$, pero que todos los elementos cercanos a 0 (negativos y positivos) sí están en él, es decir, si tomamos cualquier vecindad de 0, habrá elementos de $Dom\ f$ en dicha vecindad; por lo que 0 es un punto de acumulación de $Dom\ f$, y todos los elementos cercanos a 0 tendrán imagen real, por ejemplo: $f(0{,}01) = \frac{2}{0{,}01}$ y $f(-0{,}05) = \frac{2}{-0{,}05}$.

Para la segunda función se observa que está definida en todo $\mathbb{R}$ ya que este es el dominio de dicha función, teniendo así que todos los puntos que conforman el $Dom\ g$ son de acumulación, y todos tienen imagen real.

Para la tercera función se observa que los números que son muy cercanos a 6, por ejemplo, aquellos que están a distancia menor que 1 de 6 no están en el dominio, como 5,8; 5,99; 6,0001; 6,015 y por lo tanto no tienen imagen por h. Lo mismo ocurre alrededor del número 7. Por lo tanto, ninguno de ellos es punto de acumulación de $Domh$, pues hay vecindades de dichos puntos que no contienen elementos de $Domh$.

Cierre

Como finalización de la actividad se realiza la pregunta:

¿Para qué queremos que los elementos en la vecindad del punto de acumulación tengan imágenes? Aquí se espera que los estudiantes entreguen ideas para llegar a la conclusión de que esto es necesario para saber en qué conjunto se encuentran dichas imágenes, y si estas están cerca de algún número en particular.

Fuente: elaboración propia.

Tabla 8.

Planificación actividad número dos

Actividad 2

Inicio

Se inicia la actividad recordando que queríamos que en una vecindad de un punto de acumulación del dominio de una función real hubiera elementos del dominio para ver en qué conjunto estaban sus imágenes. Aquí, se realiza un ejemplo de esto, considerando la función $(x) = x^2$, con $Dom\ f$ =]1,3[, y tomando vecindades en torno al número $\frac{3}{2}$, el cual es un punto de acumulación de $Dom\ f$.

Se obtienen tres casos:

En el primer caso se toma una vecindad de $\frac{3}{2}$ de radio 2. Así, tendremos que $x \in V\ (\frac{3}{2}, 2) - \{\frac{3}{2}\}$, entonces $x \neq \frac{3}{2}$ y $0 < |x - \frac{3}{2}| < 2 \Longrightarrow -2 < x - \frac{3}{2} < 2 \Longrightarrow -2 + \frac{3}{2} < x < 2 + \frac{3}{2} \Longrightarrow x \in] -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}[$, aquí se realiza una pausa para notar que este intervalo no está completamente contenido en $Dom\ f$, por lo que existen elementos a los cuales no se les puede estudiar sus imágenes.

En el segundo caso, se toma una vecindad de $\frac{3}{2}$ de radio $\frac{1}{4}$. Así, se tendrá que $x \in V\ (\frac{3}{2},\frac{1}{4}) - \{\frac{3}{2}\} \Rightarrow 0 < |x - \frac{3}{2}| < \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{5}{4} < x < \frac{7}{4}$, $x \neq \frac{3}{2}$, luego $x \in]\frac{5}{4}, \frac{7}{4}[$. Esta vez, notamos que el intervalo sí está contenido en $Dom\ f$, por lo que podemos aplicar f y ver las imágenes de la vecindad, obteniendo que $1{,}5625 < x^2 < 3{,}0625$ o $f(x) \in]1{,}5625;3{,}0625[$.

Para el tercer caso, se toma una vecindad de $\frac{3}{2}$ de radio $\frac{1}{10}$, teniendo que $x \in V\ (\frac{3}{2}, \frac{1}{10}) - \{\frac{3}{2}\} \Longrightarrow x \neq \frac{3}{2} \wedge 1{,}4 < x < 1{,}6$, luego $x \in]1{,}4\ ;\ 1{,}6[$, intervalo que está contenido en $Dom\ f$, por lo que nuevamente podemos encontrar las imágenes de todos ellos, obteniendo que $1{,}96 < x^2 < 2{,}56$ o $f(x) \in]1{,}96; 2{,}56[$.

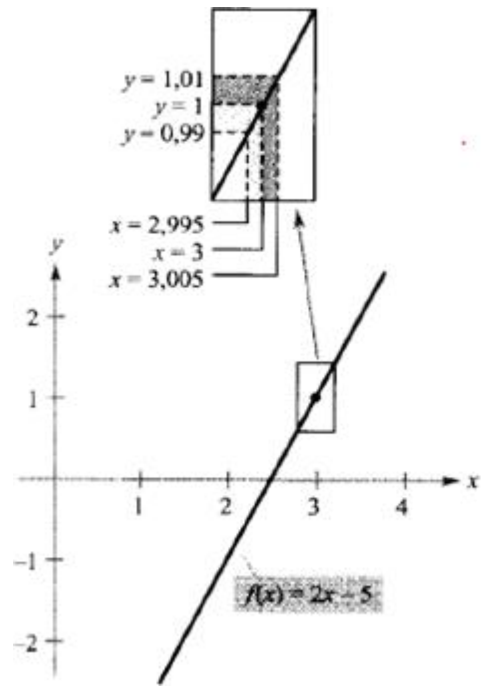
A partir de los dos últimos ejemplos se les pregunta a los estudiantes "¿Se puede decir que las imágenes están cerca de 2?" esto para introducir la idea de cercanía, aún en una etapa preliminar, sin cuantificadores.

Desarrollo

Luego se realiza el mismo proceso, pero esta vez para la función $(x) = 2x - 5$. Se nota que $Domf = \mathbb{R}$ y por tanto, cualquier número real es punto de acumulación de $Domf$ y se toma como ejemplo el punto $c = 3$.

Luego se notará que, si se toma una vecindad de elementos x de $Domf$ que estén a una distancia menor que 0,25 de 3, sin considerar al mismo 3; es decir si $x \neq 3 \wedge -0{,}25 < x - 3 < 0{,}25$, entonces se tendrá que $2{,}75 < x < 3{,}25$, con $x \neq 3$. Luego, se pregunta "¿en qué intervalo estarán las imágenes del intervalo?", esperando que los estudiantes respondan que se puede calcular las imágenes aplicando operaciones a la desigualdad de la siguiente manera: $5{,}5 < 2x < 6{,}5 \Longrightarrow 0{,}5 < 2x - 5 < 1{,}5$, y así llegar a que los elementos x que están a una distancia menor que 0,25 de 3 tienen imágenes entre 0,5 y 1,5. Luego se realiza la siguiente pregunta "¿Se puede estimar que están "cerca de 1?", donde se espera que los estudiantes den cuenta de que restando 1 a la desigualdad se llega a que $-0{,}5 < (2x - 5) - 1 < 0{,}5$, que en términos de distancia se escribe $|(2x - 5) - 1| < 0{,}5$, es decir que las imágenes están a una distancia menor que 0,5 de 1.

Luego, haciendo lo mismo, pero esta vez tomando un radio menor, por ejemplo, considerando x del $Domf$ tal que estén a una distancia menor que 0,005 del 3, sin considerar al 3, esto es $0 < |x - 3| < 0{,}005$, tendremos que $-0{,}005 < x - 3 < 0{,}005$, $x \neq 3 \Longrightarrow 2{,}995 < x < 3{,}005 \Longrightarrow 5{,}99 < 2x < 6{,}01 \Longrightarrow 0{,}99 < 2x - 5 < 1{,}01$. Si nuevamente estimamos la distancia a 1, llegaremos a que $-0{,}01 < (2x - 5) - 1 < 0{,}01 \Longrightarrow |\,(2x - 5) - 1| < 0{,}01$. Lo que podemos expresar con un gráfico de la siguiente manera:



Cierre

Para concluir la actividad, se les pregunta a los estudiantes si encuentran alguna similitud en los procedimientos realizados anteriormente; para llegar a que, en todos los casos, fijamos una cierta distancia como radio de una vecindad de un punto de acumulación “c”, del dominio de la función, obteniendo como consecuencia que las imágenes de los puntos de la vecindad (sin considerar al mismo c) están en un intervalo definido. Luego de esto, se realiza la pregunta “¿Podemos decir que dicho intervalo representa también a una vecindad con un centro y cierta distancia de radio?”. Esto con la finalidad de llegar también a interpretar el intervalo en el que se encuentran las imágenes como una vecindad de cierto número con un radio asociado al inicialmente considerado para la vecindad del punto de acumulación del dominio de la función.

Luego, ocupando la misma función del desarrollo se les pide a los estudiantes que fijen una distancia $d > 0$ arbitraria, de un punto x del $Dom\ f$ a un punto de acumulación del dominio “c” (por ejemplo, $c = 2$), para encontrar en qué intervalo se encuentran las imágenes de los puntos de esta vecindad (sin considerar a c) y llegar a que este intervalo es una vecindad de 1 de radio $D = 2d$. Es decir, 0 < $|x - 3|$ < $d \Longrightarrow |f(x) - 1|$ < $2d$.

Fuente: elaboración propia

Tabla 9.

Planificación de la actividad número tres.

Actividad 3
Inicio Se inicia la actividad recordando que en la actividad anterior se trabajó tomando una vecindad de un punto de acumulación del dominio de una función, con un determinado radio d, y se llegó a una vecindad de las imágenes de la función con un determinado centro y radio D, que se puede relacionar con d. En esta ocasión, se presenta la pregunta "¿Si consideramos ahora una vecindad de centro L y radio D del conjunto de las imágenes de una función, podremos encontrar una vecindad del dominio de la función en el cual se encuentren sus pre imágenes? y si es posible ¿existirá igualmente una relación entre los radios de las vecindades?" Esto con la finalidad de realizar el proceso contrario, que es precisamente el utilizado en la definición de límite.
Desarrollo Continuando, se recuerda que en la actividad anterior se llegó a que si se toma la función (x) = $2x$ − 5 con un punto de acumulación de Don$f$ c = 3, se tendría que 0 < $|x$ − 3$|$ < d $\Longrightarrow |f(x) - 1|$ < $2d$. Y se genera la pregunta inicial "Si se quiere que las imágenes estén a una distancia menor que 0,1 de 1, ¿a qué distancia deberán estar los puntos x de 3?", esperando que los estudiantes propongan respuestas y así llegar a que $|f(x) - 1| < 0{,}1$ y se tiene además $|f(x) - 1|$ < $2d$ por lo anterior, basta considerar $2d$=0,1, o d = $\frac{0{,}1}{2}$; para así

llegar a que para cumplir con $|f(x) - 1| < 0{,}1$ se requiere que $0 < |x - 3| < \frac{0{,}1}{2}$.

Posterior a este descubrimiento, se aclara a los estudiantes que en realidad este proceso se puede realizar de una manera más rápida, pues basta desarrollar la expresión $|f(x) - 1| < 0{,}1$ para llegar a que $|f(x) - 1| = |(2x - 5) - 1| = 2|x - 3| < 0{,}1$, si se considera $|x - 3| < \frac{0{,}1}{2}$.

Luego se considera la situación en donde la distancia de x a 3 sea mayor que $\frac{0{,}1}{2}$ y se pregunta "¿seguirá siendo la distancia de las imágenes a 1 menor que 0,1?" teniendo así que si se toma una distancia $d_1 > \frac{0{,}1}{2}$, entonces se tendrá que $2d_1 > 0{,}1$, luego $0 < |x - 3| < d_1 \Longrightarrow |(2x - 5) - 1| < 2d_1$, la que no es menor que 0,1. Así, no se cumple que $|f(x) - 1| < 0{,}1$.

A continuación, se pregunta el caso contrario, "¿qué ocurre si hay una distancia d_2 menor a la encontrada?" teniendo que si $d_2 < \frac{0{,}1}{2}$ entonces $2d_2 < 0{,}1$, obteniendo así que $0 < |x - 3| < d_2 \Longrightarrow |(2x - 5) - 1| = 2|x - 3| < 2 \cdot d_2 < 0{,}1$.

Cierre

Para cerrar, se nota que hasta el momento se ha visto que en ciertas funciones ocurre que: Si nos fijamos una distancia D a la que deben estar las imágenes $f(x)$ de un número real L, se puede encontrar la distancia d, dependiendo del D escogido, a la que deben estar sus preimágenes del punto de acumulación "c". Simbólicamente: Dada una distancia D cualquiera, se encuentra una distancia d, dependiendo de D, tal que: $0 < |x - c| < d \Rightarrow |f(x) - L| < D$. Además, también se hace una pausa para volver a señalar que de existir dicho d, existen otros valores que también cumplen con lo pedido y por tanto existirá un radio máximo d en torno al punto de acumulación para que se cumpla lo pedido, que en nuestra actividad es $d = \frac{0{,}1}{2}$.

fuente: elaboración propia

Tabla 10.

Planificación de actividad número cuatro

Actividad 4
Inicio Para iniciar esta actividad, se recuerda que en actividad anterior se obtuvo que para ciertas funciones ocurría que $0 < \|x - c\| < d \Rightarrow \|f(x) - L\| < D$, donde d depende de D. Así, se realizan las siguientes preguntas a los estudiantes: "¿Qué ocurre si, además, para cualquier distancia D que tomemos se puede encontrar una distancia d que satisfaga la proposición?" Esperando que los estudiantes entreguen respuestas para llegar a que esto significa que las imágenes de $f(x)$ están tan cerca de L como se quiera, siempre que x esté suficientemente cerca de c, excluyendo a c. Luego, se señala que si esto ocurre, entonces se dice que el número L es límite de $f(x)$ cuando x tiende a c, señalando que generalmente, para la distancia D se ocupa la letra griega ε y para d se ocupa la letra δ, que son positivas por ser distancias, y simbólicamente se escribe de la siguiente manera: $L = \lim_{x \to c} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, [0 < \|x - c\| < \delta \Longrightarrow \|f(x) - L\| < \varepsilon]$. Posteriormente se menciona que en la proposición de la derecha de la definición es necesario conjeturar previamente cuál es el número L.
Desarrollo A continuación, se realiza como ejemplo la demostración de que $\lim_{x \to 2} (3x + 1) = 7$, de la siguiente manera: Se les pide a los estudiantes que utilicen lo recién tratado si $(x) = 3x + 1$, $c = 2$ y $L = 7$. Esperando llegar a que con esto se tiene: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, [0 < \|x - 2\| < \delta \Longrightarrow \| (3x + 1) - 7\| = 3\|x - 2\| < 3\delta]$, y si se toma δ, $0 < 3\delta \leq \varepsilon$, es decir, $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$, entonces por transitividad de la desigualdad se concluye que $\|f(x) - 7\| < \varepsilon$ cumpliendo así que el $\lim_{x \to 2} (3x + 1) = 7$, pues

existe el δ pedido para cualquier $\varepsilon > 0$ que se elija.

Posterior a este ejemplo se les entrega el siguiente problema a los estudiantes:

Para la función $(x) = \frac{x}{2} - 5$, $c = 2$, ¿cuál podrá ser L, si existe? Esto para aclarar nuevamente que, para aplicar la definición de límite, es necesario saber el valor de L, o por lo menos tener una idea de cuál puede ser su valor para corroborarlo con la definición.

Para conjeturar el valor de L, se realiza la siguiente tabla:

x	$x = 1$	$x = 1{,}5$	$x = 1{,}9$	…….	$x = 2{,}1$	$x = 2{,}5$	$x = 3$
$f(x)$	-4,5	-4,25	-4,05	…..	-3,95	-3,75	-3,5

Una vez realizada la tabla, se pregunta ¿será que $L = -4$? Para corroborar esta posibilidad, debemos demostrarlo utilizando la definición. Así, para un épsilon positivo debemos encontrar $\delta = (\varepsilon) > 0$ tal que $[0 < |x - 2| < \delta \Longrightarrow |\left(\frac{x}{2} - 5\right) - (-4)| < \varepsilon$, pero si desarrollamos la segunda expresión, se tiene que $\frac{1}{2}|x - 2| < \varepsilon$ así, cualquiera sea $\varepsilon > 0$, existe δ, $0 < \frac{1}{2} \cdot \delta \leq \varepsilon$, que hará que $|\left(\frac{x}{2} - 5\right) - (-4)| < \varepsilon$, esto es cuando $0 < \delta \leq 2\varepsilon$. De esta manera se concluye que $\lim_{x \to 2}\left(\frac{x}{2} - 5\right) = -4$.

Continuando con esta idea, se realiza el siguiente ejemplo:

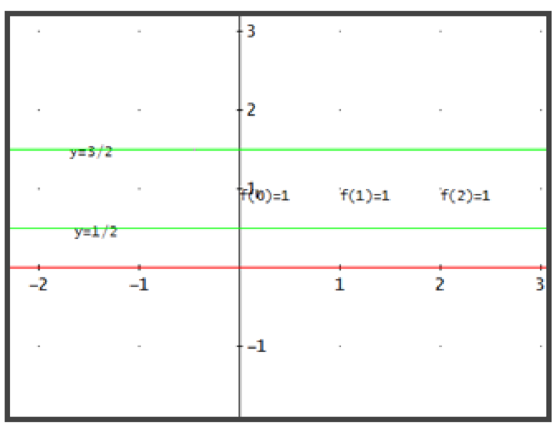
Para función $f(x) = \sqrt{x}$ con $c = 4$ y $L = 2$. Si se elige $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $\delta = (\varepsilon) > 0$ tal que $[0 < |x - 4| < \delta \Longrightarrow |\sqrt{x} - 2| = |\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}| = \frac{1}{\sqrt{x}+2}|x - 4| < \frac{1}{2}|x - 4| < \frac{1}{2} \cdot \delta]$, pues se sabe que $x > 0 \wedge 2 < \sqrt{x} + 2 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{2}$. Finalmente, se cumple la definición considerando $0 < \delta \leq 2\varepsilon$ y por lo tanto $\lim_{x \to 4}\sqrt{x} = 2$.

Como último ejemplo, se presenta la función $f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3}$, que tiene dominio $\mathbb{R} - \{3\}$, aquí se nota que, aunque 3 no es parte del dominio de la función, es un punto de acumulación de él y por tanto podemos calcular imágenes de puntos cercanos a 3, conjeturando así que L = 7. Ahora, para afirmarlo, se recurre a la definición: Sea ε > 0, debemos encontrar $\delta = (\varepsilon) > 0$ tal que $x \neq 3 \wedge |x-3| < \delta \Longrightarrow |\frac{2x^2-5x-3}{x-3} - 7| = |\frac{2x^2-12x+18}{x-3}| = |\frac{2(x-3)^2}{x-3}| = 2|x-3| < 2\delta$. Si se elige $0 < \delta \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, entonces, efectivamente $|f(x) - 7| < \varepsilon$ y se afirma que $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x^2-5x-3}{x-3} = 7$.

Cierre

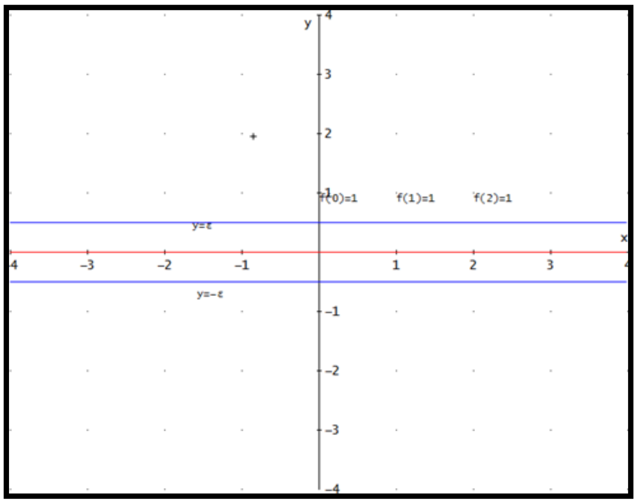
Para concluir esta actividad, se presenta a los estudiantes un problema en el que se conjetura un L incorrecto, para luego demostrar que dicho L no es el límite pedido utilizando la negación de la definición de manera implícita (sin explicitar que esto significa que L=1 no es el límite, pues se les pedirá posteriormente esta conclusión en un cuestionario), como se ve a continuación:

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in \mathbb{Z} \\ 0, & si\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$, claramente su dominio es $\mathbb{R}$, y un punto de acumulación de él es $c = 2$. Ahora, si se considera $L = 1$ y se toma una vecindad de radio $\varepsilon = \frac{1}{2}$, se tendrá la vecindad es $V\,(1, \frac{1}{2}) =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. Luego se presenta el siguiente gráfico:



De aquí se puede observar que, además, con cualquier radio δ ocurre que la correspondiente vecindad de 2 sin el 2, $[0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow 2-\delta < x < 2+\delta,\ x \neq 2]$ contiene números reales no enteros cuyas imágenes son iguales a 0 (línea roja) y $|f(x)-1| = |0-1| = 1 > \frac{1}{2}$. centrándonos aquí en el conectivo "y", pues este viene dado por la negación de la definición, que no fue negada directamente de la definición con simbolismos, sino utilizando el gráfico.

Por otra parte, si se conjetura $L = 0$ y se considera cualquier vecindad de radio ε, todos los elementos reales $x \neq 2 \wedge 1 < x < 3$, tienen imágenes iguales a 0, entonces $|f(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$. Esto se puede visualizar igualmente en la siguiente imagen:



Fuente: Elaboración propia

7.3. Cuestionario para los estudiantes

Como ya se mencionó, una vez concluida la experimentación, se realizará un cuestionario a los estudiantes que esté enlazado con la secuencia para posteriormente contrastar los aspectos considerados en la secuencia con otros ya obtenidos en el cuestionario a los estudiantes que ya cursaron Cálculo Diferencial en una variable. Este nuevo cuestionario se presenta a continuación:

1.- Considerando el ejercicio 1) relativo a $f(x) = x^2$, con $Domf =]1,3[$ trabajado en clases, responda:

a) ¿Cuál es la vecindad de $\frac{3}{2}$ de mayor radio que está totalmente contenida en el dominio?

b) Determine el intervalo que contiene las imágenes de $x \in V\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{100}\right)$, $x \neq \frac{3}{2}$.

c) Complete la conclusión respecto de (b): Al tomar números a una distancia (………) que (……) de $\frac{3}{2}$, las imágenes mediante $f(x) = x^2$, ….. están en una vecindad de 2.

2.- Para cada una de las funciones dadas determine un valor de la distancia d a la que debe estar x de "c" para que la distancia de su imagen a L sea menor al valor dado D, es decir $|f(x) - L| < D$.

a) La función $f(x) = 1 - \frac{x}{5}, c = 0, L = 1$.

D	0,01	0,00001	D cualquier positivo
d			

b) La función $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, c = 1, L = 2$.

D	0,01	0,00001	D cualquier positivo
d			

3. Demuestre que

a) $\lim\limits_{x \to 0} x^4 = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2 - x}{x} = -1$

4. En relación a la función $f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in \mathbb{Z} \\ 0, & si\ x \notin \mathbb{Z} \end{cases}, c = 2$, tratada en clases, responda:

a) Según lo estudiado en la actividad 4, ¿puede afirmar que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$? Argumente su respuesta.

b) Según lo estudiado en la actividad 4, ¿puede afirmar que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$? Argumente su respuesta.

c) Según su respuesta anterior, complete la equivalencia:

$$L \neq \lim_{x \to c} f(x) \Leftrightarrow \cdots \varepsilon > 0, \cdots \delta = \delta(\varepsilon) > 0, [0 < |x - c| \cdots \delta \cdots |f(x) - L| \cdots \varepsilon]$$

7.4. Análisis a priori.

En esta fase se declaran diferentes hipótesis respecto a posibles problemas que pudieron influir en el resultado esperado de la aplicación de las actividades que fueron diseñadas y en las respuestas del cuestionario. Estas se presentan a continuación:

- Un primer gran problema es que el curso en donde se aplicó esta secuencia no es el curso propio de la profesora guía, lo que implicaría que los estudiantes vean a la docente como ajena al curso, cuestión que afectaría a la recepción de parte de ellos por sentir que esto es algo extra y no parte del curso.
- Por el hecho que esta secuencia didáctica se realice en formato virtual, que de por sí afecta la interacción durante la clase, puede provocar que los estudiantes no se sientan comprometidos a responder responsablemente el cuestionario, lo que impediría conocer resultados más precisos.
- Puede ocurrir que los estudiantes no comprendan las actividades planteadas durante la clase y por tanto éstas se deban extender y no se logre abarcar las cuatro actividades diseñadas.
- Al momento de responder el cuestionario es posible que algún estudiante tenga dificultades de conectividad o de otra índole que afecten la total concentración y dedicación necesaria.
- Puede ocurrir que los estudiantes no recuerden completamente algunos conceptos necesarios para comprender este nuevo concepto, lo que dificultaría el avance de la secuencia.

8. Experimentación

El cuestionario elaborado en base a la secuencia de actividades realizada a los estudiantes en la asignatura Cálculo Diferencial en una variable fue aplicado al final de la sesión de clases. Debido al contexto de clases virtuales se les dio una semana de plazo para responder. En este apartado se describen los resultados obtenidos de la aplicación de las secuencias de actividades y del cuestionario.

8.1. Descripción de la aplicación de la secuencia didáctica

La clase se inició a las 8:00 AM el día 15 de octubre del 2020 con una duración de 1,5 horas, a la que se conectaron 7 estudiantes, posteriormente durante el desarrollo de la secuencia se sumaron otros 3, totalizando 10 de un total de 13 estudiantes.

Las actividades fueron realizadas sin inconvenientes, sin embargo, hubo muy poca participación de parte de los estudiantes para responder las preguntas clave de la secuencia, en que sólo uno de ellos intentó participar de forma activa durante las actividades. Además, en los momentos en que se preguntó si había dudas, igualmente sólo un estudiante respondió con un "no" de vez en cuando.

8.2. Respuestas al cuestionario

El cuestionario fue respondido por once estudiantes. A continuación, se exponen los criterios para considerar correctas las respuestas.

Tabla 11.

Criterios de evaluación del cuestionario aplicado a los estudiantes

Pregunta	Criterio
1a	El estudiante identifica los extremos del dominio de la función. Calcula las distancias desde el centro de la vecindad a los extremos de este dominio.

	Establece que la vecindad máxima contenida en el dominio es $v(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$.
1b	Escribe la vecindad $v(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ en términos de distancia. Desarrolla la expresión en término de desigualdades. Deduce la expresión correspondiente a las imágenes en términos de la desigualdad. Traduce la desigualdad y escribe el intervalo en donde se encuentran las imágenes.
1c	Completa la oración correctamente a partir de la pregunta 1b)
2a	Trabaja la expresión de la tesis $\left\|1-\frac{x}{5}-1\right\| < D$ de manera adecuada, ocupando propiedades del valor absoluto para llegar a la expresión $\frac{1}{5}\|x\| < D$. Ocupa la hipótesis para definir que si $\frac{1}{5}d \leq D$, entonces $d \leq 5D$ y se satisface la tesis. (Se ajusta a cada caso).

2b	Trabaja la expresión de la tesis $\left\|\frac{x^2-x-2}{x-2}-2\right\|<D$ de manera adecuada ocupando propiedades del valor absoluto, factoriza y simplifica hasta obtener la expresión $\|x-1\|<D$ Ocupa la hipótesis para definir que si $d \leq D$, entonces se satisface la tesis. (Se ajusta a cada caso).
3a y 3b	Aplica la definición de límite de una función real de variable real en un punto y trabaja mediante esta definición. Escribe la definición del límite con el delta encontrado como demostración.
4a	Desarrolla la expresión $\|x-2\|<\delta$ y se da cuenta que cualquiera de estos intervalos contiene números no enteros. Se da una épsilon adecuado como radio de una vecindad menor o igual que 1 y establece que ese intervalo no contiene a 0. Establece que no se puede afirmar que $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$.

4b	Considera una épsilon cualquiera como radio de una vecindad de 0. El estudiante toma un delta menor o igual a 1, considerando que todos los elementos de la vecindad de 2 no son números enteros, excepto el centro 2. Establece que la imagen de todos esos elementos es igual a 0 y están en la vecindad de 0. El estudiante a partir de lo anterior afirma que el $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$
4c	El estudiante completa correctamente la función proposicional correspondiente a la negación de la definición del límite.

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 10 se presenta una tabla de frecuencias los resultados de las respuestas al cuestionario. Además, en la figura 2 se incluye también un gráfico de barras de los porcentajes de respuestas correctas, incorrectas y omisiones por parte de los estudiantes

Tabla 12.

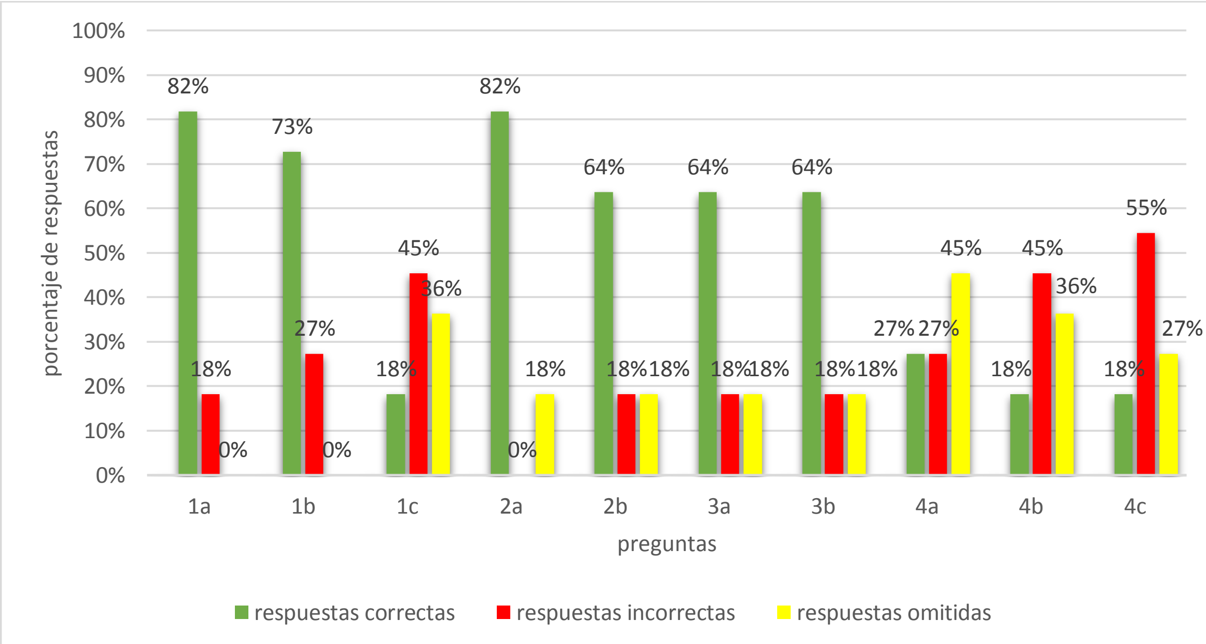
Tabla de frecuencias de las respuestas de los estudiantes al segundo cuestionario

pregunta	correcta	incorrecta	Omitida
1a	9	2	0
1b	8	3	0
1c	2	5	4
2a	9	0	2
2b	7	2	2
3a	7	2	2
3b	7	2	2
4a	3	3	5
4b	2	5	4
4c	2	6	3

Fuente: elaboración propia

Figura 2.

Gráfico del porcentaje de las respuestas de los estudiantes al segundo cuestionario

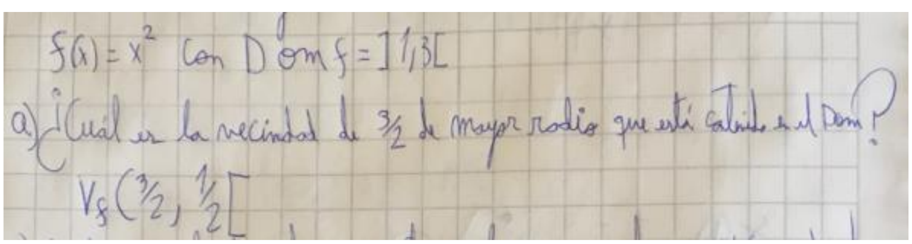


fuente: Elaboración propia

Se puede apreciar que, en general, en las preguntas 1, 2 y 3 se obtuvo un porcentaje de respuestas correctas superior al 60%, siendo la excepción la pregunta 1c por cuestión que se expondrá más adelante. Respecto a la pregunta 4, se observa que el porcentaje de respuestas correctas es inferior al 30%, esto, a pesar de haber obtenido un porcentaje mayor respecto al cuestionario aplicado al grupo anterior, expone que aún existen falencias respecto al trabajo con la negación de la definición de límite. Algunas respuestas y los errores se evidencian en el apartado de análisis de respuestas que se expone a continuación.

Imagen 19.

Respuesta del estudiante 3 a la pregunta 1a

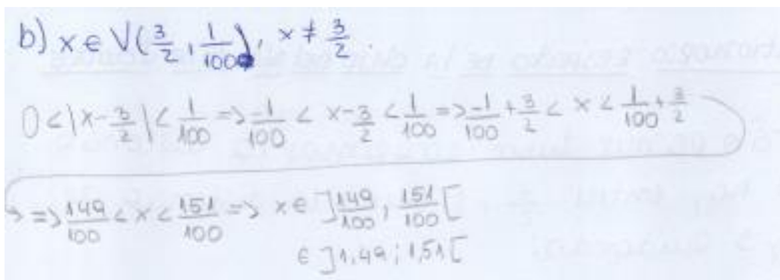


Aquí se puede apreciar que, a pesar que el estudiante entregó una respuesta, no proporcionó un desarrollo, además de confundir la notación de vecindad con la de intervalo.

En la pregunta 1b, el error común fue que los estudiantes, al expresar $v\left(\frac{1}{2},\frac{1}{100}\right)$ en términos de desigualdades, llegaron al intervalo $]1{,}49; 1{,}51[$, pero no encontraron las imágenes de los elementos de la vecindad mediante la función. Un ejemplo se muestra en la imagen 20. Hubo también una estudiante que no respondió esta pregunta.

Imagen 20.

Respuesta del estudiante 4 a la pregunta 1b



b) $x \in V(\frac{3}{2},\frac{1}{100})$, $x \neq \frac{3}{2}$

$0<|x-\frac{3}{2}|<\frac{1}{100} \Rightarrow -\frac{1}{100}<x-\frac{3}{2}<\frac{1}{100} \Rightarrow -\frac{1}{100}+\frac{3}{2}<x<\frac{1}{100}+\frac{3}{2}$

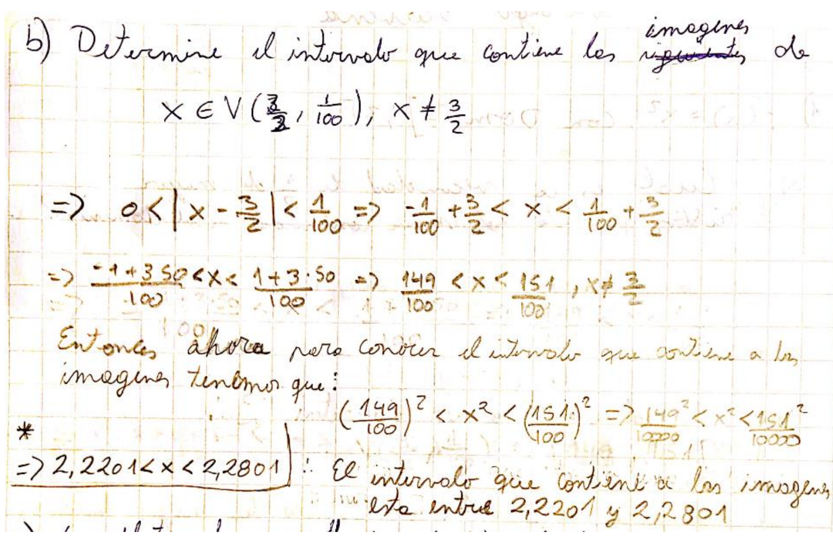
$\Rightarrow \frac{149}{100}<x<\frac{151}{100} \Rightarrow x\in \left]\frac{149}{100},\frac{151}{100}\right[$

$\in]1{,}49;1{,}51[$

También hubo respuestas correctas, un ejemplo de ello se muestra a continuación:

Imagen 21.

Respuesta del estudiante 8 a la pregunta 1b



b) Determine el intervalo que contiene las imágenes de

$x \in V(\frac{3}{2},\frac{1}{100})$, $x \neq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow 0<|x-\frac{3}{2}|<\frac{1}{100} \Rightarrow -\frac{1}{100}+\frac{3}{2}<x<\frac{1}{100}+\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{-1+3\cdot 50}{100}<x<\frac{1+3\cdot 50}{100} \Rightarrow \frac{149}{100}<x<\frac{151}{100}$, $x\neq\frac{3}{2}$

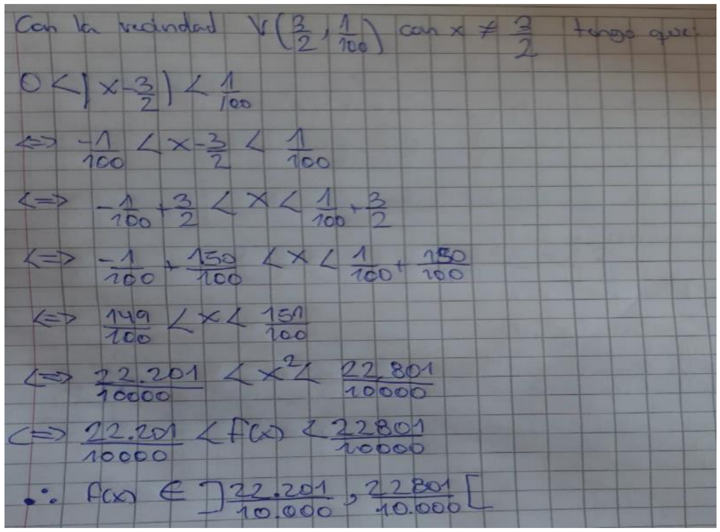
Entonces, ahora para conocer el intervalo que contiene a las imágenes tenemos que:

$\left(\frac{149}{100}\right)^2<x^2<\left(\frac{151}{100}\right)^2 \Rightarrow \frac{149^2}{10000}<x^2<\frac{151^2}{10000}$

* $\Rightarrow 2{,}2201<x<2{,}2801$ $\therefore$ El intervalo que contiene a las imágenes está entre 2,2201 y 2,2801

Imagen 22 .

Respuesta del estudiante 7 a la pregunta 1b



En la pregunta 1c, que fue una de las preguntas que menos respuestas correctas tuvo, como se señala en la tabla y gráfico, 4 personas no respondieron la pregunta. Sin embargo, en todas las otras respuestas que no se consideraron correctas, se puede apreciar que el error común fue el de considerar que tomando una vecindad de $\frac{3}{2}$ con un radio menor a $\frac{1}{2}$, las imágenes mediante $f(x) = x^2$ siempre estarían en una vecindad de 2, cuando si se toma un radio menor a $\frac{1}{100}$ esto no ocurre. Se esperaba que los estudiantes dieran cuenta de esto motivados por las respuestas a la pregunta anterior, pero algo que puede haber ocurrido es que, al no desarrollar las fracciones, no lograron evidenciar que las imágenes no contenían al número 2. Por otra parte, el estudiante 8, que sí desarrolló las fracciones como decimales, logró la respuesta correcta. Se evidencian algunas respuestas de los estudiantes a continuación.

Imagen 23.

Respuesta de la estudiante 1 a la pregunta 1c

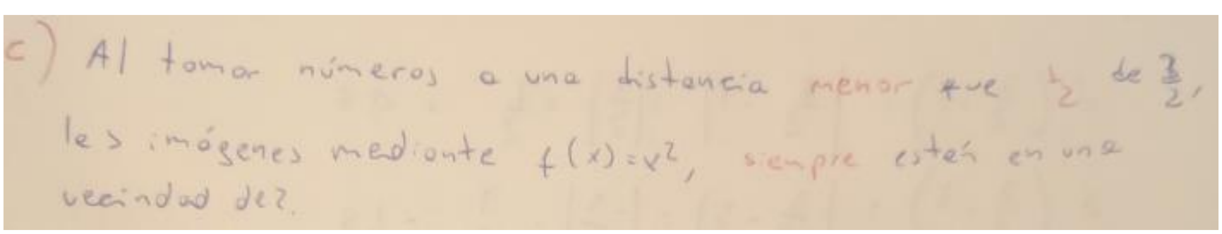
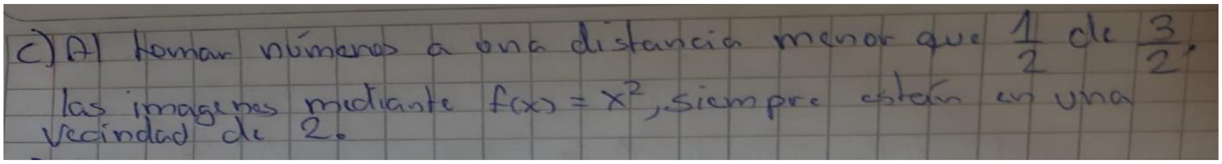


Imagen 24.

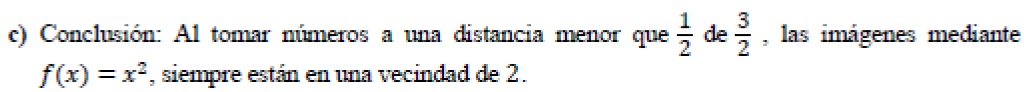
Respuesta del estudiante 7 a la pregunta 1c



c) Al tomar números a una distancia menor que $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{2}$, las imagenes mediante $f(x) = x^2$, siempre están en una vecindad de 2.

Imagen 25.

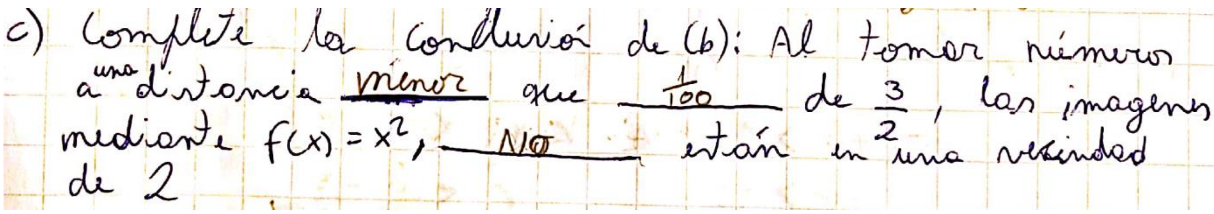
Respuesta del estudiante 6 a la pregunta 1c



c) Conclusión: Al tomar números a una distancia menor que $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{2}$, las imágenes mediante $f(x) = x^2$, siempre están en una vecindad de 2.

Imagen 26.

Respuesta del estudiante 8 a la pregunta 1c



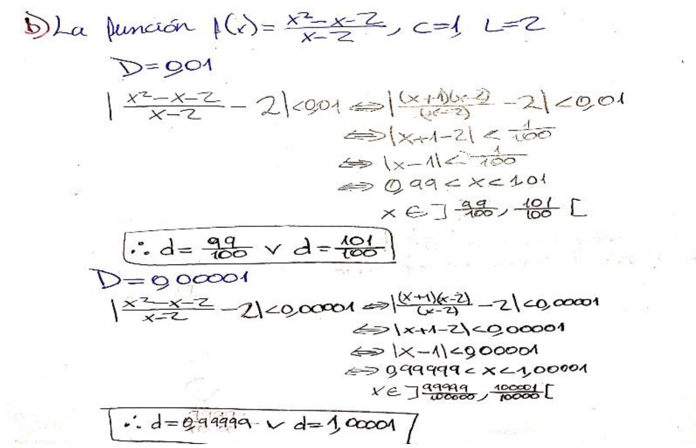
c) Complete la conclusión de (b): Al tomar números a una distancia menor que $\frac{1}{100}$ de $\frac{3}{2}$, las imagenes mediante $f(x) = x^2$, NO están en una vecindad de 2

Para la pregunta 2a, todas las respuestas recibidas estaban correctas, sin embargo, el porcentaje no es 100% debido a que hubo 2 estudiantes que no respondieron la pregunta.

En la pregunta 2b, los mismos 2 estudiantes anteriores tampoco respondieron la pregunta. Además, hubo una respuesta que no fue considerada como correcta, debido a que la estudiante, a pesar de desarrollar correctamente la respuesta, no logró identificar lo pedido ni terminar el ejercicio, como se ve a continuación.

Imagen 27.

Respuesta de la estudiante 5 a la pregunta 2b



b) La función $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-2}$, $c=1$, $L=2$

$D=0{,}01$

$\left|\frac{x^2-x-2}{x-2}-2\right|<0{,}01 \Leftrightarrow \left|\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)}-2\right|<0{,}01$

$\Leftrightarrow |x+1-2|<\frac{1}{100}$

$\Leftrightarrow |x-1|<\frac{1}{100}$

$\Leftrightarrow 0{,}99<x<1{,}01$

$x\in \left]\frac{99}{100},\frac{101}{100}\right[$

$\boxed{\therefore d=\frac{99}{100} \vee d=\frac{101}{100}}$

$D=0{,}00001$

$\left|\frac{x^2-x-2}{x-2}-2\right|<0{,}00001 \Leftrightarrow \left|\frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)}-2\right|<0{,}00001$

$\Leftrightarrow |x+1-2|<0{,}00001$

$\Leftrightarrow |x-1|<0{,}00001$

$\Leftrightarrow 0{,}99999<x<1{,}00001$

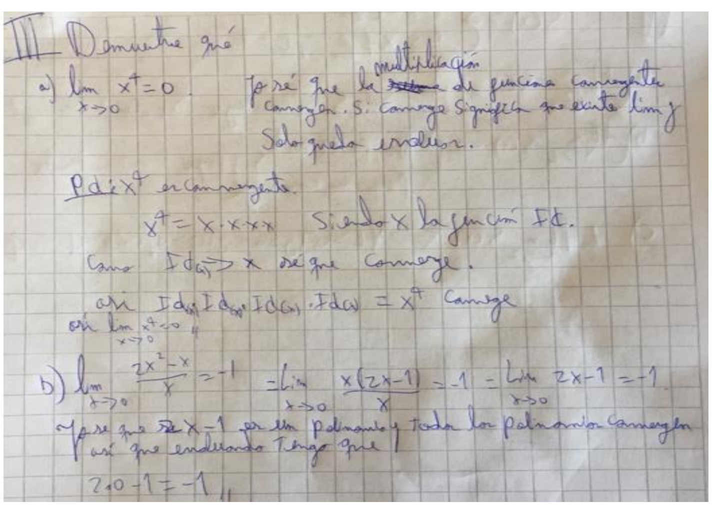
$x\in \left]\frac{99999}{100000},\frac{100001}{100000}\right[$

$\boxed{\therefore d=0{,}99999 \vee d=1{,}00001}$

Para la pregunta 3a y 3b, como se aprecia de la tabla, 2 estudiantes que no respondieron y 2 estudiantes tuvieron respuestas incorrectas. La razón es que no demostraron los límites por definición, sino que aplicaron teoremas no tratados aún, además de usar el término "convergente" donde no corresponde. Esto puede haber ocurrido debido a que los estudiantes confundieron el límite de funciones con los de sucesiones, donde sí se trabaja la convergencia. (los estudiantes trabajaron los límites de sucesiones en el curso de procesos infinitos, que es precedente al de cálculo diferencial).

Imagen 28.

Respuesta del estudiante 3 a la pregunta 3a y 3b



III Demuestre que

a) $\lim_{x\to 0} x^4=0$ Yo sé que la multiplicación de funciones convergentes converge. Si converge significa que existe lim y solo queda evaluar.

Pd: x^4 es convergente.

$x^4=x\cdot x\cdot x\cdot x$ Siendo x la función Id.

Como $Id(x)\to x$ se que converge.

así $Id(x)\,Id(x)\,Id(x)\cdot Id(x)=x^4$ converge

así $\lim_{x\to 0} x^4=0$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-x}{x}=-1 = \lim_{x\to 0}\frac{x(2x-1)}{x}=-1=\lim_{x\to 0} 2x-1=-1$

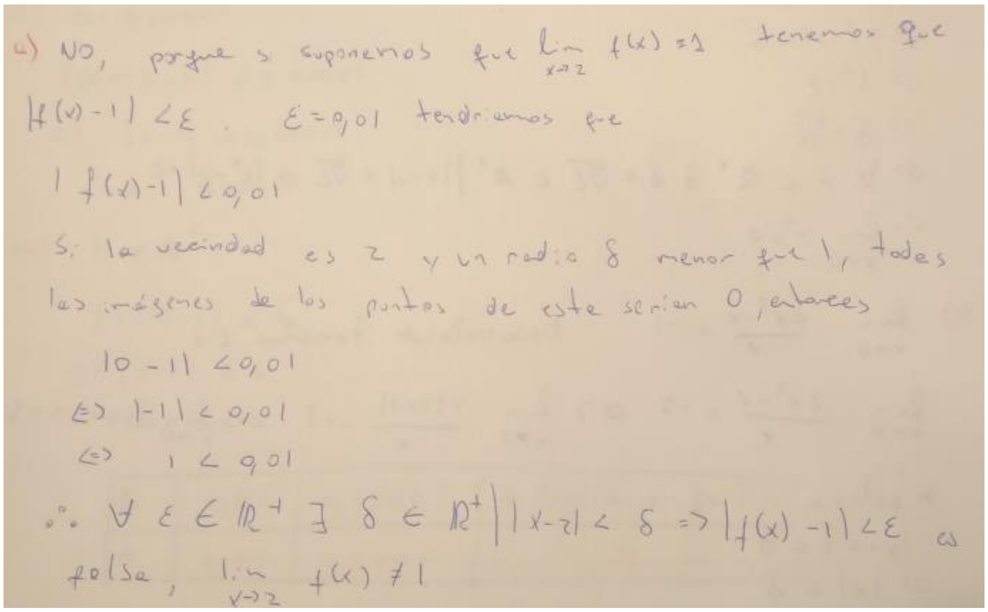
Yo sé que $2x-1$ es un polinomio y todos los polinomios convergen así que evaluando tengo que

$2\cdot 0-1=-1$

Del conteo se advierte que la pregunta 4 fue la que tuvo menor porcentaje de respuestas correctas. Hubo 5 estudiantes que no respondieron tales preguntas, sin embargo, también hay estudiantes que lograron responderlas correctamente como otros que enviaron un desarrollo, pero no hicieron referencia a los elementos de la definición para justificar su respuesta, por lo que no se consideraron como correctas. Algunas respuestas enviadas por los estudiantes se muestran a continuación.

Imagen 29.

Respuesta de la estudiante 1 a la pregunta 4a



a) No, porque si suponemos que $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ tenemos que

$|f(x) - 1| < \varepsilon$. $\varepsilon = 0{,}01$ tendríamos que

$|f(x) - 1| < 0{,}01$

Si la vecindad es 2 y un radio δ menor que 1, todos las imágenes de los puntos de este serían 0, entonces

$|0 - 1| < 0{,}01$

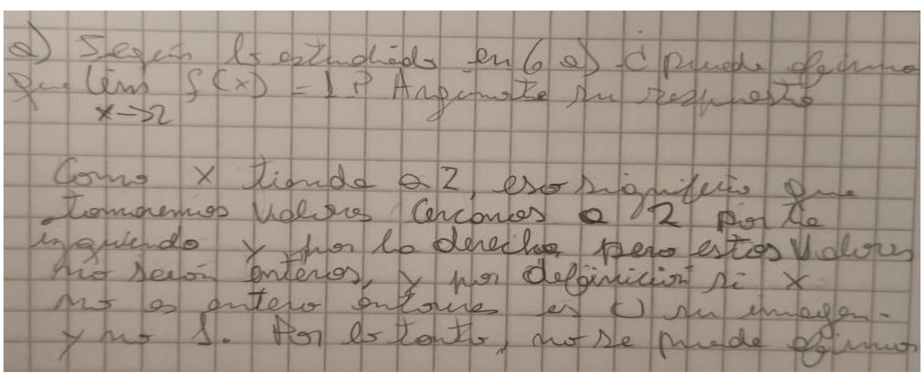
$\Leftrightarrow |-1| < 0{,}01$

$\Leftrightarrow 1 < 0{,}01$

$\therefore \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \mid |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$ es falsa, $\lim_{x \to 2} f(x) \neq 1$

Imagen 30.

Respuesta del estudiante 11 a la pregunta 4a



a) Según lo estudiado en 6 a) ¿puede afirmar que $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$? Argumente su respuesta

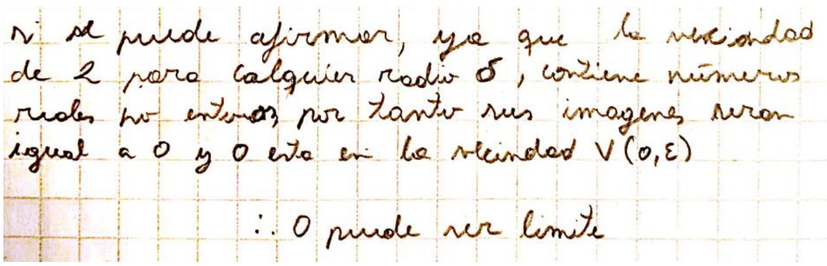
Como x tiende a 2, eso significa que tomaremos valores cercanos a 2 por la izquierda y por la derecha, pero estos valores no serán enteros, y por definición si x no es entero entonces es 0 su imagen y no 1. Por lo tanto, no se puede afirmar

Como se puede observar, el estudiante 11 intentó explicar por qué el límite no es 1, sin embargo, no utilizó elementos de la definición para probar su conjetura, sino que solamente la escribió de manera intuitiva. De esta manera, no se puede concluir que el estudiante pueda trabajar con la definición, ya que a pesar de que el límite no es 1, debe señalar un épsilon para el cual no se cumpla la definición, o en su defecto, para el cual se cumpla la negación de ella, como lo hizo la estudiante 1.

Para la pregunta 4b ocurrió lo mismo que en la pregunta 4a, sin embargo, hubo un estudiante que, aunque respondió correctamente la pregunta 4a, no respondió de manera correcta la pregunta 4b, esto porque siguió con la idea de la negación y utilizó el término "cualquier radio δ", en vez de especificar un delta específico, como se muestra a continuación.

Imagen 31.

Respuesta del estudiante 8 a la pregunta 4b

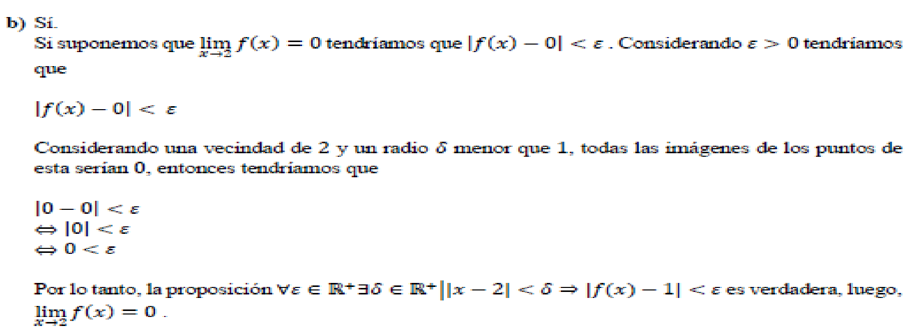

si se puede afirmar, ya que la vecindad de 2 para calquier radio δ, contiene números reales no enteros por tanto sus imagenes seran igual a 0 y 0 esta en la vecindad $V(0,\varepsilon)$

$\therefore$ 0 puede ser limite

Hubo un caso en donde, a pesar de que el estudiante inicia asumiendo la tesis verdadera, luego desarrolla la pregunta de manera correcta, por lo cual fue considerado dentro de las respuestas correctas. Su desarrollo se presenta a continuación.

Imagen 32.

Respuesta del estudiante 6 a la pregunta 4b


b) Sí.

Si suponemos que $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$ tendríamos que $|f(x) - 0| < \varepsilon$. Considerando $\varepsilon > 0$ tendríamos que

$|f(x) - 0| < \varepsilon$

Considerando una vecindad de 2 y un radio δ menor que 1, todas las imágenes de los puntos de esta serían 0, entonces tendríamos que

$|0 - 0| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow |0| < \varepsilon$
$\Leftrightarrow 0 < \varepsilon$

Por lo tanto, la proposición $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ ||x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$ es verdadera, luego, $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$.

Finalmente, en la pregunta 4c, se evidencia que a los estudiantes les cuesta trabajar con la negación de proposiciones lógicas y cuantificadores, ya que las respuestas incorrectas simplemente son por no cambiar cuantificadores, o cambiar algunos, pero no otros; como se ve en las siguientes imágenes.

Imagen 33.

Respuesta del estudiante 11 a la pregunta 4c

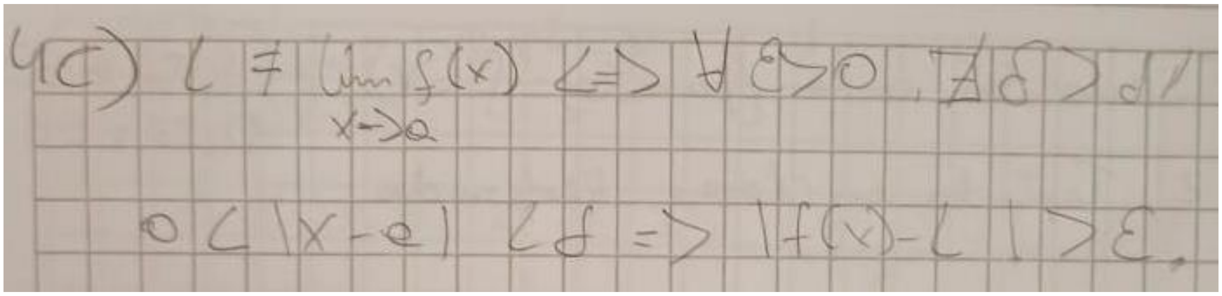


Imagen 34.

Respuesta del estudiante 8 a la pregunta 4c

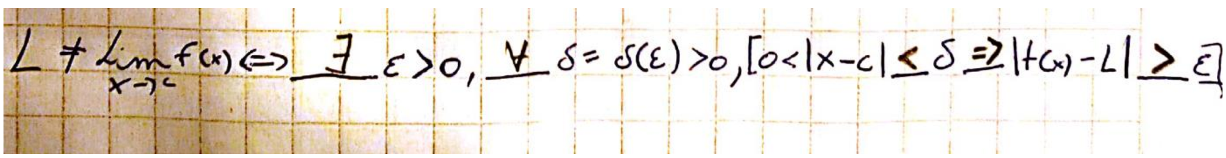
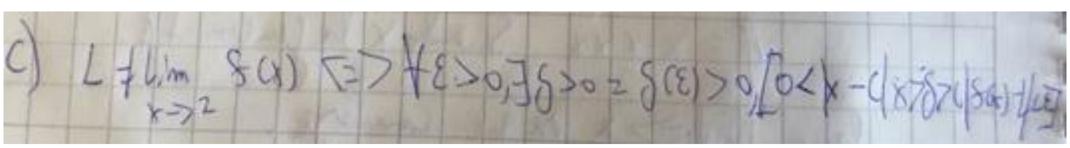


Imagen 35.

Respuesta del estudiante 3 a la pregunta 4c



9. Análisis a posteriori

Como se mencionó anteriormente, en este apartado se realiza un contraste de lo ocurrido en la experimentación y la encuesta aplicada a los estudiantes de Cálculo Diferencial en una variable con las hipótesis formuladas en el análisis a priori.

Tabla 13.

Contraste de la hipótesis con lo ocurrido en la experimentación

Hipótesis	Contraste
Un primer gran problema es que el curso en donde se aplicó esta secuencia no es el curso propio de la profesora guía, lo que puede implicar que los estudiantes vean a la docente como ajena al curso, cuestión que afectaría a la recepción de parte de ellos por sentir que esto es algo extra y no parte del curso.	No se puede establecer de forma exacta el resultado de esta hipótesis, debido a que los estudiantes presentaron una baja participación, y esto puede deberse justamente a lo planteado en la hipótesis; sin embargo, hubo un par de estudiantes que intentaron participar en algunas ocasiones, a pesar de que el curso no lo impartía la docente.
Por el hecho que esta secuencia didáctica se realice en formato virtual, que de por sí afecta la interacción durante la clase, puede provocar que los estudiantes no se sientan comprometidos a responder responsablemente el cuestionario, lo que impediría conocer resultados más precisos. .	A pesar de que, como se mencionó anteriormente, hubo dificultades para lograr que los estudiantes respondieran al cuestionario, hubo un estudiante que declaró no responder la totalidad del cuestionario por problemas de tiempo, por lo que no se puede asegurar de manera total que los estudiantes no hayan tenido

	problemas externos para responder el cuestionario. No obstante, esto puede haber ocurrido debido a que el cuestionario no llevaba una calificación sumativa en el curso, por lo que los estudiantes no se sintieran en la obligación de responder en el plazo de un día, que se les dio inicialmente. Por lo anterior, esta hipótesis no se cierra de manera concreta, sino que se deja a interpretaciones, entregándose evidencia de lo ocurrido
Al momento de responder el cuestionario es posible que algún estudiante tenga dificultades de conectividad o de otra índole que afecten la total concentración y dedicación necesaria.	Esta hipótesis sí se pudo evidenciar, debido a que un estudiante de los que respondieron la encuesta escribió que no podía seguir pensando en las respuestas por falta de tiempo. Sin embargo, no se puede asegurar que todos los estudiantes hayan tenido complicaciones de este estilo, pues hubo dificultades para conseguir las respuestas al cuestionario, pero se tardó exactamente 26 días en conseguir las 11 respuestas del total de 13 estudiantes, siendo este tiempo suficiente para responder el cuestionario planteado, inicialmente para 1 día.

Puede ocurrir que los estudiantes no recuerden completamente algunos conceptos necesarios para comprender este nuevo concepto, lo que dificultaría el avance de la secuencia.	Esta hipótesis sí se pudo evidenciar, pero únicamente tomando en consideración el cuestionario realizado, debido a que la mayoría de los estudiantes no fue capaz de negar correctamente la proposición de la definición de límite, lo cual está conectado con las proposiciones lógicas y los cuantificadores, los que son estudiados en cursos anteriores a Cálculo Diferencial en una variable. A pesar de esto, es probable que los estudiantes comprendan desde antes el concepto de punto de acumulación, debido a que el profesor del curso ya había enseñado el concepto de punto de acumulación de un subconjunto de $\mathbb{R}$ previamente. Lo anterior se puede evidenciar en que casi la totalidad de los estudiantes lograron responder correctamente el ítem 1 del cuestionario, que estaba asociado a este concepto. (Recordar que antes se dijo que el profesor del curso ya había enseñado el concepto de punto de acumulación de un subconjunto de IR. Nosotros lo aplicamos al dominio de la función, solamente).

Fuente: Elaboración propia

Para finalizar los análisis a posteriori, vemos que, en general, en las primeras 3 preguntas, los resultados fueron superiores al 60% de respuestas correctas, exceptuando la pregunta 1c; sin embargo, como se mencionó anteriormente, el resultado de la pregunta 1c puede deberse a que los estudiantes no desarrollaron las fracciones del problema 1b de forma decimal, sino que estas fueron expresadas solamente de manera fraccionaria.

En la pregunta 4, se cómo se puede observar, existen aún falencias a mejorar, esto puede haber ocurrido debido a la poca extensión de la actividad referente a la negación, puesto que esta se dejó como cierre de la última actividad, referente está a la demostración por definición, y no se consideraron más elementos para colocar otra actividad aparte; sin embargo, esto fue debido al tema del tiempo con el que se contaba para realizar las actividades.

Por lo anterior, se valida la secuencia de actividades, pero a la vez se propone como mejora extender el trabajo con la negación de la definición a otra actividad centrada en ella, de tal manera que los estudiantes tengan más contacto con esta y así puedan utilizar todo lo anterior para trabajar con la negación.

10. Conclusiones

Es sabido que el concepto de límite no es un concepto sencillo para los estudiantes que cursan por primera vez cálculo diferencial en una variable; esto se puede evidenciar en las investigaciones citadas en el desarrollo de este trabajo. Sin embargo, el tema de la demostración de límite por definición, que es un tema dentro del concepto de límite en general, trae también consigo más dificultades, debido a diferentes razones, como la abstracción a primera vista de la proposición que designa la definición, la manera en que se trabaja la demostración, los conceptos implícitos que se deben manejar, etc. Por esto, es menester el desarrollo de materiales que puedan aportar al estudio y la enseñanza de este concepto. Esto, además, teniendo en consideración de igual manera que actualmente el concepto de límite de funciones se trabaja a nivel escolar, y por lo tanto, de igual manera el profesor de matemática debe manejar un conocimiento profundo de su definición. El nuevo material desarrollado debe tener también un potencial significativo para el estudiante, esto es, que los conceptos que se presenten tengan un orden lógico, se puedan relacionar entre sí, y además con el aprendizaje que el estudiante ya posee.

Para el desarrollo del trabajo, fue muy útil el marco entregado por la ingeniería didáctica de Michèle Artigue, pues esta nos proporcionó, además de una manera de esquematizar el trabajo realizado, un método de validación interna de la secuencia de actividades, a través de la experimentación y posterior análisis de los resultados obtenidos de la aplicación. Por esto, fueron utilizados los procedimientos de esta teoría como objetivos específicos de la investigación, y el desarrollo total como objetivo general.

Para la construcción de las actividades, se considera que fue utilizado un enfoque mixto entre forma estructural y procedimental, puesto que se inician las actividades trabajando conceptos esenciales para la comprensión de la definición, para luego utilizar estos conceptos en el desarrollo de la demostración por definición, además de relacionarla con su parte geométrica.

Respecto a la aplicación de la secuencia de actividades, debido a la poca participación de los estudiantes, se concluye que esta puede ser mejor desarrollada de manera presencial, debido a que con el contexto de clases virtuales no se puede observar mucha participación de parte de los estudiantes, lo que terminó por reducir la secuencia a una sola sesión, de las dos preestablecidas. Sin embargo, se puede concluir también que la secuencia de actividades fue un aporte para los estudiantes, debido a que estos lograron responder de manera correcta al cuestionario en la gran mayoría de las preguntas.

Ahora, debido a que inicialmente eran solo dos sesiones, se tuvo que dejar de lado el desarrollar más actividades, dentro de esta el de una actividad referente a la negación de la definición, y otra para el desarrollo histórico de esta, por lo cual se plantean estos aspectos de mejora para futuras investigaciones.

Finalmente, para responder a la pregunta "¿Cómo los estudiantes de pedagogía en matemática de la UMCE comprenden la definición del límite de una función real de variable real en un punto?", se menciona que, respecto al primer cuestionario, los estudiantes tienen un enfoque más arraigado al trabajo procedimental, esto se puede observar en el primer cuestionario, ya que, a pesar de que en general respondieron correctamente las preguntas ligadas a la demostración por definición, en la pregunta 2b, se ve que algunos estudiantes solamente evalúan el límite de forma algebraica a pesar de no estar buscando el límite en un punto de acumulación del dominio de la función, esto puede deberse al olvido de ciertos conceptos, o el poco conocimiento de estos. Por otro lado, respecto a los estudiantes con los que se desarrolló la secuencia de actividades, se puede mencionar que manejan tanto una forma procedimental, como una forma mixta, debido a que la mayoría pudo desarrollar las preguntas de la 1 a la 3, sin embargo, falta una mayor profundización en la forma de trabajo estructural para que los estudiantes sean capaces de responder a preguntas como las del enunciado 4 del segundo cuestionario.

Por todo lo anterior, se puede finalizar diciendo que se cumplieron los objetivos de la investigación, pero se recomienda la aplicación presencial y un trabajo más extenso con la negación de la definición, puesto que si los estudiantes logran desarrollar actividades como esta, puede inferirse que se lograría un mayor manejo estructural de la definición, ya que, para ser resuelta, ella necesita de todos los conocimientos anteriores.

11. Referencias Bibliografía

Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, *1*(1-10).

Apostol (1984). Calculus I: cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Editorial Reverté.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M.Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez, *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2015). Perspectives on design research: The case of didactical engineering. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education*. Springer Verlag.

Carrillo Yáñez, J., Contreras González, L. C., & Montes Navarro, M. (2015) Reflexionando sobre el conocimiento del profesor.

Delgado, C. É. S. A. R. (1998). Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso. *Universidad Autónoma de Barcelona: Departamento de didáctica de las matemáticas y de las ciencias experimentales*.

Fonseca, J., & Castillo, M. (2013). Formación de docentes de matemática: aspectos relevantes. Uniciencia, 27(1), 2-14.

García, Y. R. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. *Omnia*, *13*(2), 120-157.

Hitt, F., & Páez, R. (2004). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza

Honorato-Errázuriz, M. J. (2019). Nuevo currículum de 3° y 4° medio: formando ciudadanos para el siglo XXI. *Revista Saberes Educativos*, (4), 05-12.

Ministerio de Educación. (2012). Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media.

Ministerio de Educación. (2020). Programa de estudio limites derivadas e integrales para formación diferenciada.

Palmero, M. L. R. (2011). La teoría del aprendizaje significativo: una revisión aplicable a la escuela actual. *IN. Investigació i Innovació Educativa i Socioeducativa*, *3*(1), 29-50

Panohaya, A., & Guadalupe, A. (2019). *Comprensión del concepto de límite de una función en estudiantes de actuaría, física y matemáticas* (Bachelor's thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla).

Rendón, C. G. (2017). *Diseño de tareas mediadas por la historia del concepto de límite dirigidas a la formación del profesor de Matemáticas* (Doctoral dissertation, Universidad Pedagógica Nacional).

Rendón, C. G., & Guacaneme, E. A. (2016). ¿Qué aporta la historia de las matemáticas a futuros profesores sobre el concepto de límite funcional?

Rodríguez Palmero, M. L. (2013). La teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva. Ediciones Octaedro, S.L.

Sánchez-Compaña, T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza* (Doctoral dissertation, Universidad de Granada).

Sampaio, H.R. & Batista, I.L. (2018). Mathematics history and cognitive values on a didactic sequence: Teaching trigonometry. *REDIMAT. Journal of Research in Mathematics Education*

Spivak, M. (2012). Calculus (3a. ed.). Editorial Reverté.

Stewart, J. (2017). Cálculo: Trascendentes Tempranas. Cengage Learning.

Vargas, T., & de la Torre Vargas, M.(1994) Una alternativa didáctica para la enseñanza de la idea de límite.

Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., & Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA. Sociedad Argentina de educación Matemática (SOAREM)*, *8*(29), 9-19.